Ingegneria Aeronautica

MECCANICA DEL VOLO

Ingegneria aerospaziale

MECCANICA

DEL

VOLO

digitalizzato
da
Flanker

In copertina: Tupolev Tu 144LL, foto D. Lausbera, ritoccata.

A quelle meravigliose, straordinarie macchine che,

nello sforzo di sostenere la vita umana,

la pèrdono.

INTRODUZIONE

Nella nostra trattazione considereremo l'aeromobile come un sistema dinamico soggetto a determinate azioni, o forze generalizzate (cioè sia forze che momenti), come:

- FORZA PESO $\vec{F}_P$
- FORZE AERODINAMICHE $\vec{F}_A$
- FORZE PROPULSIVE $\vec{F}_T$
- FORZE INERZIALI $\vec{F}_I$

Dobbiamo dunque modellare nel modo più opportuno tali azioni per arrivare a formulare le equazioni del moto del velivolo. Per quanto riguarda la forza peso tratteremo velivoli a quote non superiori ai 15 - 20 km, dove è possibile considerare costante l'accelerazione di gravità $\vec{g}$. Per le forze aerodinamiche possiamo dire che esse dipendono dalle caratteristiche dell'atmosfera, dalla velocità del velivolo rispetto all'aria, dalla forma dell'aeroplano e da come esso è orientato rispetto al vettore velocità (quindi da certi angoli particolari, il più importante dei quali è l'angolo d'attacco). Anche le azioni di tipo propulsivo dipendono fortemente dalle caratteristiche dell'atmosfera; nelle nostre considerazioni terremo conto essenzialmente di due tipi di motori:

- MOTORE ALTERNATIVO AD ELICA (motoelica)
- MOTORE A GETTO (nelle sue diverse versioni)

I tipi di moto che un velivolo può compiere sono quasi esclusivamente dipendenti dalle caratteristiche propulsive, aerodinamiche e strutturali; una volta note tali informazioni possiamo definire certe condizioni di volo che chiamiamo di equilibrio e nell'ambito di tali condizioni siamo in grado di analizzare le prestazioni, o caratteristiche di volo, del velivolo. Parlare di prestazioni significa ad esempio determinare le velocità massime e minime, il consumo di combustibile ad una certa quota, tempo impiegato a raggiungere una determinata quota, e così via. Una volta fatto questo, sia per via grafica che per via analitica, arriviamo a disegnare il cosiddetto inviluppo di volo, che è un grafico del tipo in figura 1. Quando per un certo velivolo disponiamo di tale grafico, possiamo determinare, tra l'altro, le velocità massima e minima per una certa quota.

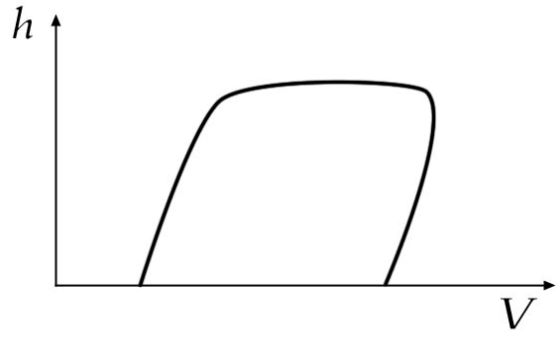
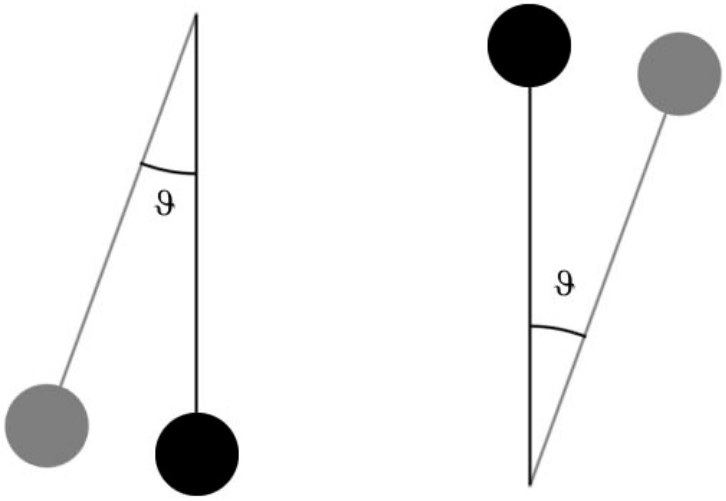


Figura 1

Il fatto però di aver dimostrato che il velivolo raggiunga certe prestazioni non ci informa su come voli effettivamente l'aereo: vogliamo cioè che siano soddisfatti anche dei requisiti di sicurezza e comodità, e questo introduce i concetti di *stabilità* e *controllabilità*. Il concetto di stabilità si suddivide in *stabilità statica* e *stabilità dinamica*: dal punto di vista matematico tale suddivisione non ha alcun senso, ma nell'ambito della meccanica del volo si arriva a parlare di stabilità statica e dinamica come se fossero due cose diverse. Per stabilità statica si intende la capacità dell'aereo di sviluppare, una volta perturbato, azioni tali che quest'ultimo si riporti nella condizione iniziale di equilibrio. Per chiarire il concetto possiamo considerare un pendolo.



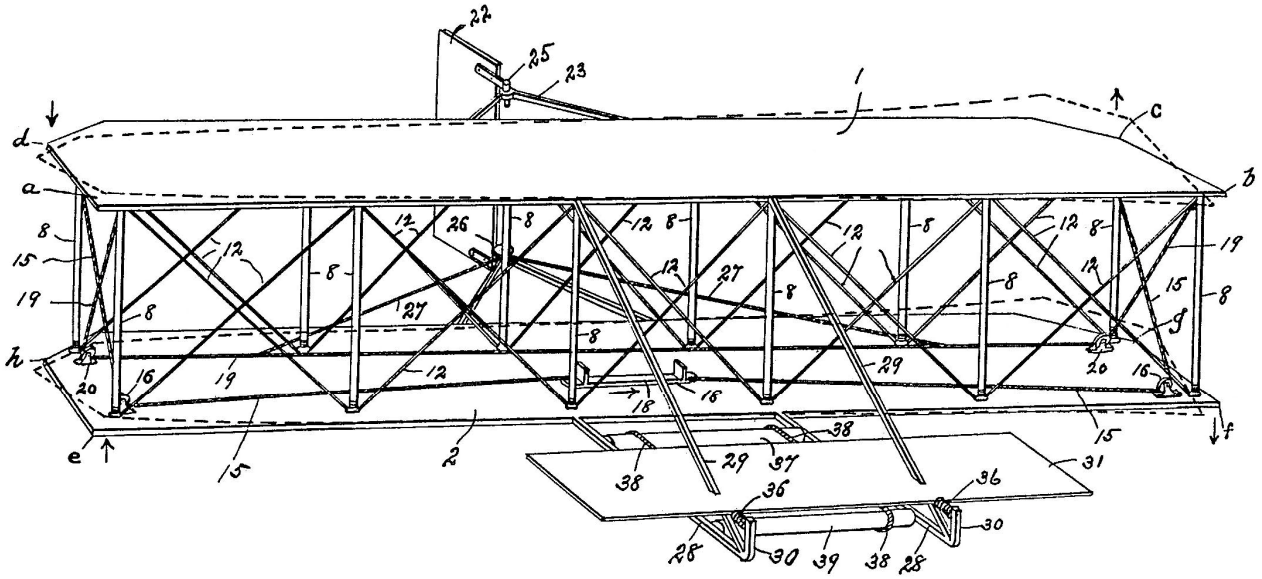
Stabilità positiva Stabilità negativa

Figura 2

Il pendolo ha due posizioni di equilibrio: una superiore, *instabile* (instabilità statica o stabilità statica negativa), ed una inferiore, *stabile* (stabilità statica o stabilità statica positiva).

L'applicazione al velivolo è immediata: consideriamo un aereo in volo rettilineo orizzontale uniforme e immaginiamo che per un qualche motivo, ad esempio una raffica, si abbia una variazione dell'angolo d'attacco; diremo che il velivolo possiede stabilità statica positiva se esso, a seguito di tale variazione di incidenza, svilupperà dei momenti che tendano a riportare l'angolo d'attacco al valore iniziale.

Quando invece parliamo di stabilità dinamica interviene il moto del sistema, cioè l'evoluzione dello stato del sistema negli istanti successivi a quello in cui si è verificata la perturbazione; per capire riferiamoci ancora al pendolo: abbiamo detto che se spostiamo il pendolo dalla posizione di equilibrio inferiore ci troviamo in una caso di stabilità statica positiva, per cui il pendolo genera delle azioni che lo riportano nella posizione iniziale; ciò però accade solo se il moto oscillatorio del pendolo è un moto smorzato, perché se non v'è smorzamento (dovuto ad esempio ad una resistenza aerodinamica) le oscillazioni certo non divergeranno, ma neppure convergeranno verso la posizione iniziale. Se torniamo a riferirci al velivolo ciò si riflette nello studio del moto, ad esempio del baricentro, dopo che l'aereo sia stato perturbato da una condizione di equilibrio quale può essere quella di moto rettilineo orizzontale uniforme; dunque parlare di stabilità dinamica implica lo studio delle frequenze di smorzamento con cui il velivolo è in grado di ritornare alla condizione iniziale (stabilità della traiettoria).



Wright Flyer, dal brevetto del 1903 - Figura 3

L'ultimo aspetto riguarda la controllabilità, intesa come capacità del pilota di esercitare efficaci azioni di controllo, effettuando così fasi di volo manovrato; supponiamo di essere, ad

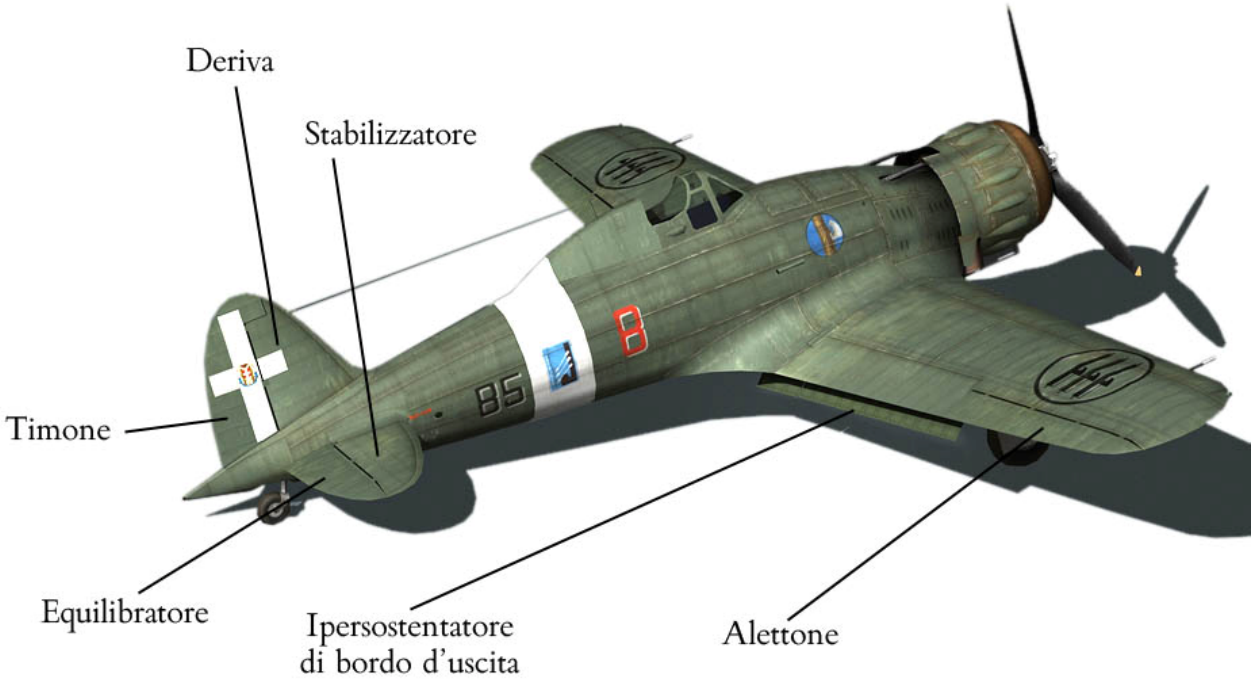
esempio, in volo rettilineo orizzontale uniforme e di voler effettuare una virata a destra: se per fare ciò il pilota deve esercitare una forza molto intensa per variare lentamente la traiettoria, tale velivolo non è ben manovrabile.

Un sistema che possieda una stabilità elevata potrebbe essere poco manovrabile: stabilità e manovrabilità cioè sono generalmente complementari, perché un sistema eccessivamente stabile tenderà ad opporsi ad una qualunque variazione. Nel velivolo dei fratelli Wright (figura 3) si preferì la manovrabilità a scapito della stabilità; è chiaro che non avere stabilità per quel velivolo non era un difetto rilevante, poiché la velocità di volo talmente bassa permetteva ugualmente al pilota di mantenere l'aereo su una traiettoria rettilinea orizzontale, operando continue correzioni sui comandi.

Capitolo 1

ELEMENTI DESCRITTIVI DEL VELIVOLO

1.1 – ELEMENTI COSTITUTIVI DEL VELIVOLO

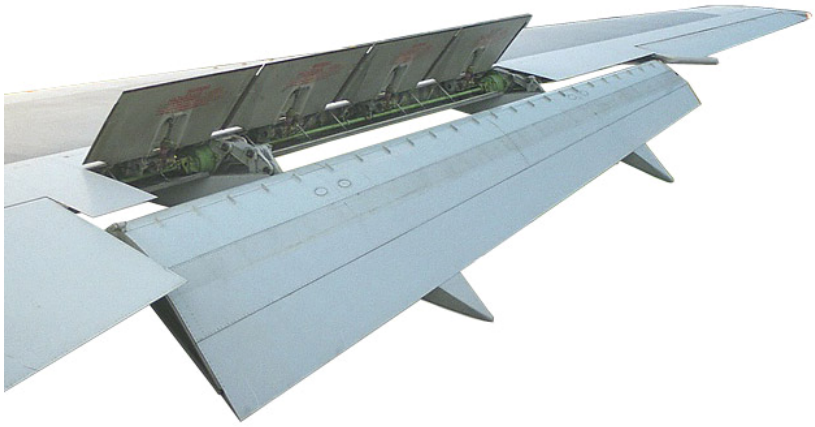


Macchi MC.200 Saetta - Figura 1

Come si può vedere dalla figura 1 fra gli elementi più importanti che costituiscono un velivolo abbiamo:

- FUSOLIERA: la fusoliera costituisce la parte strutturale principale ed inoltre collega fra loro le varie componenti del velivolo, come le ali, l'impennaggio verticale ed i piani di coda orizzontali.
- IMPENNAGGI: gli impennaggi si suddividono in orizzontali e verticali; gli impennaggi orizzontali presentano una parte fissa detta stabilizzatore ed una parte mobile detta equilibratore; l'impennaggio verticale ha una parte fissa detta deriva ed una parte mobile detta timone.
- ALA: sull'ala (si veda figura 1) troviamo diverse superfici di controllo come alettoni, sistemi di ipersostentazione e diruttori di flusso. Gli alettoni servono a produrre momenti di controllo attorno all'asse longitudinale del velivolo; essi ruotano in un modo detto "coniugato", il che significa che se l'alettone della semiala destra ruota verso l'alto, quello della semiala sinistra ruota verso il basso. Un velivolo di grandi

dimensioni è generalmente dotato di due serie di alettoni: alettoni esterni, posizionati in prossimità dell'estremità alare, e alettoni interni, posti verso la radice dell'ala; gli alettoni esterni vengono utilizzati solo a basse velocità, perché alle alte velocità l'uso di questi produrrebbe deformazioni torsionali sull'ala, riducendo l'efficacia delle azioni di controllo; ad alta velocità perciò si usano gli alettoni interni, posizionati in una regione di maggior resistenza strutturale, dove l'elevata pressione dinamica presente ad alta velocità compensa un braccio minore rispetto agli alettoni esterni. Oltre agli alettoni abbiamo, come detto, i sistemi di ipersostentazione (*flap*) di bordo d'attacco e di bordo d'uscita. Infine troviamo i diruttori di flusso o *spoiler* (deflettori) (figura 2), che incontriamo su quasi tutte le ali e che, con l'apertura parziale o totale, servono a separare il flusso su quella parte dell'ala che si trova a valle di tali superfici. Il risultato è quello di una riduzione della portanza e di un aumento della resistenza.



Deflettori - Figura 2

Possono essere presenti, inoltre, impennaggi orizzontali anteriori, detti alette Canard (figura 3). L'impennaggio verticale può essere separato in due superfici distinte; possono esistere dei freni aerodinamici costituiti da superfici disposte in genere lungo la fusoliera e che si aprono in fase di atterraggio per esercitare un'azione frenante. Molti aviogetti da combattimento infine impiegano un impennaggio orizzontale costituito da una struttura unica e mobile (in inglese *all moving*).

Tifone - Figura 3

1.2 - SISTEMA DI CONTROLLO PRINCIPALE

Il sistema di controllo principale è preposto al comando di alettoni, timone di direzione ed equilibratori:

- COMANDO TRASVERSALE: il comando trasversale agisce sugli alettoni e sugli equilibratori. Ruotando la barra di comando verso destra l'alettone della semiala destra ruota verso l'alto, mentre l'alettone della semiala sinistra ruota verso il basso; il risultato è la generazione di un momento di controllo, il quale fa compiere una rotazione al velivolo attorno all'asse longitudinale verso destra. Se viceversa la barra di comando viene ruotata verso sinistra è l'alettone della semiala sinistra a ruotare verso l'alto, mentre l'alettone della semiala destra ruoterà verso il basso, generando così un momento di controllo che fa ruotare il velivolo verso sinistra.

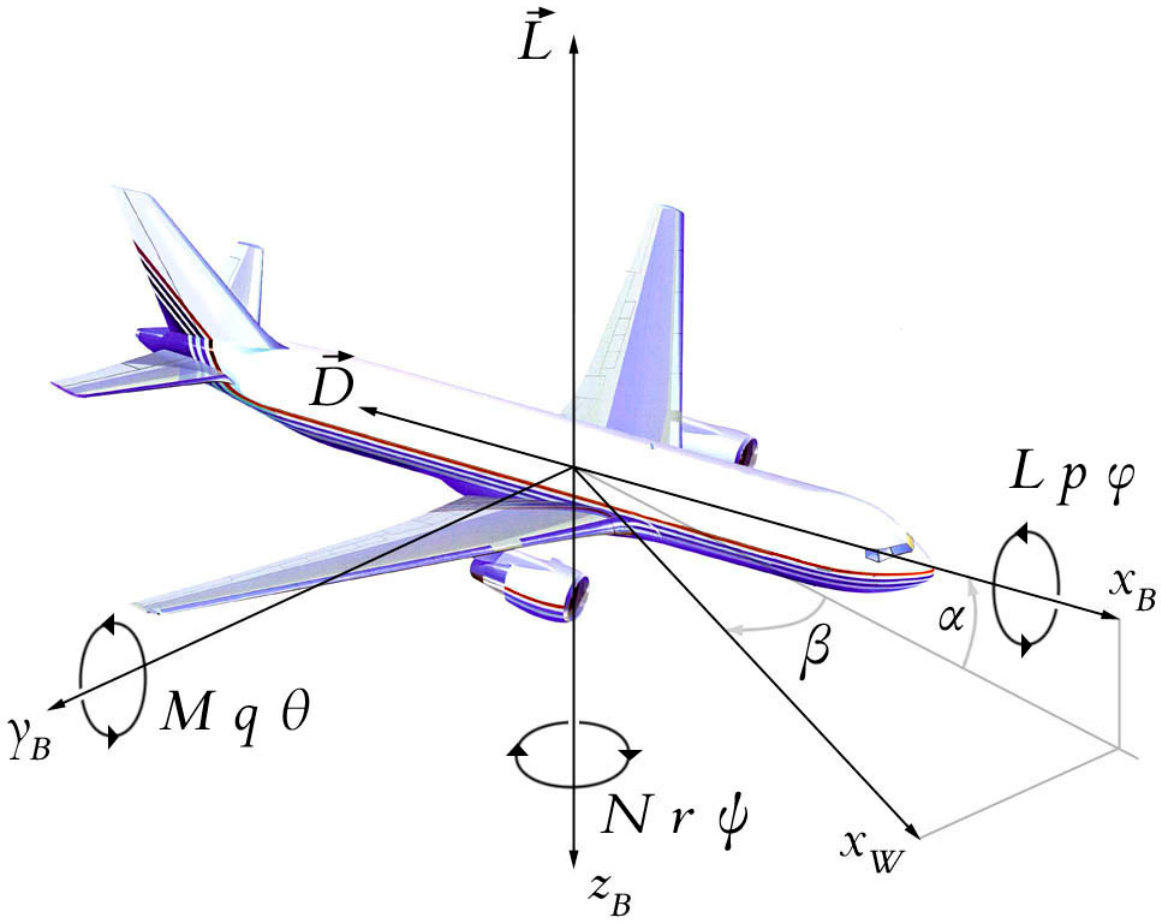
- COMANDO LONGITUDINALE: il comando longitudinale agisce sugli equilibratori. L'equilibratore ha essenzialmente due funzioni principali. La prima è quella di realizzare l'equilibrio dei momenti (che per ora chiamiamo longitudinali) del velivolo, la seconda è quella di comandare l'effetto di certe manovre: se tiriamo a noi la barra, l'equilibratore ruota verso l'alto ed il velivolo tende ad abbassare la coda e ad alzare il muso, mentre se spingiamo in avanti la barra, l'equilibratore ruota verso il basso ed il velivolo tende ad alzare la coda e ad abbassare il muso.

- COMANDO DIREZIONALE: il comando direzionale agisce sul timone di direzione; il timone di direzione ha due finalità; la prima la citiamo per poi discuterne in futuro, ed è quella di stabilizzare (o meglio equilibrare) condizioni di volo non simmetriche, mentre la seconda è quella di produrre momenti di controllo; il timone è azionato mediante una coppia di pedali: schiacciando il pedale destro si produce una

rotazione del timone verso destra e ciò fa spostare la coda verso sinistra ed il muso verso destra, se invece agiamo sul pedale di sinistra il timone ruoterà verso sinistra e ciò fa spostare la coda verso destra ed il muso verso sinistra.

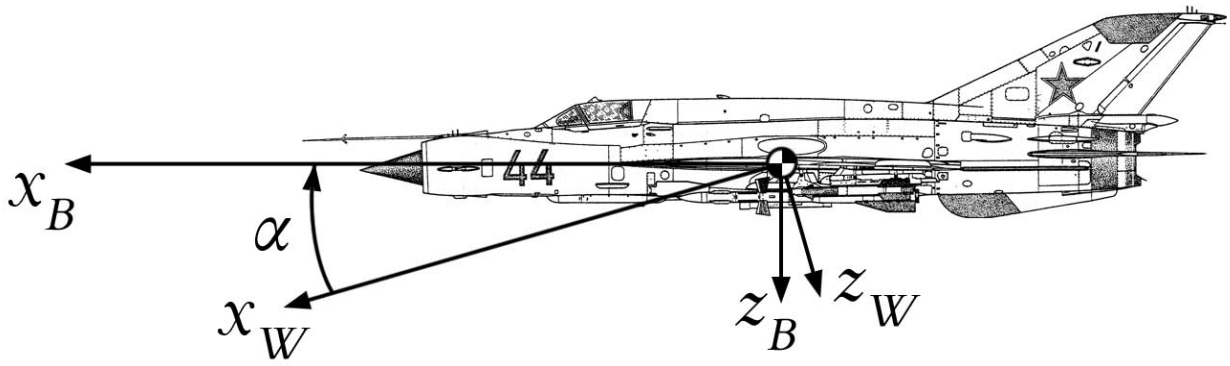
1.3 - ASSI CORPO ED ASSI VENTO

In meccanica del volo si utilizzano diversi riferimenti che hanno varie finalità, come ad esempio esprimere le equazioni del moto oppure l'orientamento del velivolo nel modo più opportuno; prima analizzare in dettaglio le diverse applicazioni che faremo di tali sistemi, illustriamo due sistemi di riferimento.



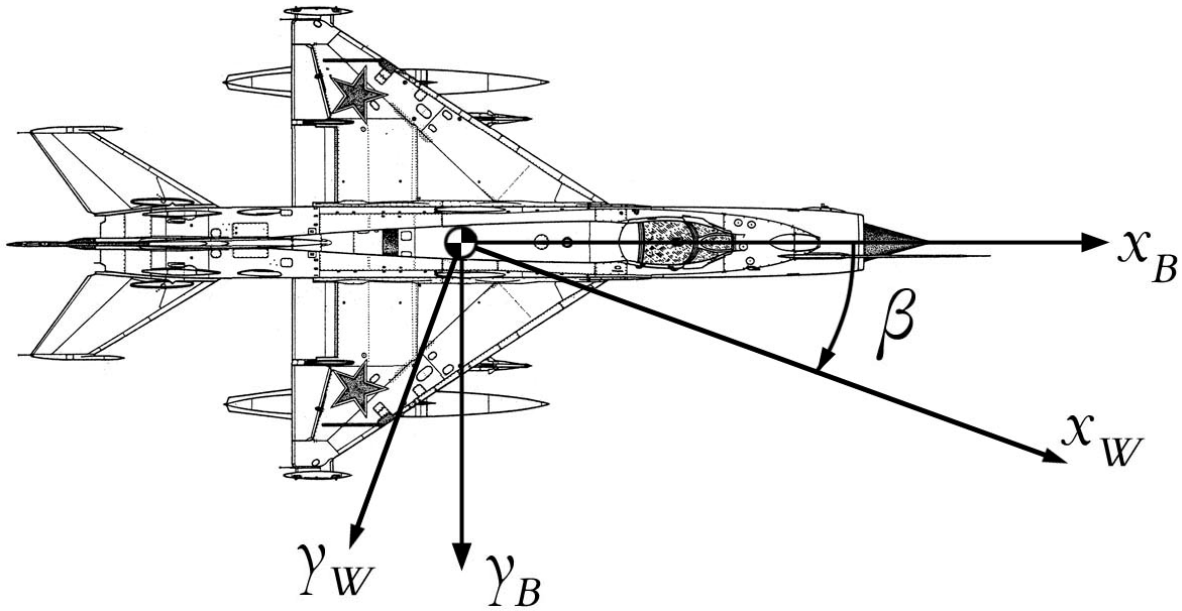
Boeing 767 - Figura 4

Il primo sistema di riferimento è detto *sistema di assi corpo* e si indica con $\Im_B(x_B;y_B;z_B)$ dove il pedice B sta per *body* (corpo appunto); tale terna è una terna destra solidale al velivolo, avente origine nel baricentro, l'asse longitudinale x_B giacente nel piano di simmetria del velivolo ed allineato secondo una direzione longitudinale caratteristica del velivolo stesso (asse della fusoliera) col verso positivo rivolto verso la prua; l'asse z_B è ortogonale all'asse x_B, giace nel piano di simmetria del velivolo ed è positivo nella direzione testa-piedi del pilota (perciò verso il basso in una condizione di volo diritto); l'asse y_B è ortogonale ai primi due ed orientato in modo che formi con essi una terna destra, perciò verso la destra del pilota.



Angolo d'attacco positivo di un Mikoyan Gurevich MiG-21S - Figura 5

La seconda terna (indicata parzialmente in figura 5) è la terna detta di assi vento, che indichiamo con $\Im_W(x_W; y_W; z_W)$ dove il pedice W sta per *wind* (vento): tale terna ha origine nel baricentro del velivolo e l'asse longitudinale x_W è allineato secondo il vettore velocità $\vec{V}$ del velivolo stesso; l'asse z_W è ortogonale all'asse x_W, giace per definizione nel piano di simmetria del velivolo ed anch'esso è positivo verso il basso in volo diritto.



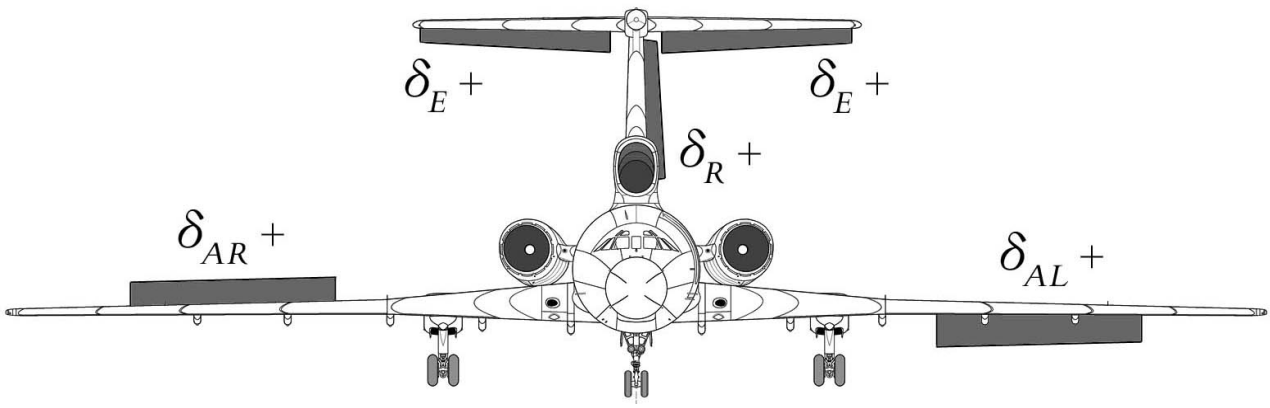
Angolo di derapata positivo di un MiG-21S - Figura 6

Possiamo osservare dalla figura 4 come l'orientamento di $\Im_W$ rispetto a $\Im_B$ sia identificato da due angoli, detti angoli aerodinamici, che sono l'angolo α, detto *angolo d'attacco*, e l'angolo β, detto *angolo di derapata*. Parliamo di condizioni di volo simmetriche nei casi in cui l'angolo di derapata sia nullo.

Diverse grandezze che utilizzeremo risulteranno riferite al sistema di assi corpo: il vettore velocità del velivolo può essere (e viene abitualmente) proiettato sui tre assi di $\Im_B$ secondo le tre componenti u, v e w; indichiamo poi con L, M ed N le proiezioni su $\Im_B$ del momento totale esterno agente sul velivolo: tali componenti sono detti momento di rollio (L), momento di beccheggio (M) e momento di imbardata (N); è importante ricordare quale sia il verso positivo dei momenti sulla base del sistema di riferimento adottato: un momento di rollio positivo tende a far abbassare la semiala destra ed a far alzare la semiala sinistra; un momento di beccheggio positivo è rappresentato da una coppia che tende a far alzare il muso del velivolo (ed è perciò cabrante); infine un momento di imbardata positivo corrisponde ad una coppia che tende a far ruotare il muso del velivolo verso destra. Nello stesso modo vengono espresse le componenti della velocità angolare del velivolo rispetto a $\Im_B$: indichiamo tali componenti con p, q ed r, dove p è detta velocità angolare di rollio, q è la velocità angolare di beccheggio ed r è la velocità angolare di imbardata; per quanto riguarda i versi positivi di rotazione, vale la convenzione adottata per i momenti. Vengono inoltre indicati tre angoli ψ, θ e φ che individuano l'orientamento del velivolo rispetto ad un certo sistema di riferimento che illustreremo più avanti: in analogia con la terminologia adottata, tali angoli sono chiamati angolo di rollio (φ), angolo di beccheggio (θ) ed angolo di imbardata (ψ).

1.4 - ANGOLI DI CONTROLLO

In figura 7 sono riportati i nomi degli angoli delle superfici del sistema di controllo principale (anche qui è opportuno tener presente le convenzioni mostrate precedentemente).



Tupolev Tu-154B - Figura 7

Per guanto riguarda gli equilibratori è positivo un angolo (indicato con δ_E) di rotazione verso il basso, *l'effetto è quello di controbilanciare momenti di beccheggio positivi.*

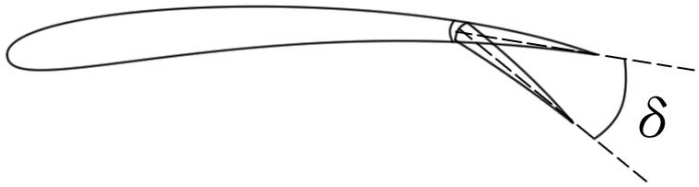


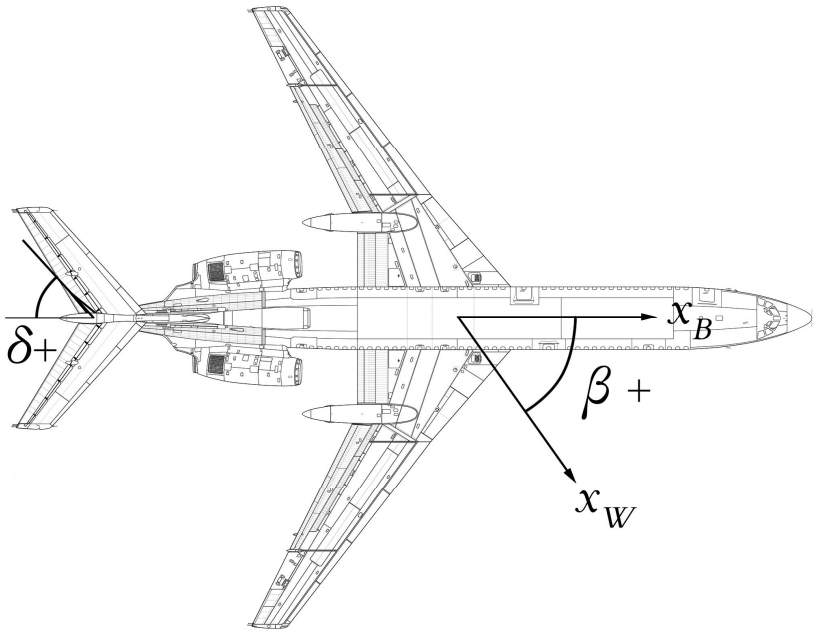
Figura 8

L'angolo δ_A degli alettoni (i quali, ricordiamo, si muovono in modo coniugato) è positivo quando l'alettone della semiala destra ruota verso l'alto e quello della semiala sinistra ruota verso il basso: *l'effetto è quello di produrre momenti di rollio positivi*; non necessariamente l'alettone della semiala destra ruota verso il basso (o verso l'alto) della stessa ampiezza con cui ruota verso l'alto (o verso il basso) l'alettone della semiala opposta, quindi quando si parla di δ_A si fa riferimento ad un valore medio delle due rotazioni

$$\delta_A = \frac{1}{2}(\delta_{AR} + \delta_{AL}) .$$

L'ultimo angolo di controllo è rappresentato dall'angolo di rotazione del timone δ_R: sono considerate positive le rotazioni del timone necessarie ad equilibrare o stabilizzare (vedremo poi il significato che hanno tali termini) angoli di derapata positivi, ossia a far volare l'aeromobile in equilibrio con un certo angolo di derapata positivo.

Da quanto detto dunque, quella indicata in figura 7 rappresenta una rotazione positiva.



Tupolev Tu-154B - Figura 9

Capitolo 2

RICHIAMI DI AERODINAMICA

2.1 - L'AERODINAMICA DI UN VOLATILE

In questo capitolo ci occuperemo dei concetti fondamentali di aerodinamica, che costituiscono la base del modello delle azioni aerodinamiche che verrà poi utilizzato nell'ambito della meccanica del volo. Richiameremo le nozioni fondamentali, sempre però con un occhio al tipo di applicazioni e di problemi che poi dovremo risolvere; cercheremo inoltre di fornire anche qualche informazione di tipo qualitativo che ci aiuti a capire per quale motivo gli aeroplani che oggi vediamo volare hanno tale forma e tale configurazione aerodinamica e non una completamente diversa. Osserviamo questo uccello.

Cormorano in atterraggio - Figura 1

Discutiamo tale fotografia in quanto contiene moltissime informazioni che poi costituiranno l'oggetto della nostra discussione. Il volatile si trova in una condizione di volo a bassa velocità: osserviamo come sia elevata la curvatura dell'ala e come anche il corpo contribuisca alla generazione di forza aerodinamica attraverso un'elevata curvatura; notiamo inoltre come in condizioni di volo a basse velocità vi sia una penna (detta *alula*), collocata più o meno in corrispondenza del bordo d'attacco dell'ala, staccata dal corpo dell'ala vera e propria, così come altre penne sono sollevate in corrispondenza del bordo di uscita alare: tali penne han-

no una funzione molto simile a quella degli ipersostentatori sui velivoli moderni; quando infatti parleremo di ipersostentatori di bordo d'attacco vedremo che essi agiscono creando delle fessure attraverso le quali il flusso viene accelerato e la distribuzione di pressione sul profilo risulta ottimizzata in modo che venga posticipato il più possibile il distacco della vena fluida: l'alula realizza esattamente tale scopo. Per quanto riguarda la regione nella quale le penne sono sollevate, lo scopo principale è quello di evitare fenomeni di separazione in corrispondenza del bordo di uscita dell'ala e ciò viene ottenuto mediante delle penne che hanno la funzione di generatori di turbolenza, molto simili a quelli utilizzati sugli aerei e di cui parleremo. Tutta la configurazione poi, in tale condizione di volo, ha un valore piuttosto elevato della curvatura: ne consegue (lo vedremo più avanti) che tale configurazione sia soggetta ad un momento aerodinamico picchiante, che tenderebbe a far ruotare l'uccello con il muso verso il basso. Per questo motivo l'ala è tutta traslata in avanti in modo tale che si sposti il più possibile il *centro di pressione*[1] od il *centro aerodinamico* che definiremo più avanti, in posizione avanzata, così da realizzare l'equilibrio dei momenti di beccheggio di tutta la configurazione.

Inoltre ai fini di ridurre al massimo la velocità di atterraggio, la coda e le zampe in posizione estratta agiscono da freni aerodinamici, per aumentare al massimo la resistenza.

Troveremo nuovamente molti degli aspetti appena illustrati, non solo in relazione a certe caratteristiche dell'aerodinamica, ma soprattutto in relazione al centraggio del sistema, cioè all'equilibrio dei momenti di beccheggio.

2.2 - PROFILO 2D: CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

Dovendo richiamare alcuni aspetti principali dell'aerodinamica, partiamo dal cosiddetto profilo bidimensionale (si veda la figura 2), evidenziando le principali caratteristiche geometriche e discutendo quali effetti di tipo aerodinamico siano associati a ciascuna di tali caratteristiche.

[1] Individuato all'interno della sezione alare, è il punto di applicazione della risultante di tutte le forze di portanza e di resistenza elementari agenti sulla sezione medesima.

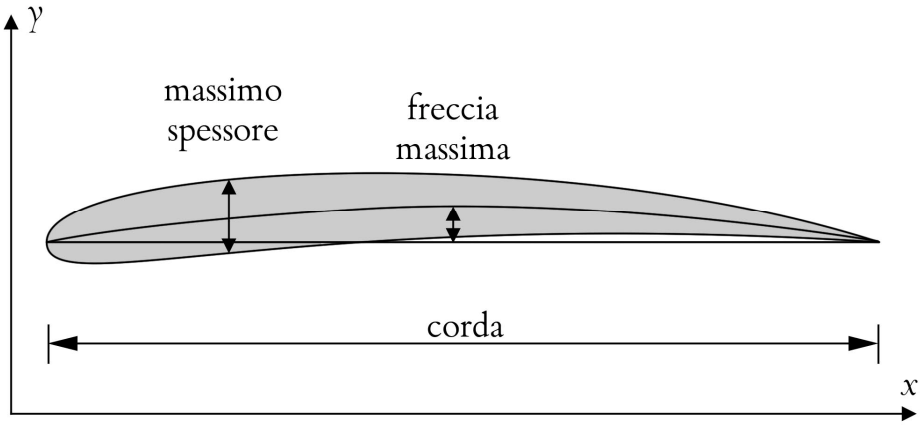


Figura 2

- SPESSORE: la distribuzione di spessori (o lo spessore massimo del profilo) influenzano la pendenza della retta di portanza: a maggiori spessori si associano valori maggiori di $C_{L\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha}$; lo spessore ha inoltre effetto sulla posizione del centro aerodinamico (definito qui sotto), nonché sulle caratteristiche del profilo alle alte incidenze (dette anche caratteristiche di stallo) ed inoltre influenza molto il comportamento del profilo al variare del numero di Mach.

- CURVATURA: la curvatura può essere caratterizzata in molti modi diversi; un parametro della curvatura può essere la freccia massima, ossia la massima distanza della linea media dalla corda. La curvatura influenza molto l'angolo di incidenza di portanza nulla, ossia il valore dell'angolo d'attacco (riferito alla corda del profilo) in corrispondenza del quale il valore del coefficiente di portanza sviluppato dal profilo è nullo: quindi una variazione di curvatura produce una rotazione del cosiddetto asse di portanza nulla del profilo. Cambia poi il valore del momento (o del C_M) rispetto al centro aerodinamico; in particolare il C_M rispetto al centro aerodinamico di un profilo simmetrico è nullo, mentre il C_M rispetto al centro aerodinamico di un profilo a curvatura positiva (come in figura 2) è picchiante (cioè negativo). Infine il valore della curvatura, o comunque la forma della linea media, gioca un ruolo marginale, sul comportamento del profilo alle alte incidenze (un effetto quantitativamente maggiore è dato dalla forma del bordo d'attacco).

- CENTRO AERODINAMICO: è detto anche *fuoco* o *punto neutro dell'ala*. È il punto in cui il coefficiente di momento rimane generalmente costante al variare dell'incidenza. Lo si calcola come 25% della corda. Quindi se misuriamo il C_M di

un profilo rispetto al centro aerodinamico (che non voli ad incidenze elevate) troviamo che tale valore resterà costante al variare dell'angolo d'attacco.

- FORMA DEL BORDO D'ATTACCO: la forma del bordo d'attacco influenza molto più della curvatura il comportamento del profilo alle alte incidenze: se consideriamo un profilo dell'incidenza abbastanza alto, si determina una bolla di separazione del flusso nella parte anteriore del profilo. Se modifichiamo opportunamente la forma del bordo d'attacco, quasi allineandolo con la direzione della corrente, quello che dovremo aspettarci sarà un miglioramento del comportamento del profilo nella condizione considerata (per esempio dovremo aspettarci la scomparsa di quella regione di separazione).

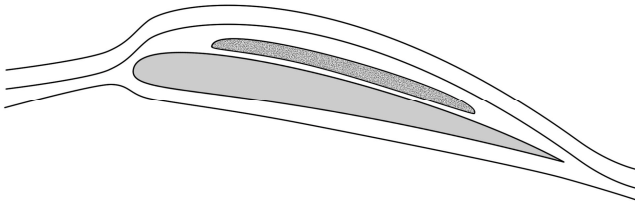


Figura 3

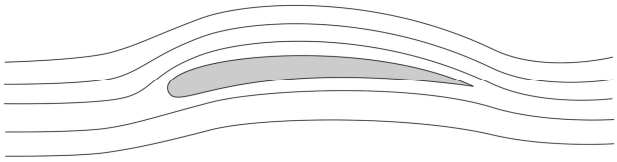
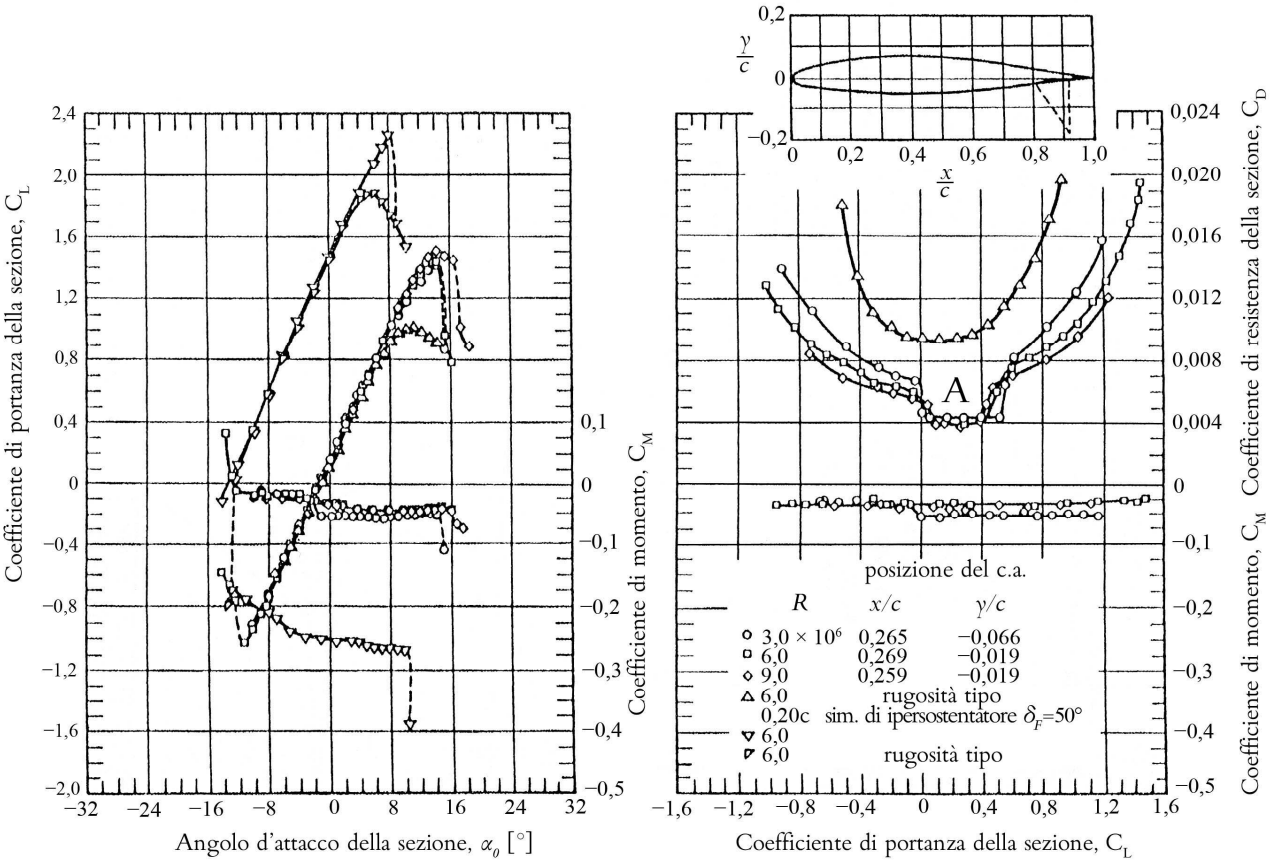


Figura 4

- FORMA DEL BORDO D'USCITA: la forma del bordo d'uscita viene caratterizzata dall'angolo ϕ_{TE} ed il cui effetto aerodinamico non ci interesserà; l'unica cosa che è utile riportare è il fatto che ϕ_{TE} è stretto parente dello spessore del profilo: ad un valore minore di ϕ_{TE} corrisponderà uno spessore minore e viceversa; quindi laddove interessi considerare la forma del bordo d'uscita, questa avrà effetti analoghi a quelli dello spessore.

2.3 - POLARE DEL PROFILO

Nel momento in cui desideriamo caratterizzare il comportamento aerodinamico di un certo profilo, finiamo inevitabilmente per studiare dei grafici i quali riportano informazioni ottenute sperimentalmente riguardo i coefficienti aerodinamici del profilo stesso.



Caratteristiche aerodinamiche del profilo NACA 65-212 - Figura 5

Il grafico di sinistra in figura 5 rappresenta la retta (o curva, a seconda della regione cui facciamo riferimento) di portanza, cioè la relazione che lega il coefficiente di portanza della sezione all'angolo d'attacco, di un profilo NACA 65-212. La curva di portanza ha la particolarità di essere lineare sino ad un valore caratteristico dell'angolo d'attacco che indichiamo con $\alpha^\star$.

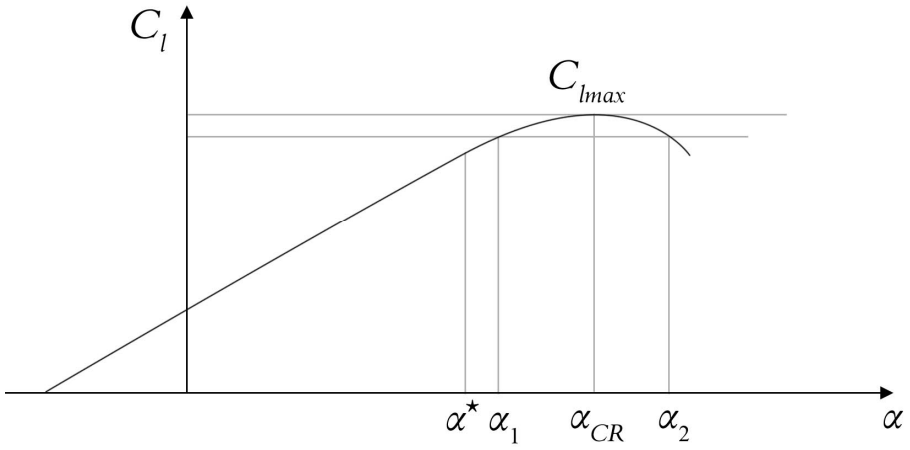


Figura 6

Tale valore caratteristico può collocarsi, a seconda del profilo, dagli 8° ai 12°. Aumentando α al di sopra di α^* si raggiunge il valore α_{CR} (α critico) in corrispondenza del quale si ottiene il massimo valore del C_L; per $\alpha > \alpha_{CR}$ il C_L diminuisce con una legge che dipende dalle caratteristiche geometriche del profilo.

Il grafico di destra riporta due famiglie di curve; la prima (quella più in alto) è relativa alla relazione tra C_L e C_D ed è chiamata polare del profilo, essa ha tipicamente la seguente forma:

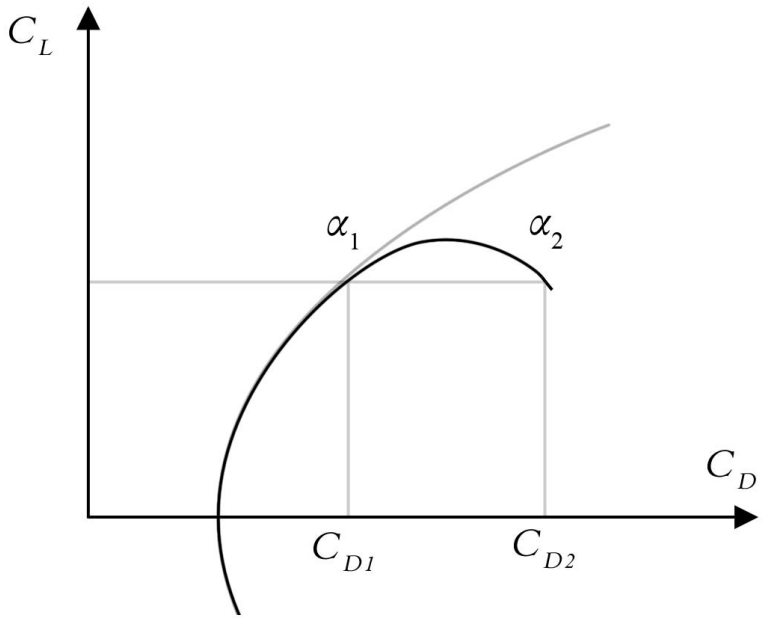


Figura 7

Tale andamento può essere rappresentato molto semplicemente mediante una relazione di tipo parabolico

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2$$

dove con C_{D0} è indicato il valore minimo del coefficiente di resistenza. Attenzione però al fatto che tale relazione non vale per qualunque angolo d'attacco: arrivati ad un certo valore di α, che possiamo fissare all'incirca in α^*, la polare parabolica (cioè teorica) si discosta da quella reale. Notiamo inoltre che ad alte incidenze si arriva ad una situazione in cui allo stesso valore del C_L corrispondono due valori del C_D (C_{D1} e C_{D2}) e due valori dell'angolo d'attacco che indichiamo con α_1 e α_2, che sono i medesimi (si veda figura 6) individuati sul grafico della retta di portanza per quel dato valore del C_L: quindi quella specie di "ricciolo" sulla polare reale corrisponde proprio alla zona di variazione non lineare del coefficiente di portanza con l'angolo d'attacco.

L'altra famiglia di curve (che di fatto sono rette) corrisponde all'andamento del C_M rispetto al centro aerodinamico al variare dell'angolo d'attacco (o del C_L tanto è la stessa cosa): troviamo confermato il fatto che il C_M, rispetto al centro aerodinamico, non cambi al variare di α ed inoltre notiamo anche che il C_M sia negativo (picchiante), come ci dovevamo aspettare.

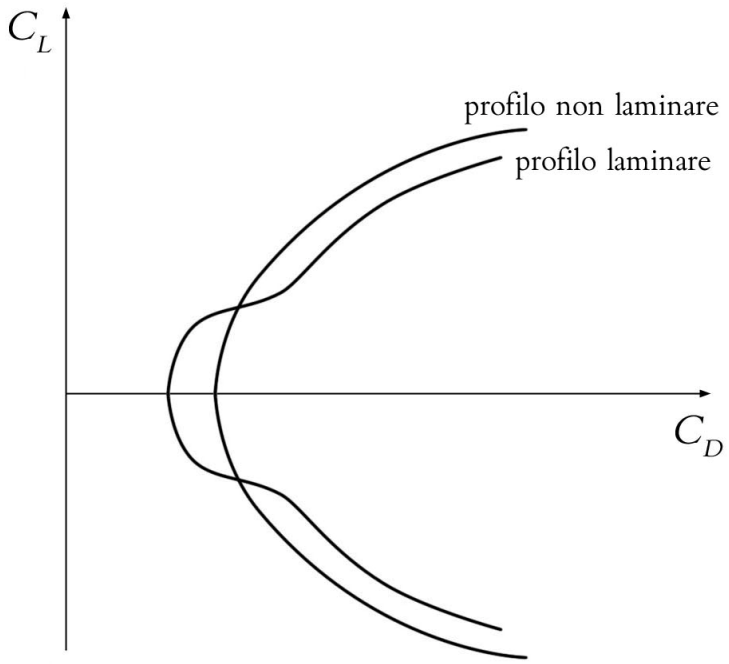


Figura 8

I grafici ora visti si riferiscono ad un profilo della serie 6, il quale appartiene perciò alla famiglia dei cosiddetti profili laminari; riconosciamo il fatto che il profilo sia laminare dal particolare andamento della polare nella zona A (si veda figura 5) detta sacca di laminarità; i vantaggi pratici di un profilo costruito per mantenere il più possibile condizioni di flusso laminare sulla superficie e quindi di avere in una certa regione valori più bassi del C_D, sono tutt'oggi in discussione: quando infatti installiamo il profilo su un ala, è piuttosto difficile (per diversi motivi) che si riescano a mantenere condizioni di laminarità del flusso così come viene realizzato in galleria del vento (dove vengono fatte le misure riportate in figura 5); teniamo inoltre presente che un profilo laminare, nel momento in cui si trovi al di fuori della sacca di laminarità, si comporta spesso in modo peggiore rispetto ad un profilo non laminare: dalla figura 5 si può notare che le cose non funzionano tanto bene per angoli d'attacco che si discostano da quelli di progetto; questo difetto è legato al fatto che quando su di un profilo non laminare si verifica la transizione a regime turbolento, tale flusso presenta una minor tendenza al distacco. Giudicando quindi le prestazioni di un profilo laminare dobbiamo tener conto che esiste non solo la resistenza di attrito (particolarmente bassa per un profilo laminare), ma anche la resistenza di forma, che aumenta nel momento in cui, a causa

della laminarità del flusso, finiamo per avere una scia a valle del profilo di dimensione maggiore di quella che avremmo nel caso di un flusso turbolento.

2.4 - DIPENDENZA DELLA POLARE DEL PROFILO DAL NUMERO DI REYNOLDS

I grafici riportati in figura 5 sono, come detto, rappresentativi di famiglie di curve che hanno come parametro, tra l'altro, il numero di Reynolds; noi non considereremo mai la dipendenza dei parametri di volo da *Re*, ma l'effetto è comunque presente e vale la pena di citarlo. Quando si parla di effetti di *Re* sulle caratteristiche aerodinamiche di un profilo, ci si riferisce immediatamente ad un parametro che risulta fortemente influenzato, il C_L massimo, il quale aumenta all'aumentare di *Re*, mentre il resto della retta di portanza non risulta modificato.

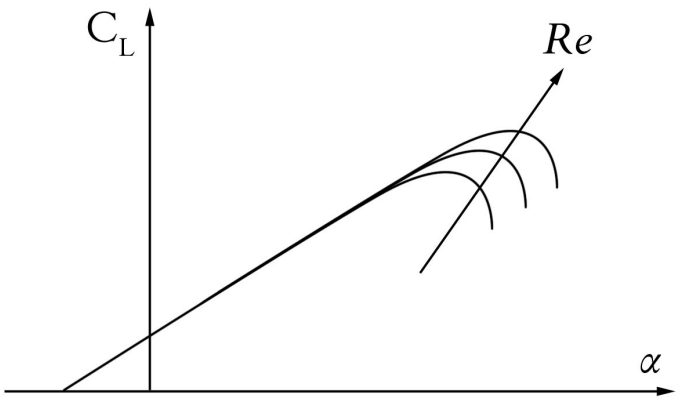


Figura 9

L'aumento del C_L con l'aumentare del numero di Reynolds è dovuto al fatto che il numero di Reynolds rappresenta il rapporto tra forze d'inerzia e forze viscose: tanto maggiore è *Re* e tanto sarà minore nel flusso l'importanza delle forze viscose, le quali sono responsabili della separazione; perciò tanto maggiore è *Re* e tanto più la viscosità conta sempre meno, avvicinando il fluido ad un fluido ideale. Questo effetto sullo strato limite è presente anche nell'andamento del C_D: qualcosa è visibile sul grafico in figura 5, dove osserviamo l'effetto del numero di Reynolds sulle diverse polari; ciò che dobbiamo aspettarci all'aumentare del numero di Reynolds è una certa diminuzione del C_D a parità di angolo d'attacco.

2.5 - CENTRO AERODINAMICO E CENTRO DI PRESSIONE

Le definizioni di centro aerodinamico e di centro di pressione sono abbastanza importanti, perciò soffermiamoci sul loro significato, in quanto tali definizioni ci saranno utili in avanti. Del centro aerodinamico abbiamo già parlato nel § 2.2; il centro di pressione rappresenta il punto di applicazione delle forze aerodinamiche sul profilo. Sappiamo anche che nel caso in cui il profilo non sia simmetrico (cioè possiederà una curvatura), il centro di pressione si sposta al variare dell'angolo d'attacco: richiamiamo gli aspetti fondamentali di questo problema. Supponiamo di far riferimento a delle misure sperimentali che abbiano proprio come obbiettivo la determinazione della legge di variazione della posizione del centro di pressione rispetto all'angolo di incidenza; le forze in gioco saranno la portanza e la resistenza e tali forze saranno applicate in una certa posizione x_{CP} riferita per esempio al bordo d'attacco del profilo.

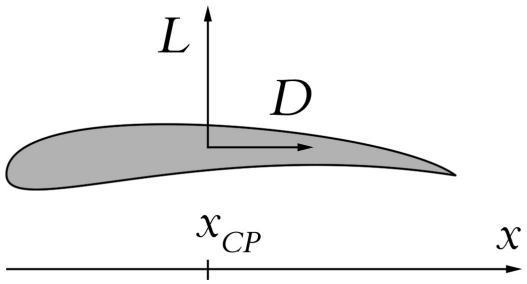


Figura 10

Supponiamo inoltre di misurare il momento aerodinamico rispetto ad un generico punto posto ad una distanza x dal bordo d'attacco; trascurando il contributo dato dalla resistenza (che sarà un termine piccolo rispetto alla portanza) possiamo scrivere

$$M_x = -L(x_{CP} - x)$$

osserviamo come M_x sia picchiante, quindi, date le nostre convenzioni, è necessario il segno *meno* davanti alla formula. In termini di coefficienti aerodinamici, la formula precedente diventa, dividendo per $\frac{1}{2}\varrho V^2 c^2$

$$C_{Mx} = -C_L\left(\frac{x_{CP}}{c} - \frac{x}{c}\right)$$

dove c è la corda del profilo. Misurati C_L e C_{Mx} (quest'ultimo, dato che x è generico, è funzione dell'angolo d'attacco, ossia del C_L) possiamo impiegare la formula del C_{Mx} per esprimere l'ascissa del centro di pressione

$$\frac{x_{CP}}{c} = \frac{x}{c} - \frac{C_{Mx}}{C_L} = \frac{x}{c} - \frac{C_{Mx}(\alpha)}{C_L(\alpha)}.$$

Abbiamo adesso tutti gli elementi per tracciare la relazione che lega la posizione del centro di pressione all'angolo d'attacco, ossia al coefficiente di portanza. L'andamento sperimentale è il seguente:

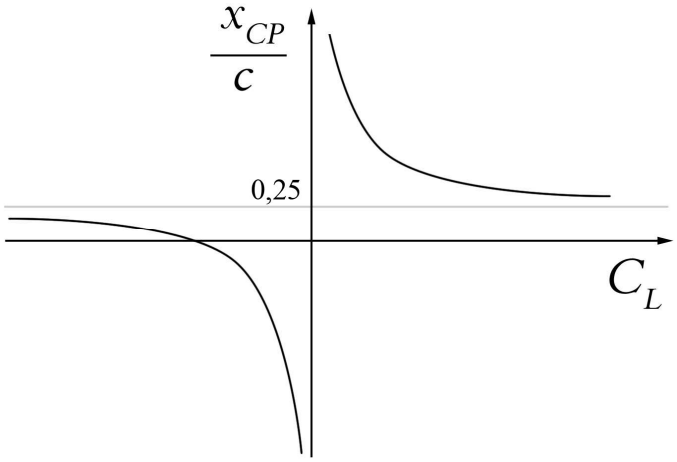


Figura 11

All'aumentare del C_L il centro di pressione tende asintoticamente ad una posizione che si colloca all'incirca al 25 % della corda; al tendere a zero del C_L, il centro di pressione tende a spostarsi sempre più a valle, finendo molto presto fuori dal profilo. Il tipo di relazione trovata ci suggerisce di utilizzare una rappresentazione diversa: proviamo infatti a descrivere la stessa legge su di un grafico nel quale in ascissa abbiamo $1/C_L$ al posto di C_L

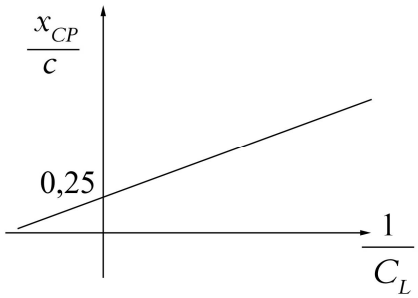


Figura 12

Come vediamo, in tale rappresentazione otteniamo una retta, che possiamo esprimere con un'equazione del tipo

$$\frac{x_{CP}}{c} = a + b\left(\frac{1}{C_L}\right)$$

confrontando tale relazione con quella ottenuta precedentemente, si nota che dal punto di vista fisico la costante *a* corrisponde ad un'ascissa non dimensionale ed infatti rappresenta l'intercetta di tale retta con l'asse delle ordinate ed avrà un valore molto prossimo a 0,25; in maniera analoga si nota che *b* deve corrispondere ad un coefficiente di momento, calcolato rispetto a quel punto posto circa al 25 % della corda. In conseguenza di ciò possiamo equivalentemente scrivere l'espressione precedente come

$$\frac{x_{CP}}{c} = \frac{x_{CA}}{c} - \left(\frac{C_{M_{CA}}}{C_L}\right)$$

Con ciò abbiamo osservato sperimentalmente che deve esistere un punto sul profilo tale che il momento calcolato rispetto ad esso non vari al variare dell'angolo d'attacco; questo particolare punto, collocato al 25% della corda, prende il nome di *centro aerodinamico del profilo*. Dalle precedenti relazioni otteniamo

$$\frac{x_{CP}}{c} = \frac{x}{c} - \frac{C_{Mx}}{C_L} = \frac{x_{CA}}{c} - \frac{C_{M_{CA}}}{C_L}$$

e questa equazione tornerà utile anzitutto quando vorremo determinare esattamente l'ascissa del centro aerodinamico, perché ricaviamo facilmente

$$\frac{x_{CA}}{c} = \frac{x}{c} - \frac{C_M - C_{M_{CA}}}{C_L}$$

perciò, se conosciamo l'andamento di $C_{Mx}(C_L)$ siamo in grado di determinare esattamente la posizione del centro aerodinamico. Osserviamo inoltre come la relazione trovata possa essere scritta come

$$\frac{x_{CA}}{c} = \frac{x}{c} - \frac{dC_{Mx}}{dC_L}$$

da cui

$$\frac{dC_{Mx}}{dC_L} = \frac{x - x_{CA}}{c}$$

che esprime la derivata del coefficiente di momento rispetto al coefficiente di portanza (o dell'angolo d'attacco, dato che i due valori sono proporzionali) come differenza tra la posizione del punto rispetto al quale si è calcolato il momento stesso e la posizione del centro aerodinamico. Tale relazione rappresenterà un'informazione fondamentale quando parleremo della stabilità statica longitudinale del velivolo.

2.6 - VARIAZIONE DELLA POSIZIONE DEL CENTRO DI PRESSIONE AL VARIARE DELL'ANGOLO D'ATTACCO

Dai grafici del § precedente abbiamo notato come il centro di pressione si sposta in avanti e tende al centro aerodinamico quando l'angolo d'attacco aumenta, mentre si sposta verso valle quando l'angolo d'attacco diminuisce e raggiunge abbastanza rapidamente una posizione che si colloca al di fuori del profilo: vale la pena di mettere a fuoco tale fenomeno.

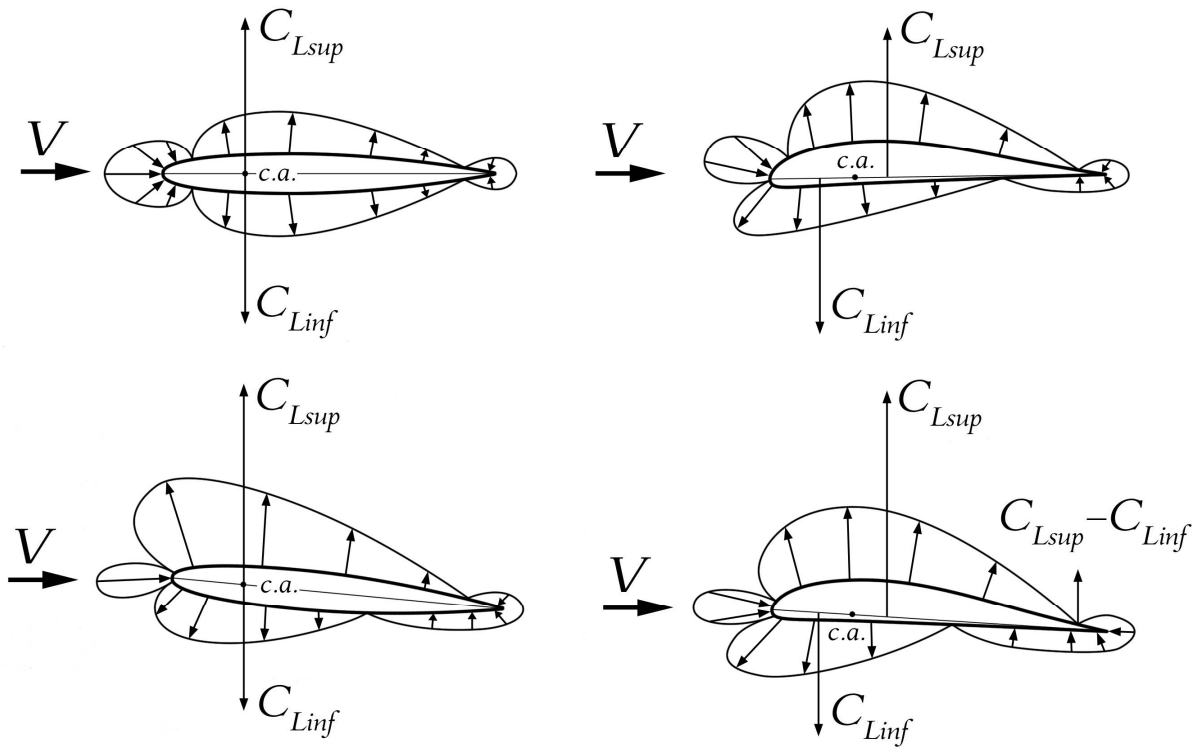


Figura 13

In figura 13 abbiamo quattro andamenti del C_P (coefficiente di pressione) relativi rispettivamente ad un profilo simmetrico ad incidenza di portanza nulla (in alto a sinistra), ad un profilo simmetrico ad incidenza positiva (in basso a sinistra), ad un profilo non simmetri-

co ad incidenza di portanza nulla (in alto a destra) ed infine ad un profilo non simmetrico ad incidenza positiva (in basso a destra). Nel caso del profilo simmetrico (cioè per entrambi i profili a sinistra) il C_M rispetto al centro aerodinamico è per definizione nullo, mentre nel caso del profilo non simmetrico (cioè per entrambi i profili a destra) è diverso da zero ed in particolare picchiante, trattandosi di un profilo a curvatura positiva. Analizziamo ora gli andamenti del C_P relativi ai due profili in alto, cioè ai due profili simmetrico ed asimmetrico ad incidenza di portanza nulla. Per quanto riguarda il profilo simmetrico, la distribuzione di pressione è simmetrica, perciò il coefficiente di portanza totale è nullo; inoltre la forza aerodinamica nella parte superiore e quella nella parte inferiore del profilo, sono applicate nello stesso punto, che è il centro aerodinamico, perciò il coefficiènte di momento è nullo. Per il profilo non simmetrico, invece, la distribuzione di pressione non è simmetrica perciò, pur essendo nullo il coefficiente di portanza totale, in quanto il profilo si trova orientato secondo l'asse di portanza nulla, le due risultanti di forza aerodinamica sul dorso e sul ventre del profilo non sono applicate nello stesso punto: abbiamo dunque un momento rispetto al centro aerodinamico.

Passiamo ora ad analizzare gli andamenti del C_P relativi ai due profili in basso, cioè ai due profili, simmetrico ed asimmetrico ad incidenza positiva; per il profilo simmetrico osserviamo come la distribuzione di pressione non sia più simmetrica tra dorso e ventre ed il profilo generi portanza essendo maggiore il $C_{L_{sup}}$, ma il punto di applicazione della forza aerodinamica sia sul dorso che sul ventre è sempre il centro aerodinamico e quindi il momento rispetto a tale punto si mantiene ancora pari a zero; per quanto riguarda invece il profilo non simmetrico, abbiamo la risultante della forza aerodinamica sul dorso e sul ventre applicate ancora in punti diversi, per questo oltre al C_L anche il C_M resta diverso da zero.

Scopriamo perché la posizione del centro di pressione tende all'infinito nel momento in cui il coefficiente di portanza tende a zero; la spiegazione risiede nel fatto che noi rappresentiamo una coppa (si faceva riferimento al profilo asimmetrico) come una forza risultante per un braccio; ma tale coppia si mantiene finita e diversa da zero anche quando (si veda la figura in alto a destra) la forza risultante, somma della portanza tra superficie superiore ed inferiore del profilo, tende a zero, per cui necessariamente il braccio deve tendere all'infinito. In altre parole il problema è che noi rappresentiamo una coppia aerodinamica costante e diversa da zero come il prodotto di una forza per un braccio; se la coppia aerodinamica deve rimanere costante al variare dell'angolo d'attacco (si ricordi la definizione di centro aerodinamico), quando questo tende a zero, il braccio deve tendere all'infinito.

La presenza sul profilo di due punti particolari come il centro aerodinamico ed il centro di pressione porta a definire due schemi mediante i quali poter rappresentare le azioni aerodinamiche sul profilo stesso; nel primo schema la risultante delle forze aerodinamiche (cioè la somma di portanza e resistenza) di un profilo con una certa incidenza è applicata nel centro di pressione:

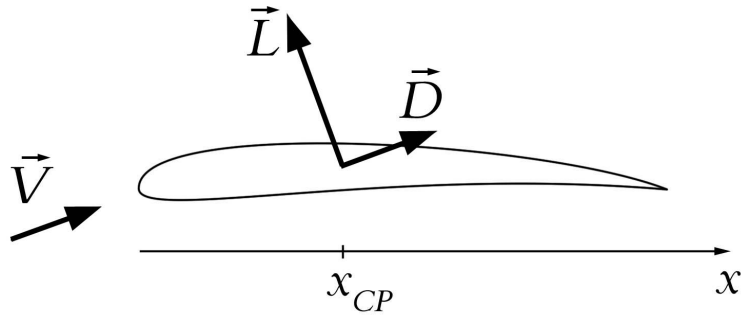


Figura 14

al variare dell'incidenza osserviamo una variazione di portanza e resistenza in direzione ed intensità, ma anche una variazione della posizione del centro di pressione.

Nell'ambito della meccanica del volo si utilizza invece uno schema riferito ad una forza aerodinamica applicata in corrispondenza del centro aerodinamico ed in più anche un momento rispetto al centro aerodinamico.

In definitiva cioè riduciamo il sistema di forze agenti sul profilo in modo che si abbiano portanza e resistenza variabili in direzione ed intensità al variare dell'angolo d'attacco, applicate però nel centro aerodinamico e quindi in un punto fisso del profilo ed inoltre, come detto, è anche presente un momento rispetto al centro aerodinamico, il quale, per definizione di centro aerodinamico, non varia al variare di α.

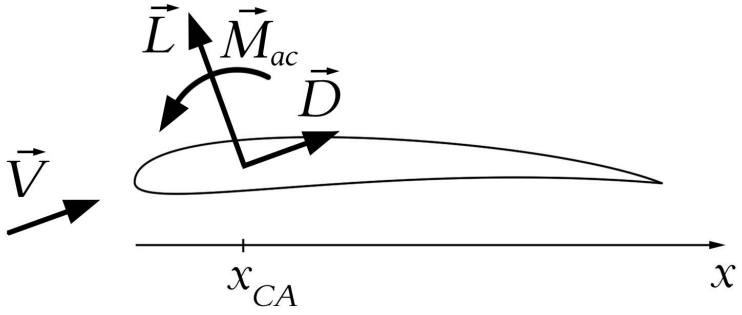


Figura 15

2.7 - STABILITÀ DEL PROFILO

Gli schemi, ed in particolare il secondo, visti nel § precedente, ci permettono di fare subito delle considerazioni preliminari interessanti sulla stabilità del profilo: dimostriamo, e questo sarà un primo esempio di applicazione del concetto di stabilità statica, che un profilo *incernierato anteriormente al centro aerodinamico* (ora vedremo cosa significa) rappresenta una configurazione stabile dal punto di vista statico. Consideriamo un profilo a curvatura positiva e ad un certo angolo d'attacco; rappresentiamo nel modo visto la forza aerodinamica, quindi portanza e resistenza applicate al centro aerodinamico di profilo, e supponiamo

che tale profilo sia centrato in una posizione anteriore al centro aerodinamico stesso, ovvero sia vincolato nella posizione di figura 16; supponiamo inoltre che l'equilibrio di tutto il sistema sia stato opportunamente realizzato, per esempio applicando una forza *F*, per quel valore dell'angolo d'attacco.

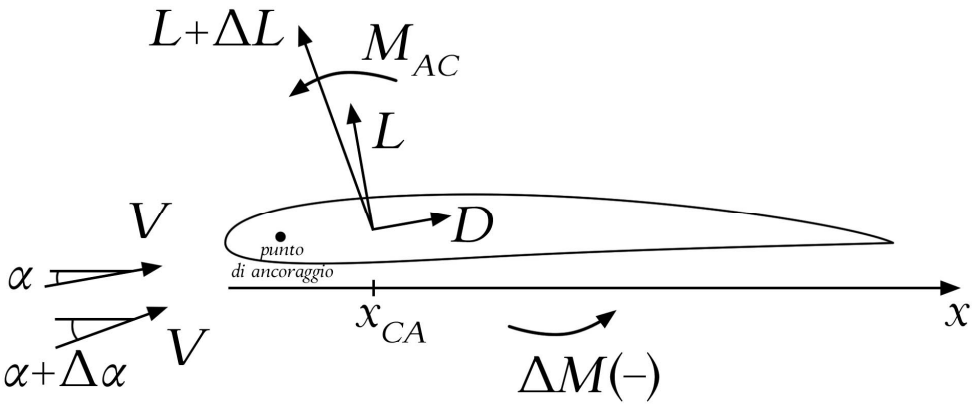


Figura 16

Consideriamo la stabilità statica: supponiamo che per un qualche motivo aumenti l'angolo d'attacco di un certo $\Delta\alpha$ e verifichiamo quale sia la reazione del profilo. Per effetto della variazione di incidenza, trascurando il contributo della resistenza al momento, avremo un vettore di portanza $L+\Delta L$ ruotato in avanti rispetto al profilo, mentre, per definizione, sia il centro aerodinamico che il momento rispetto al centro aerodinamico non cambiano; il risultato è che il sistema sviluppa un momento ΔM picchiante il quale tende a riportare l'incidenza al valore iniziale: il sistema è staticamente stabile.

Il discorso cambia se il punto di vincolo si trova posteriormente rispetto al centro aerodinamico: se difatti il profilo è centrato a valle del centro aerodinamico un aumento di incidenza produce un momento di segno opposto a quello visto prima, perciò in questo secondo caso ci si trova in una situazione di instabilità statica. Vedremo poi come, per il velivolo completo, tali concetti valgano praticamente allo stesso modo.

2.8 - DIPENDENZA DELLE CARATTERISTICHE AERODINAMICHE DAL NUMERO DI MACH

Sappiamo che il numero di Mach ha una notevolissima influenza sulle caratteristiche aerodinamiche di un profilo e quindi di un'ala; limitiamoci a tracciare degli andamenti qualitativi delle grandezze aerodinamiche di maggior interesse per quanto riguarda il profilo, in

funzione appunto del numero di Mach. Partiamo dai coefficienti di portanza e di resistenza, il cui andamento qualitativo è quello di figura 17.

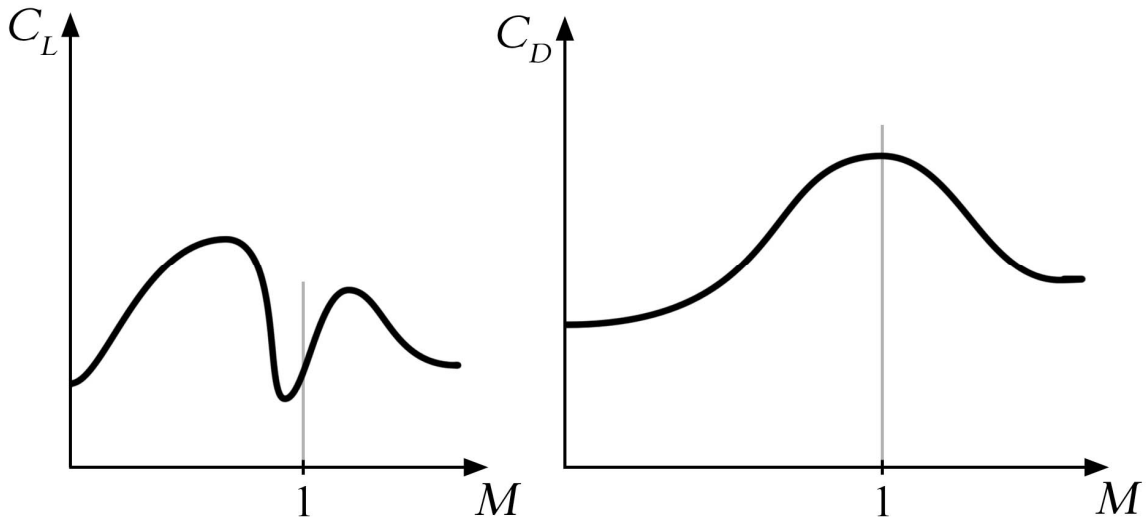


Figura 17

Si ha cioè un aumento del C_L sino a che non si entri in regime transonico, nel quale si ha invece una brusca e rilevante diminuzione e poi un nuovo aumento; ricordiamo che tale andamento è causato dall'insorgere di onde d'urto sulle superfici superiore ed inferiore del profilo le quali interagiscono con lo strato limite. Per quanto riguarda il coefficiente di resistenza, abbiamo un valore inizialmente costante, poi un notevole aumento ed infine una leggera diminuzione che fissa il C_D ad un valore costante un po' superiore a quello che si aveva un regime subsonico. Si tenga presente che tutto ciò vale ad angolo d'attacco costante.

Molto interessante è anche la variazione della posizione del centro aerodinamico al variare del numero di Mach; l'effetto del numero di Mach è un arretramento di tale punto. Un andamento qualitativo che mette in evidenza alcuni aspetti importanti, è quello rappresentato dalla figura 18, dalla quale si nota come il centro aerodinamico parta da una posizione prossima al 25% della corda, che si manterrà più o meno costante sino ad un valore del numero di Mach intorno a 0,75 (con dipendenza dalle caratteristiche geometriche del profilo), per arrivare poi, attraverso un andamento piuttosto brusco, ad un valore intorno al 50% della corda quando si entri in regime supersonico.

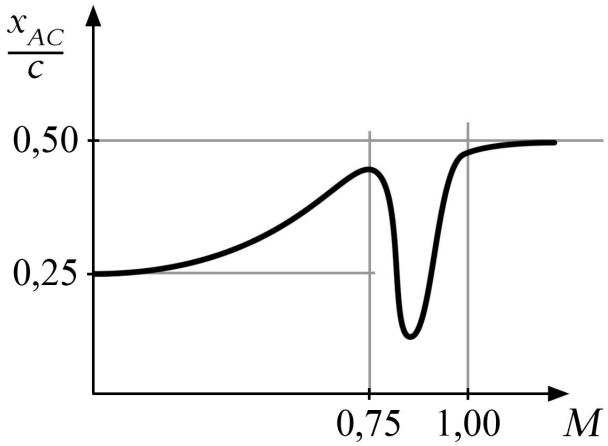


Figura 18

Quest'ultimo aspetto è molto importante in meccanica del volo, perché, come si è visto, la posizione del centro aerodinamico ha un effetto sulle caratteristiche di stabilità statica del profilo; il grafico di figura 18 (si ricorda che tale grafico è del tutto qualitativo) mette in evidenza come la variazione della posizione del centro aerodinamico in regime transonico sia estremamente irregolare e non facilmente prevedibile con studi teorici; se dunque lo scopo è di soddisfare certi requisiti di stabilità, farlo in regime transonico è tutt'altro che agevole.

2.9 - EFFICIENZA AERODINAMICA

L'ultimo parametro aerodinamico importante di cui ci occupiamo è la cosiddetta efficienza aerodinamica (si veda figura 19): per definizione essa è data da

$$E = \frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D}$$

e caratterizza, come vedremo, molte prestazioni del velivolo, perciò fondamentale nello studio delle caratteristiche di volo.

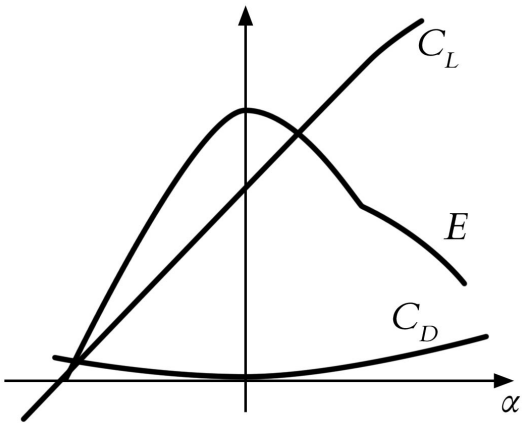


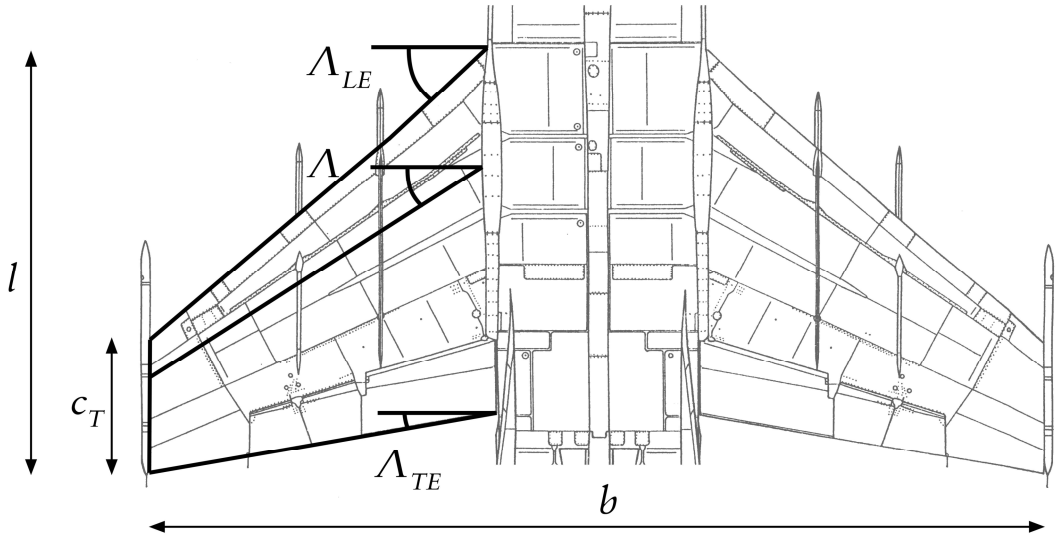
Figura 19

Il grafico rappresenta l'andamento di C_L, C_D ed E in funzione dell'angolo d'attacco; quello che è interessante ricordare è come in genere l'efficienza aerodinamica abbia una variazione notevole al variare di α, con una legge che è inizialmente crescente fino ad un valore massimo in corrispondenza di un valore dell'incidenza piuttosto piccolo (nel caso del profilo in considerazione tale valore è 0°), per poi decrescere.

2.10 - ALA FINITA: CARATTERISTICHE GEOMETRICHE

Non ristudieremo le caratteristiche aerodinamiche dell'ala finita, ma richiameremo, come abbiamo fatto per il profilo, gli elementi più importanti per quello che riguarderà poi l'applicazione di tali concetti alla meccanica del volo. Quello che troviamo in figura 20 è lo schema di un'ala detta *trapezia*. Evidenziamo anzitutto i parametri geometrici mediante i quali viene rappresentata un'ala finita

- SUPERFICIE ALARE: indicata con S e rappresenta l'area dell'ala.
- APERTURA ALARE: indicata con b e rappresenta la distanza tra le estremità alari.
- ALLUNGAMENTO ALARE: è definito come il rapporto tra il quadrato dell'apertura alare e la superficie alare ed è indicato con $A = \frac{b^2}{S} \propto \frac{b}{l}$.
- ANGOLO DI FRECCIA: indicato con Λ, nella sua forma più semplice è l'angolo formato tra un asse ortogonale al piano di simmetria e la linea che unisce i quarti delle corde dei profili alari.
- RAPPORTO DI RASTREMAZIONE: è definito come il rapporto tra la corda all'estremità e la corda alla radice, lo si indica con $\lambda = \frac{c_T}{c_R}$ dove appunto c_T è la corda all'estremità (*tip chord*) e c_R è la corda alla radice (*root chord*, indicata anche con l, come in figura).



Ala di un MiG-25PDS - Figura 19

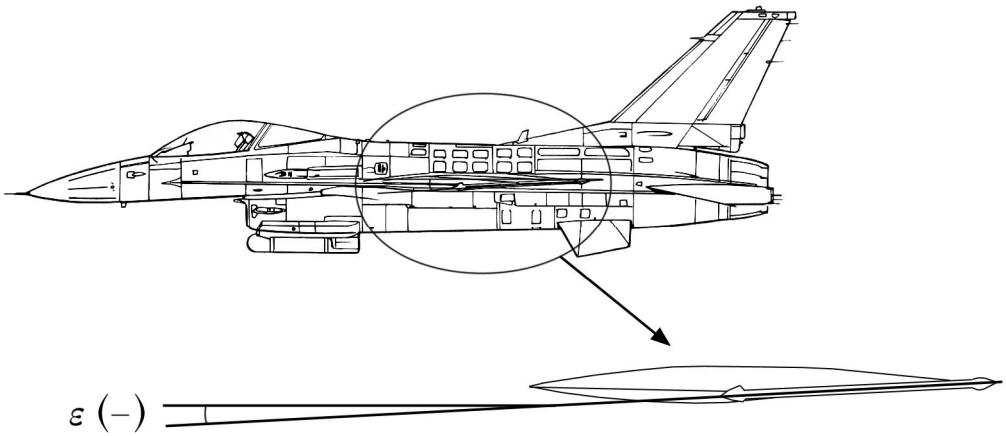
- ANGOLO DI SVERGOLAMENTO: indicato con ε, è l'angolo di cui è ruotata una direzione caratteristica (ad esempio la corda) della sezione di estremità rispetto alla sezione di radice dell'ala. La sezione all'estremità è sempre ruotata verso il basso rispetto alla sezione alla radice e questo implica il fatto che l'angolo di svergolamento sia negativo. In figura 21 è mostrato un esempio di svergolamento.
- ANGOLO DIEDRO: importante per le caratteristiche di stabilità statica laterodirezionale del velivolo, lo indichiamo con Δ e possiamo definirlo come il complementare dell'angolo δ formato dal piano della semiala con il piano di simmetria del velivolo. In figura 22b si evidenzia un angolo di diedro negativo.
- CORDA MEDIA AERODINAMICA: in genere le grandezze aerodinamiche vengono rese non dimensionali rispetto alla corda media aerodinamica, che indichiamo con $\overline{c}$ o con *m.a.c.* (*mean aerodynamic chord*); per definizione la corda media è data da

$$\overline{c} = m.a.c. = \frac{1}{S}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} c(y)\cdot c(y)\,dy$$

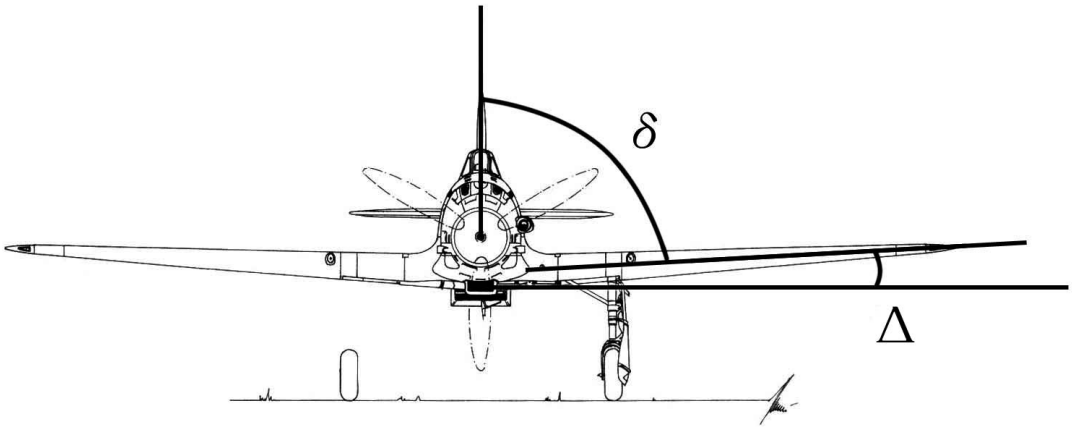
ossia (si noti la funzione integranda) si determina un valore medio della corda pesato rispetto alla superficie infinitesima sottesa da ciascuna corda; supponiamo cioè di avere una semiala e fissiamo l'attenzione su una generica ascissa y; sia $c(y)$ il valore della corda corrispondente a quella stazione lungo l'apertura possiamo pesare tale valore della corda con l'elemento d'area $c(y)dy$ da essa sottesa.

Per rendere adimensionali i coefficienti aerodinamici si può usare, ma lo si fa molto raramente, una corda di riferimento definita come $\overline{c} = \frac{S}{b}$, che rappresenta dunque una quantità puramente geometrica.

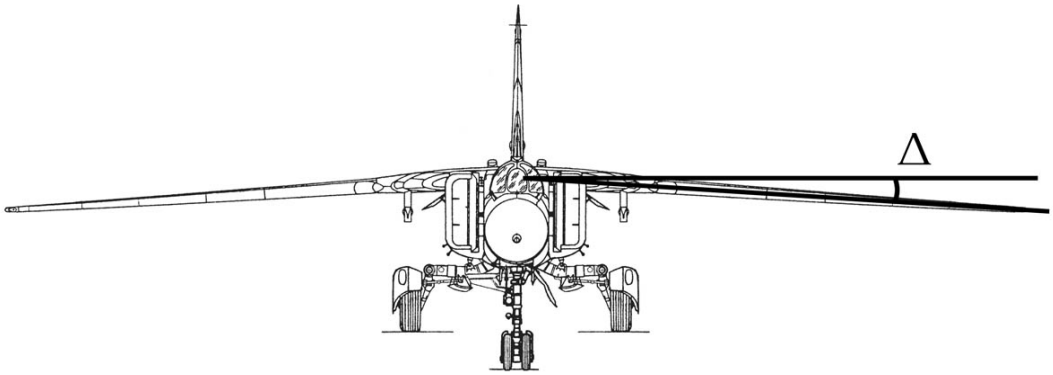
Verifichiamo gli effetti principali di tali parametri sulle caratteristiche aerodinamiche dell'ala.



Svergolamento alare di un F-16C block 30 - Figura 21



Angolo diedro positivo di un MC.202 Folgore - Figura 22a



Angolo diedro negativo di un MiG-23M - Figura 22b

2.11 - EFFETTO DELL'ALLUNGAMENTO ALARE

L'allungamento alare, che è un parametro che distingue il profilo dall'ala finita, ha un effetto sulla resistenza ed in particolare sul coefficiente di resistenza indotta[2], che, nel caso dell'ala ellittica, è dato dalla relazione

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A}$$

dalla quale si deduce che maggiore è l'allungamento e minore sarà la resistenza indotta.

Un effetto dell'allungamento influirà anche sul coefficiente di portanza massimo; supponiamo infatti di voler esprimere, sempre nel caso più semplice possibile di ala ellittica, il coefficiente di portanza totale dell'ala in funzione della pendenza della retta di portanza dei profili che costituiscono l'ala. Consideriamo quindi un'ala ellittica e supponiamo che abbia tutta lo stesso tipo di profilo: il C_L totale di quest'ala potrà essere espresso mediante la relazione

$$C_L = C_{L\alpha}(\alpha_0 - \alpha_i) = C_{L\alpha}\left(\alpha_0 - \frac{C_L}{\pi A}\right) = C_{L\alpha}\alpha_0 - C_{L\alpha}\frac{C_L}{\pi A}$$

dove α_0 è l'incidenza geometrica, mentre α_i è l'incidenza indotta; quindi nessuna sezione lavora ad incidenza geometrica, dato che si deve tener conto delle componenti di velocità indotte dal sistema vorticoso a staffa, le quali producono una riduzione dell'angolo

[2] La resistenza indotta è la resistenza prodotta dalla incidenza indotta.

d'attacco, espressa nel caso dell'ala ellittica attraverso una costante al variare dell'apertura e pari a $\frac{C_L}{\pi A}$. Mettendo in evidenza il C_L, otteniamo

$$C_L\left(1+\frac{C_{L\alpha}}{\pi A}\right)=C_{L\alpha}\alpha_0$$

che possiamo riscrivere come

$$C_L=\frac{C_{L\alpha}\alpha_0}{1+\frac{C_{L\alpha}}{\pi A}}=\bar{C}_{L_\alpha}\alpha_0$$

dove per definizione $\bar{C}_{L_\alpha}=\frac{dC_L}{d\alpha_0}$ rappresenta la pendenza della retta di portanza dell'ala finita, che in base all'espressione appena descritta ha la forma

$$\bar{C}_{L_\alpha}=\frac{C_{L_\alpha}}{1+\frac{C_{L\alpha}}{\pi A}}$$

e che è proprio la relazione che volevamo evidenziare, perché rappresenta il secondo effetto fondamentale dell'allungamento alare sulle caratteristiche aerodinamiche dell'ala: tale relazione (valida per un'altra ellittica, ma che contiene comunque i concetti che qui ci interessa discutere) si nota che per valori molto elevati dell'allungamento alare, il $\overline{C_{L\alpha}}$ dell'ala finita tenderà al $C_{L\alpha}$ del profilo; inoltre tanto minore è l'allungamento dell'ala e tanto più risulterà diminuita la pendenza della retta di portanza dell'ala stessa

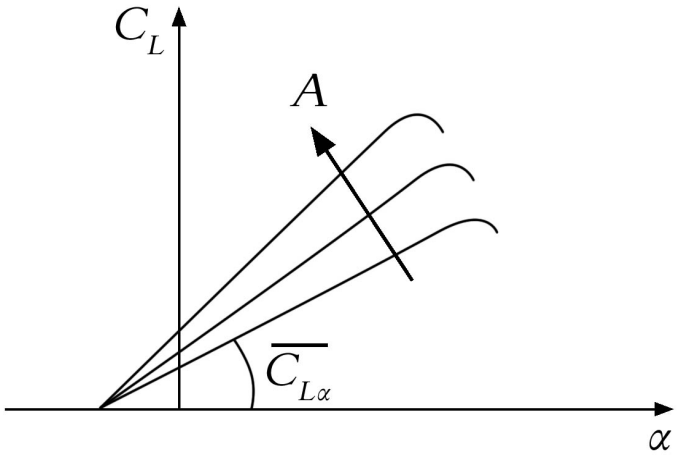


Figura 24

Valori di allungamento alare caratteristici dei velivoli che oggi si incontrano vanno da 2-3 per i supersonici da combattimento, a circa 7 per i commerciali da trasporto, sino ad arrivare a 20-30 per gli alianti, nei quali è di fondamentale importanza tenere al minimo la resistenza complessiva della configurazione. È chiaro che se dobbiamo progettare un velivolo supersonico, nel momento in cui voli ad alta velocità a $M > 1$, il coefficiente di portanza sarà certamente ridotto e l'angolo d'attacco sarà basso, quindi la resistenza indotta in quelle condizioni di volo e di progetto non è certamente un problema: sarà dunque meglio prendersi tutti i vantaggi (per esempio di tipo strutturale) di un'ala con allungamento alare piuttosto basso; se invece dobbiamo progettare un aliante è importantissimo che la resistenza complessiva sia bassa e quindi realizzeremo ali con allungamenti molto elevati.

2.12 - EFFETTO DELLA FORMA IN PIANTA

Un altro elemento importantissimo nelle caratteristiche di un'ala è ciò che chiamiamo forma in pianta; essa è un parametro fondamentale, tanto che guardando la forma in pianta delle ali dei velivoli, troviamo serie piuttosto vaste di forme. Mettiamo dunque a fuoco almeno uno degli aspetti che intervengono in questo discorso: confrontiamo le caratteristiche aerodinamiche di un'ala con forma in pianta ellittica (cioè con distribuzione ellittica della corda), di un'ala di forma rettangolare (cioè con distribuzione costante della corda) e di u-

n'ala rastremata (nella quale cioè $\lambda < 1$), ed effettuiamo il confronto sulla base della distribuzione della circolazione[3] locale lungo l'apertura[4]

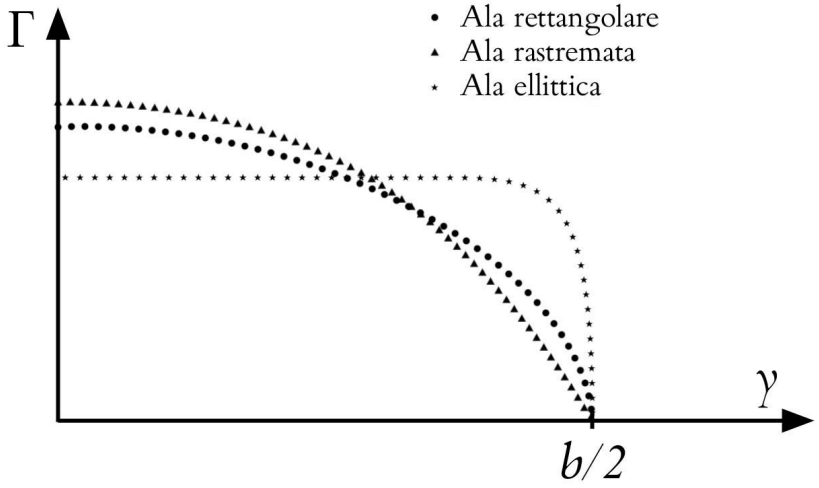


Figura 25

L'area sottesa dalle tre curve è la stessa. Sappiamo dall'aerodinamica che la distribuzione di circolazione su un'ala ellittica varia con legge ellittica; per un'ala a pianta rettangolare avente le stesse caratteristiche di allungamento e di superficie, possiamo invece aspettarci un andamento in prima approssimazione costante per una certa regione lungo l'apertura e poi, abbastanza bruscamente, una netta diminuzione fino ad un valore nullo all'estremità dell'ala. Ricordando che la distribuzione ellittica della circolazione è quella che fornisce la minima resistenza indotta, possiamo subito confrontare queste due prime forme in pianta dicendo che sicuramente l'ala a pianta rettangolare presenterà un coefficiente di resistenza indotta maggiore di quello dell'ala a pianta ellittica. Prendiamo ora in considerazione il terzo tipo di forma in pianta, l'ala rastremata, e scegliamo un rapporto di rastremazione $\lambda = 0,3$ (valore caratteristico di quasi tutti i velivoli da trasporto); risolviamo il problema della determinazione della distribuzione della circolazione sull'ala con qualche metodo ed otteniamo una distribuzione molto prossima a quella di un'ala ellittica. Quindi rastremando l'ala riusciamo ad approssimare la distribuzione della circolazione di un'ala ellittica, con il vantaggio di ridurre la resistenza indotta (e di conseguenza quella totale) della configurazione. Se facessimo i conti con un allungamento alare ad esempio pari a 7, troveremmo una riduzione del 6% della resistenza indotta dell'ala rastremata rispetto all'ala rettangolare[5]; dunque l'ala viene rastremata soprattutto per minimizzare il coefficiente di resistenza della configurazione.

---

[3] La circolazione è definita come $\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{c}$.

[4] La resistenza indotta si calcola in base alla circolazione.

[5] Tale risultato è importante se teniamo conto che si riflette in un risparmio del 6 % sui consumi.

Sfortunatamente oltre a considerare cosa accada in termini di circolazione, è necessario verificare cosa accada in termini del coefficiente di portanza. Perciò ripetiamo il confronto sulla base della distribuzione del coefficiente di portanza locale lungo l'apertura dei vari profili che costituiscono l'ala; riportiamo in particolare il rapporto tra il coefficiente di portanza locale ed il coefficiente di portanza totale (cioè di tutta l'ala).

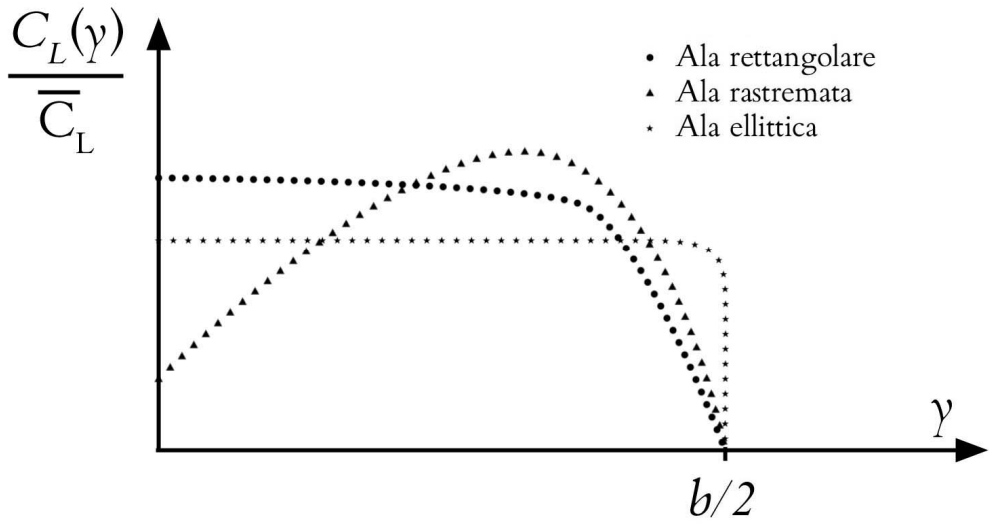


Figura 26

Ricordiamo anzitutto che tra il coefficiente di portanza locale e il valore della circolazione locale c'è una certa relazione: per definizione di portanza sviluppata da una sezione infinitesima di ala si ha

$$dL = \frac{1}{2}\varrho V^2 C_L(y)\, c(y)\, dy$$

ma possiamo esprimere lo stesso valore della portanza anche come

$$dL = \varrho V \Gamma(y)\, dy$$

e dal confronto tra le due espressioni appena scritte si ottiene

$$C_L(y) = \frac{2}{V}\frac{\Gamma(y)}{c(y)} = a\frac{\Gamma(y)}{c(y)}$$

con a coefficiente moltiplicativo pari a $\frac{2}{V}$.

Come vediamo dalla figura 26 per l'ala ellittica il coefficiente di portanza si mantiene costante lungo l'apertura ed è proprio pari al coefficiente di portanza medio dell'ala; nel caso dell'ala rettangolare ($c(y)$ costante), tenendo conto della espressione ricavata di C_L e della figura 25, a meno di una costante, la distribuzione della portanza sarà identica alla distribuzione di circolazione; quando infine abbiamo a che fare con un'ala rastremata, la corda va decrescendo all'aumentare dell'apertura e quindi l'andamento presenta un massimo in prossimità dell'estremità alare.

2.13 - CAMMINO DI STALLO DI UN'ALA RASTREMATA

Un'ala rastremata presenta dei valori maggiori di $C_L(y)$ in corrispondenza dell'estremità alare: questo è un effetto fortemente negativo di tale forma in pianta, che si manifesta in quello che viene chiamato *cammino di stallo dell'ala*. Dal cammino di stallo dell'ala si deduce sia il valore massimo del coefficiente di portanza dell'ala, una volta noto il coefficiente di portanza massimo del profilo, sia la posizione, lungo l'apertura alare, in cui il flusso inizia a separarsi. Poniamo il caso in cui l'ala sia realizzata tutta con lo stesso tipo di profilo e supponiamo di conoscere il valore del coefficiente di portanza massimo di tale profilo: analizziamo cosa succede alla distribuzione del coefficiente di portanza locale all'aumentare dell'angolo d'attacco, ossia all'aumentare del coefficiente di portanza totale dell'ala. Inizialmente avremo una certa curva relativa al valore C_L del coefficiente di portanza totale, la quale è tutta abbondantemente al di sotto del valore di $C_{L\max}$.

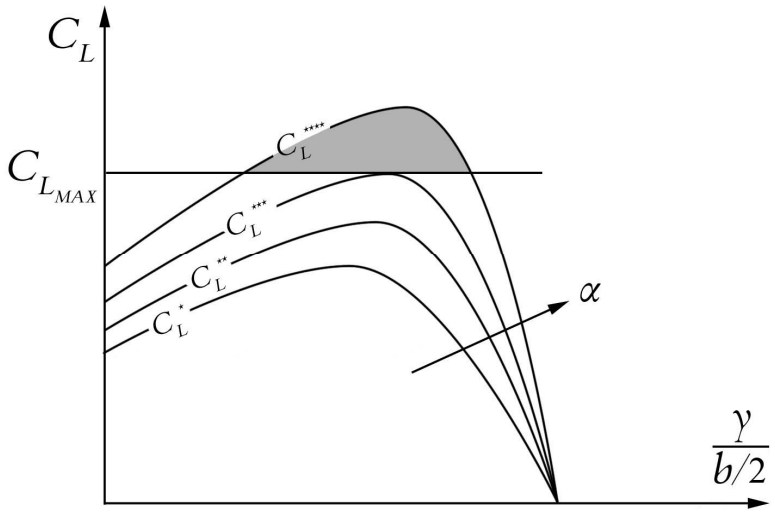
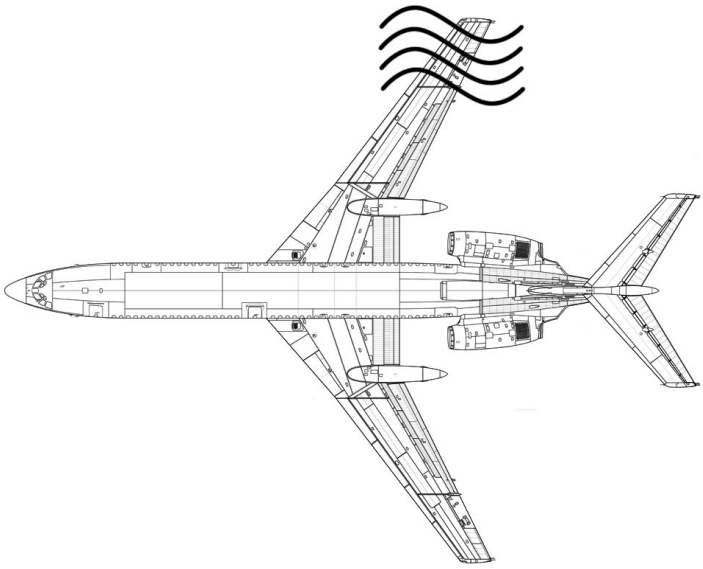


Figura 27

Aumentando l'angolo d'attacco con cui l'ala vola, la curva relativa alla distribuzione del coefficiente di portanza locale trasla verso l'alto, fino a che non si arrivi ad una situazione (in

figura 27 è la curva relativa al valore C_L^{***} del coefficiente di portanza totale) in cui il valore del coefficiente di portanza in una certa sezione lungo l'apertura risulta uguale al coefficiente di portanza massimo ammissibile da quel tipo di profilo. Tale tipo di ragionamento (che poi si traduce in certi metodi che si usano per determinare quantitativamente il cammino di stallo) ci consente di determinare il valore massimo del coefficiente di portanza dell'ala (che nell'esempio è pari al valore C_L^{***}). Se si aumenta l'angolo d'attacco si arriva ad una situazione (curva relativa al valore C_L^{****} del coefficiente totale dell'ala) in cui vi sarà tutta una regione (zona in grigio) in corrispondenza della quale il coefficiente di portanza locale supera il valore massimo ammissibile per quel tipo di profilo e l'ala risulta perciò in stallo in quella zona. Siamo inoltre in grado di determinare la posizione lungo l'apertura in corrispondenza della quale si avrà prima che altrove la separazione. L'ala rastremata dunque, presentando un valore maggiore del coefficiente di portanza locale verso le estremità, tenderà a stallare nelle regioni prossime all'estremità alare e questo è un aspetto certamente negativo, perlomeno per due motivi: consideriamo una vista in pianta del nostro velivolo e teniamo presente che la separazione, man mano che aumentiamo α, non avviene in modo esattamente simmetrico sulle due semiali.



Tupolev Tu-154B - Figura 28

Quello che perciò accade abitualmente è che il fenomeno della separazione si manifesta prima su di una semiala che sull'altra. Immaginiamo dunque che stalli per prima la regione all'estremità della semiala destra: ciò genera una forte asimmetria della portanza in quanto viene a mancare il contributo alla portanza stessa di tutta la zona che ha stallato ed inoltre tale zona si trova anche ad una notevole distanza dalla fusoliera; il risultato è un elevato (e quindi più difficilmente controllabile dal pilota) momento di rollio, che nel nostro esempio è positivo. C'è però un altro effetto: nelle regioni prossime all'estremità alare si collocano di

solito le superfici di controllo aerodinamico ed in particolare gli alettoni di bassa velocità. La separazione nella regione dell'ala in cui si trovano i controlli comporta una perdita di efficacia di tali superfici.

2.14 - EFFETTO DELLA FRECCIA

Il discorso sulle caratteristiche di stallo diventa ancora più delicato[6] quando abbiamo a che fare con un'ala a freccia. Cerchiamo prima di capire per quale motivo si dia un angolo di freccia: la ragione più rilevante è legata al numero di Mach della corrente all'infinito in corrispondenza del quale si ha sul profilo un punto sonico. Consideriamo un'ala a freccia e scomponiamo la velocità all'infinito in due componenti, di cui uno parallelo all'ala (che in prima approssimazione non produce effetti aerodinamici) e l'altra ortogonale al bordo d'attacco dell'ala (ed è quella che è responsabile del comportamento aerodinamico dell'ala stessa).

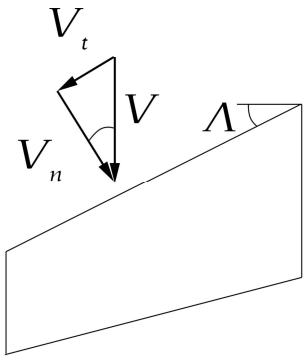


Figura 29

La formula più semplice che possiamo scrivere relativamente all'effetto dell'angolo di freccia sul numero di Mach critico è

$$M_{CR} = \frac{M_{CR}(\Lambda = 0)}{\cos \Lambda}$$

Se l'ala possiede un angolo di freccia avverranno dunque a velocità superiore tutti quegli effetti legati all'entrata del velivolo in regime transonico[7], quali l'aumento di resistenza, la diminuzione del coefficiente di portanza e lo spostamento del centro aerodinamico.

---

[6] E ciò giustifica certi apparati che troviamo sui velivoli moderni.

[7] Un 707 ad esempio ha un Mach di crociera di progetto pari a 0,84, che è un valore tipico dei moderni aerei da trasporto, ed un angolo di freccia di 30°-35° (anche questo è un valore tipico della maggior parte degli aerei da trasporto): il numero di Mach equivalente è dell'ordine di 0,65.

L'altro effetto aerodinamico rilevante dell'angolo di freccia lo presenta il $C_{L\alpha}$ dell'ala, il quale diminuisce all'aumentare di Λ secondo la legge

$$C_{L\alpha} = C_{L\alpha}(\Lambda = 0)\cos\Lambda$$

anche questo tipo di effetto può essere spiegato tenendo conto del fatto che solo una componente della velocità all'infinito contribuisce a generare azioni aerodinamiche sull'ala. Pertanto all'aumentare dell'angolo di freccia diminuisce la pendenza della retta di portanza e dunque, a parità di angolo d'attacco, sviluppiamo un valore minore del coefficiente di portanza[8].

L'ala a freccia presenta anche delle caratteristiche molto negative nel volo ad alta incidenza; è chiaro che per un aereo da trasporto non ci si preoccuperà troppo di avere delle buone prestazioni nel volo ad alta incidenza, però è fondamentale che esso possa volare in sicurezza ad incidenza elevata nelle fasi di volo in cui deve farlo, come ad esempio al decollo o all'atterraggio; tale problema pertanto non va sottovalutato in quanto tutti i velivoli da trasporto hanno ali a freccia (con $\Lambda = 30° - 35°$) e rastremate (con $\lambda = 0,3 - 0,4$). Dell'effetto negativo della rastremazione ne abbiamo già parlato nel § precedente; occupiamoci ora di capire perché anche l'angolo di freccia è una caratteristica negativa alle alte incidenze. Faremo due tipi di ragionamento: il primo rientra in un ambito di flusso potenziale, perciò non riguarda assolutamente la viscosità e l'aria reale. Tracciamo nuovamente l'andamento della circolazione in funzione della semiapertura alare per un'ala rettangolare a freccia nulla e per la stessa ala, alla quale però abbiamo dato un angolo di freccia, ad esempio mediante una rotazione attorno ad un certo punto fisso posto in corrispondenza del piano di simmetria del velivolo.

[8] Vi sono degli aerei da combattimento, con la possibilità di modificare la geometria alare, che sfruttano tale comportamento dell'ala a freccia in situazioni di volo che non sono certo a numeri di Mach supersonici, come ad esempio fasi di volo a bassissima distanza dal suolo, nelle quali è più conveniente volare con le ali tutte all'indietro, cioè con un angolo di freccia che sarebbe giustificato a valori del numero di Mach maggiori di uno: questo perché la riduzione della pendenza della retta di portanza che si ha come detto ad angoli di freccia elevati diminuisce, come vedremo più avanti, la sensibilità del velivolo alle perturbazioni atmosferiche, che sono presenti soprattutto a bassa quota. Esistono poi altri fattori legati alle deformazioni strutturali dell'ala, che fanno sì che in questo tipo di missione sia conveniente volare con angolo di freccia elevato.
Per quanto riguarda gli aerei che noi studieremo, l'aspetto certamente più importante è quello legato alla variazione del numero di Mach critico.

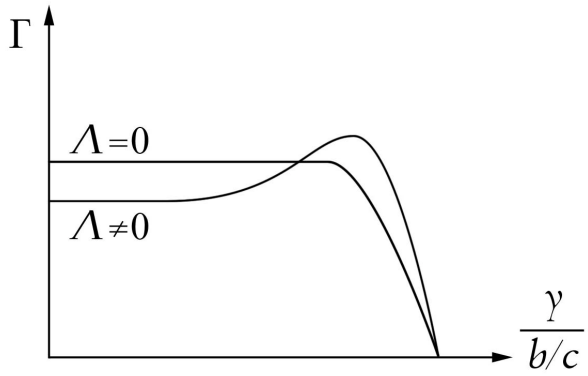


Figura 30

Teniamo di nuovo conto che l'area sottesa dalle due curve deve essere la stessa, perché la portanza totale delle due configurazioni deve essere la stessa. Il grafico, anche se qualitativo, mette in evidenza l'aspetto più importante, e cioè che la freccia produce un aumento di circolazione in corrispondenza dell'estremità alare. Cerchiamo di dare una spiegazione di tale comportamento, tenendo conto però che il fenomeno di cui ci stiamo occupando non è affatto semplice: immaginiamo che per effetto della rotazione dell'ala, sia aumentato tutto ciò che riguarda l'induzione delle velocità prodotte dal sistema vorticoso a staffa sull'ala stessa.

Quando passiamo dall'ala rettangolare all'ala a freccia, le componenti di velocità indotta nelle regioni interne dell'ala aumentano: possiamo infatti immaginare di schematizzare il vortice a staffa sull'ala a freccia come in figura 31, dalla quale si evince che la parte di vortice allineato con la corrente produce delle velocità indotte, le quali riducono l'incidenza locale delle sezioni interne all'ala. Quindi l'ala a freccia presenta una distribuzione di velocità indotte diversa da quella di un'ala con angolo di freccia nullo: il risultato è quello di diminuire localmente l'incidenza effettiva delle sezioni interne (cioè più vicine alla radice) dell'ala stessa. Pertanto la circolazione sulle sezioni più interne risulta diminuita, con il risultato che otterremo un andamento di $\Gamma(y)$ non molto dissimile da quello relativo ad un'ala rastremata e ciò fa sì che tutto quanto detto riguardo alle caratteristiche di stallo di un'ala rastremata può essere ribadito, più o meno allo stesso modo, per l'ala a freccia; se poi si tiene conto del fatto che in genere un'ala presenta sia un angolo di freccia che un rapporto di rastremazione, si capisce la complessità della questione.

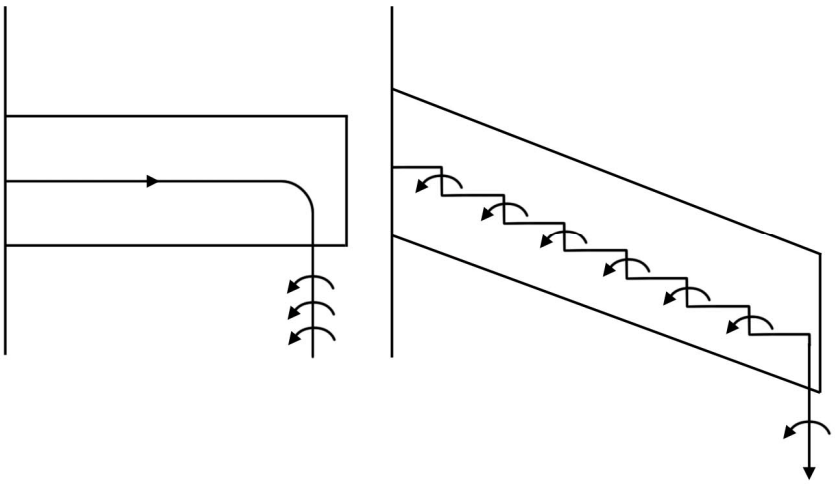


Figura 31

C'è però un altro elemento di cui dobbiamo tener conto, legato stavolta a fenomeni di viscosità: prendiamo in considerazione su un'ala a freccia due diverse sezioni, di cui una (che indichiamo come sezione 1) prossima alla radice ed una (che indichiamo come sezione 2) prossima all'estremità.

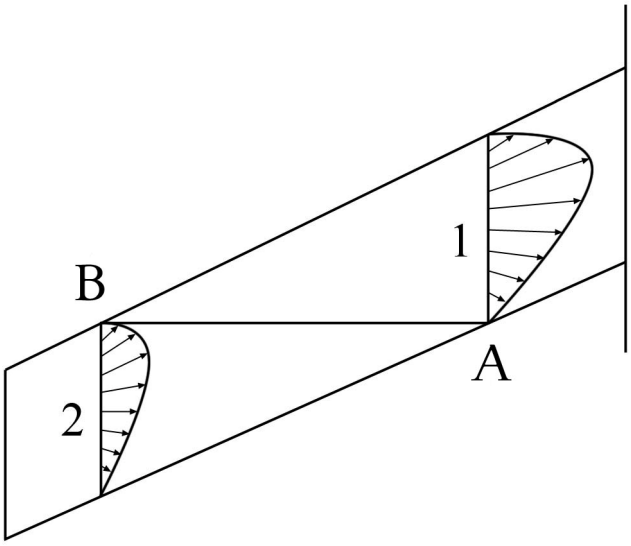


Figura 32

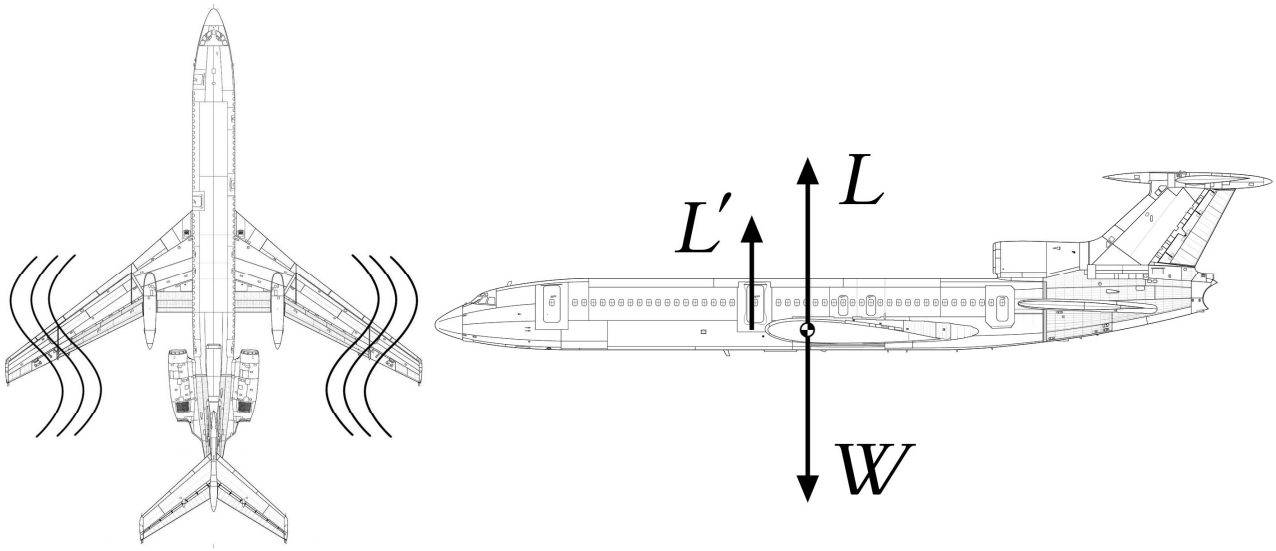
Poniamo la nostra attenzione sulla distribuzione del coefficiente di pressione sulla parte superiore dei profili corrispondenti alle due sezioni considerate; tracciamo a titolo indicativo una retta, ortogonale al piano di simmetria del velivolo, che individua i punti A e B rispettivamente sulle sezioni 1 e 2: se ci muoviamo su tale retta dal punto A al punto B, il coefficiente di pressione diminuisce (teniamo presente che sul dorso il profilo è decompresso) e tale diminuzione si traduce in componenti di velocità verso l'estremità dell'ala. Tali compo-

nenti sono importanti per l'effetto che hanno sullo strato limite, che è quello di trasportare flusso all'interno dello strato limite stesso verso l'estremità alare; questo non è un effetto positivo, perché le particelle all'interno dello strato limite sono in genere a basso contenuto energetico ed il fatto che tali particelle vengono trasportate verso l'estremità alare produce alla fine un ispessimento dello strato limite, proprio in corrispondenza dell'estremità dell'ala, che determina una maggior tendenza alla separazione e quindi un peggioramento delle caratteristiche di stallo, di tale regione.

2.15 - EFFETTO *NOSE-UP* DELL'ALA A FRECCIA

Esistono purtroppo ulteriori elementi che nel caso di un'ala a freccia rendono sfavorevole il fatto che la separazione possa avvenire in corrispondenza delle estremità alari. Abbiamo visto nel § 13 gli effetti dell'ala rastremata sui momenti di rollio e sulla perdita di efficacia delle superfici di controllo aerodinamico, che permangono nel caso dell'ala a freccia. Sono presenti inoltre altri aspetti che dobbiamo considerare. Esaminiamo quindi una configurazione con ala a freccia ed osserviamo cosa accada nel momento in cui le regioni di estremità si trovino in una situazione in cui il flusso sia separato.

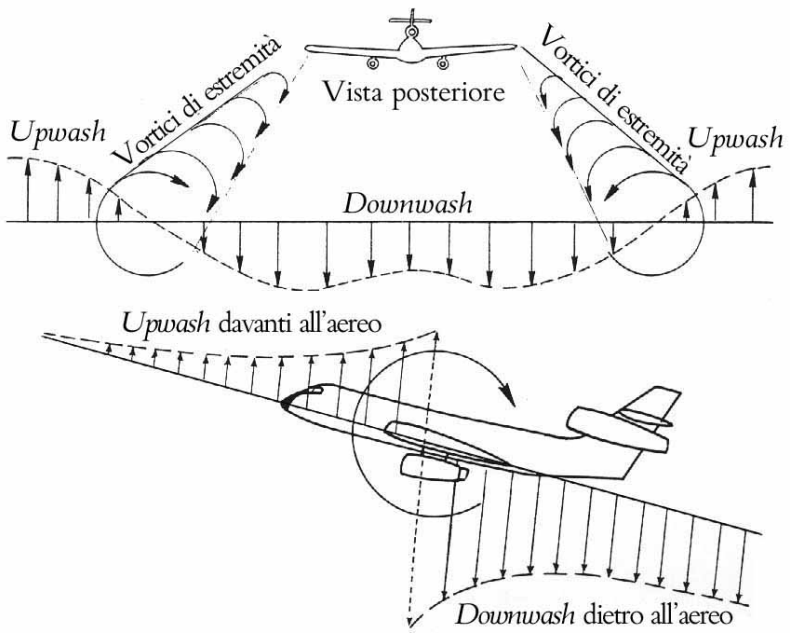
Supponiamo che lo stallo avvenga in modo simmetrico sulle due semiali[9] ed inoltre che, prima che abbia inizio il fenomeno della separazione, la forza aerodinamica sia applicata proprio nel baricentro, così da essere in condizioni di equilibrio; nel momento in cui le estremità dell'ala stallano, il punto di applicazione della risultante delle forze aerodinamiche si sposterà in avanti giacché la parte più arretrata dell'ala non contribuisce più alla portanza: ciò fa nascere un momento cabrante che fa ulteriormente aumentare l'angolo d'attacco, esaltando così il fenomeno.



[9] Abbiamo detto che ciò non accade quasi mai in realtà, però tale ipotesi semplifica la trattazione.

Figura 33

Pertanto, l'ala a freccia, in volo ad alta incidenza ed in condizioni di stallo incipiente, ha la tendenza ad alzare il muso del velivolo, reagendo quindi nel modo opposto a quello desiderabile.



A questo si accompagna un altro fenomeno: osserviamo il grafico riportato in figura 34, che riporta l'andamento delle velocità indotte dal sistema vorticoso a staffa sull'ala; nella zona anteriore all'ala si manifestano velocità indotte dirette verso l'alto, mentre a valle della parte anteriore dell'ala velocità indotte dirette verso il basso. Parleremo di *upwash* sull'ala (e sul velivolo) nelle regioni dove le velocità sono dirette verso l'alto e di *downwash* sull'ala (e sul velivolo) nelle regioni dove le velocità sono dirette verso il basso. Nel grafico in questione, in cui per la prima volta consideriamo una configurazione completa (intendendo con ciò l'ala più il piano di coda orizzontale), si evidenzia come tipicamente l'impennaggio di coda è deportante: la coda, cioè, in genere produce una portanza negativa, ossia diretta verso il basso. Come si vede, l'effetto del *downwash* in corrispondenza del piano di coda è quello di variare l'incidenza (in particolare di ridurla) di un angolo che prende il nome di *angolo di downwash* e che indichiamo con ε.

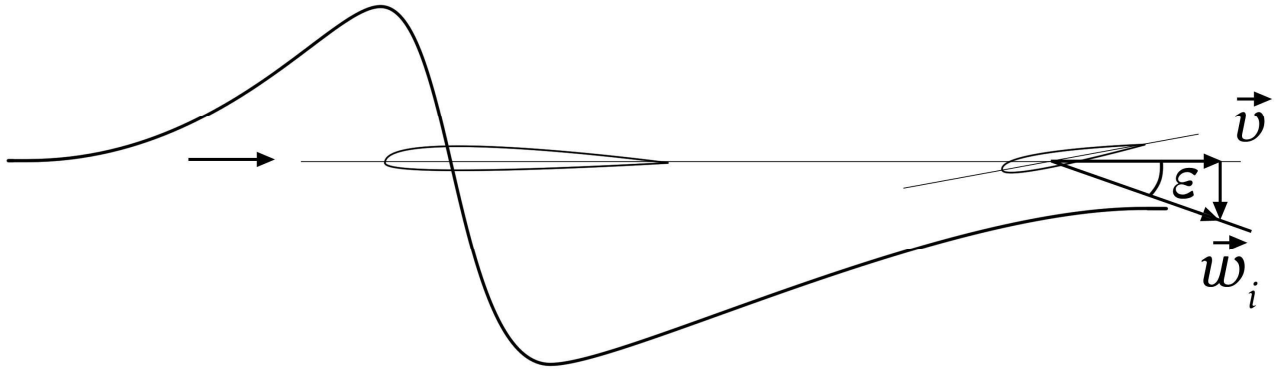


Figura 34

Torniamo a questo punto al nostro aereo con ala a freccia e concentriamoci su di un altro aspetto interessante: in una situazione normale, cioè ad incidenza non critica, avremo il sistema vorticoso che produce certe velocità indotte in corrispondenza del piano di coda orizzontale e quindi avremo un certo valore dell'angolo di *downwash*; supponiamo ora di aumentare l'angolo d'attacco sino al valore in cui le regioni di estremità delle due semiali siano stallate: in questa situazione, e sempre facendo un discorso qualitativo, i due rami liberi del vortice a staffa si trovano a minor distanza dal piano di coda orizzontale.

La minor distanza tra vortice libero e piano di coda produce un aumento della velocità indotta in corrispondenza del piano di coda stesso, il cui effetto è quello di un aumento dell'angolo di *downwash*. Il risultato è che l'incidenza del piano di coda diminuisce ulteriormente, per questo il piano di coda diventa più deportante e di conseguenza nasce un momento di beccheggio positivo (cioè cabrante) che va a sua volta ad aumentare l'angolo d'attacco, aggravando così l'effetto; anche in questo caso perciò l'aeroplano, in condizioni di stallo incipiente, porta il muso verso l'alto.

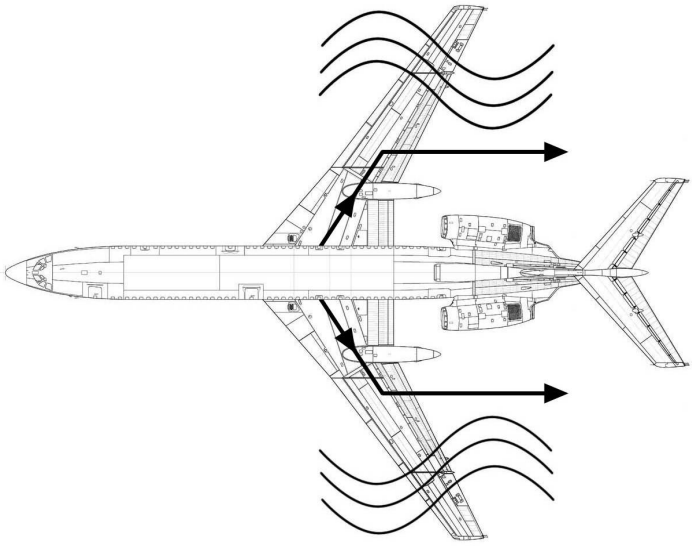


Figura 35

L'insieme dei fenomeni ora visti sono complessivamente detti effetti di *nose-up* dell'ala a freccia, intendendo con ciò la tendenza di un'ala a freccia di sviluppare momenti cabranti, cioè tendenti ad alzare il muso del velivolo, quando questo si trovi ad alta incidenza.

2.16 - CONTROMISURE LOCALI: GENERATORI DI VORTICI

Uno dei possibili rimedi ai problemi visti nei § precedenti è lo svergolamento, che in condizioni convenzionali è sempre negativo e quindi riduce l'incidenza (e perciò il coefficiente di portanza locale) delle sezioni all'estremità dell'ala. Un altro rimedio, che vedremo diffusamente più avanti è quello che prevede l'installazione di ipersostentatori di bordo d'uscita e quasi obbligatoriamente per l'ala a freccia, di bordo d'attacco. Esistono una serie di rimedi locali: teniamo presente un altro aspetto caratteristico del flusso su un'ala a freccia, che non ha niente a che vedere con lo strato limite; consideriamo un'ala a freccia e indichiamo con $\vec{v}_\infty$ il vettore velocità della corrente indisturbata. Si è scomposto il vettore velocità in due componenti, una parallela ed una ortogonale al bordo d'attacco dell'ala; per quanto riguarda la componente normale avremo un punto di ristagno, perciò vi sarà una zona del bordo d'attacco in cui tale componente tenderà a ridursi notevolmente, mentre la componente tangenziale dovrebbe rimanere in prima approssimazione indisturbata.

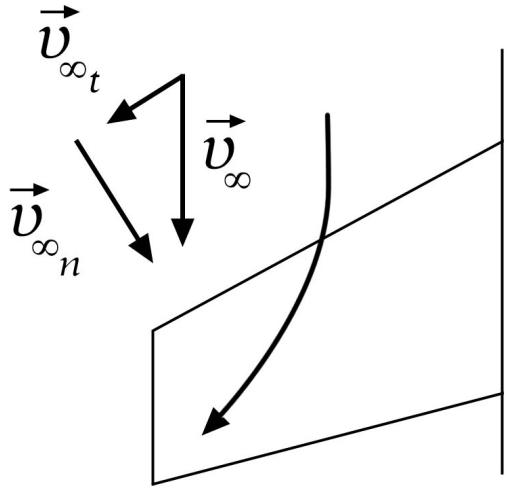


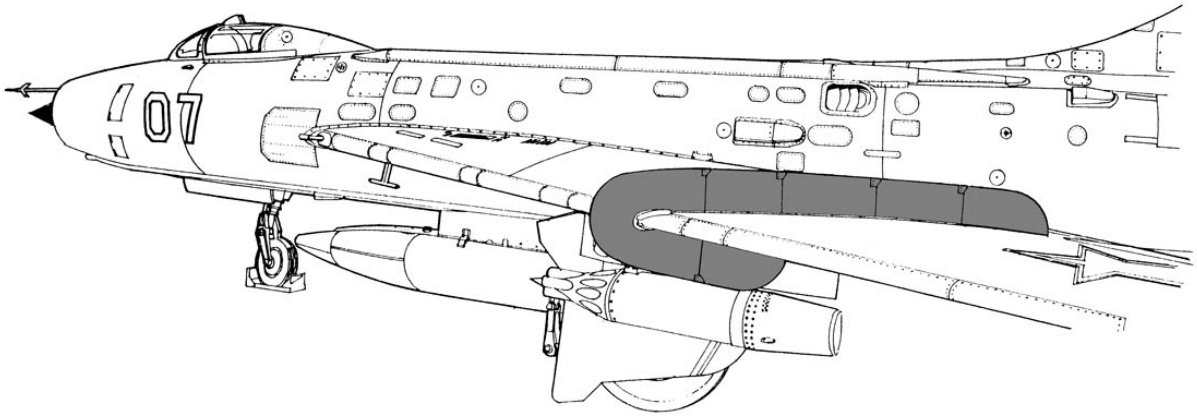
Figura 36

Una particella di fluido che investe il bordo d'attacco dell'ala avrà dunque la traiettoria di figura 36.

La particella cioè tende ad andare verso l'estremità alare. Questo fatto influenza anzitutto la posizione dei motori i quali perciò, in genere, non sono disposti con asse parallelo a

quello del velivolo, ma sono calettati, con angoli molto piccoli, verso l'interno, per aumentarne l'efficienza.

Questo effetto dell'ala a freccia viene anche sfruttato nel modo seguente: supponiamo di disporre un'aletta, ossia una superficie aerodinamica, in corrispondenza del bordo d'attacco dell'ala.

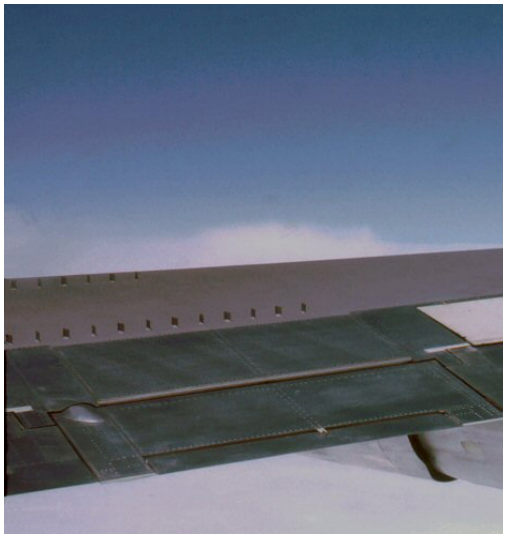


Vistoso generatore di vortici sull'ala di un Su-7B – Figura 37

L'aletta verrà investita dal flusso con una certa incidenza e questo produrrà una forza aerodinamica laterale (di cui però non ci importa molto), generando l'insorgere di un sistema vorticoso a staffa del tutto simile a quello che si è osservato sull'ala; l'effetto principale di tale sistema vorticoso è legato proprio al vortice libero, il quale ha l'effetto fondamentale di esercitare un'azione di mescolamento tra zone di fluido a basso contenuto energetico, come sono quelle all'interno dello strato limite, e zone di fluido all'esterno dello strato limite, le quali possiedono un maggior contenuto energetico, esercitando cioè un'azione di mescolamento. Di fatto si riduce lo spessore della regione dell'ala che si trova a valle dell'aletta nelle condizioni più critiche, cioè quando può manifestarsi il fenomeno della separazione. Possiamo trovare diverse alette di questo tipo sui velivoli; se per esempio guardiamo dei velivoli molto vecchi, tipo il Boeing 707, noteremo che sulla parte superiore dell'ala sono presenti tante piccole alette, disposte in genere anteriormente alle superfici di governo aerodinamico, che hanno la funzione di generatori di vortici. Se invece facciamo caso ai motori di un Boeing 737, troviamo delle grosse alette generatrici di vortici poste in corrispondenza della carenatura superiore del motore; tali alette diventano efficaci ad alti valori dell'angolo d'attacco e generano un sistema vorticoso il quale va a migliorare il comportamento aerodinamico delle sezioni dell'ala poste a valle del motore.

Osserviamo poi come la posizione dei motori sia, su tutti gli aerei di linea in genere, avanzata rispetto all'ala e come il pilone di sostegno del motore abbia in genere una forma aerodinamica molto curata: il pilone del motore infatti, in moltissimi casi, agisce come un'a-

letta generatrice di vortici, andando così a contribuire al miglioramento delle caratteristiche di certe sezioni alari, in particolare quelle in cui si trovano gli alettoni.



Ala di un Boeing 707 - Figura 38

Ala di un Boeing 737 - Figura 39

2.17 - FORME DI RESISTENZA: POLARE DELL'ALA FINITA

Abbiamo visto nel § 3 la rappresentazione analitica della polare per un profilo, alla quale possiamo associare dei concetti di tipo fisico; così il C_{D0} sarà soprattutto rappresentativo di una resistenza di attrito, legata a forze tangenziali sulla superficie del profilo, il cui andamento è rappresentato da grafici tipo quelli in figura

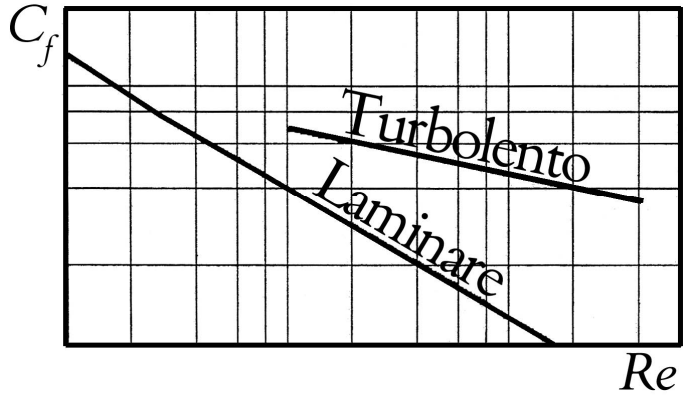


Figura 40

nel quale in ascissa è riportato il numero di Reynolds in scala logaritmica ed in ordinata il coefficiente di attrito, definito come

$$C_f = 0,328\,Re^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{regime laminare}$$

$$C_f = 0,455\left(\log_{10} Re\right)^{-2,58} \qquad \text{regime turbolento}$$

Interessante è il fatto che tale coefficiente di resistenza si mantiene inferiore in ambito laminare rispetto al regime turbolento.

L'altro tipo di resistenza rappresentata nella equazione del C_D, legata al termine kC_L^2, è invece detta resistenza di forma ed è legata alle forze ortogonali alla superficie del profilo; il parametro fondamentale è di nuovo il numero di Reynolds:

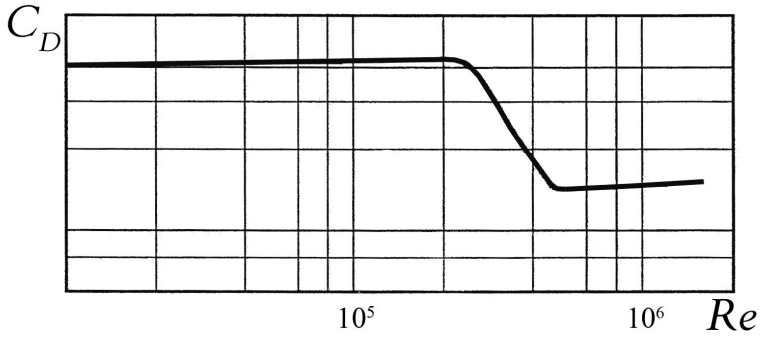


Figura 41

osserviamo che, al di sopra di un certo numero di Reynolds di transizione, la resistenza di forma si riduce notevolmente in quanto in regime turbolento il fluido possiede una maggior tendenza a restare attaccato. Nella $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ il termine dipendente dal C_L^2 sarà soprattutto un termine di resistenza di forma, ma conterrà anche l'effetto della variazione della resistenza di attrito al variare dell'angolo d'attacco: a bassi angoli d'attacco il flusso sarà

quasi completamente attaccato (la resistenza di forma sarà dunque minima), mentre ad alta incidenza avremo una zona di separazione più o meno estesa a valle del profilo e quindi dobbiamo aspettarci che il termine proporzionale al C_L^2 tenga conto delle variazioni della resistenza di forma al variare di α, anche se vi sarà un certo contributo legato alla variazione del coefficiente di attrito.

Un classico esempio di velivolo con ala ellittica è stato il Supermarine Spitfire.

Quando passiamo a considerare un'ala finita dobbiamo riscrivere la $C_D = C_{D0} + kC_L^2$ tenendo conto della presenza anche di un termine di resistenza indotta, e lo facciamo attraverso un coefficiente che indichiamo con C_{Di} e che per l'ala ellittica è dato da

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A}$$

e che abbiamo detto essere il minimo valore possibile per un'ala finita[10]. Oggi però notiamo che di ali ellittiche se ne vedono molto poche, perciò, per tener conto del fatto che l'ala in pianta sia diversa da quella ellittica, scriviamo il coefficiente di resistenza indotta come

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi A}(1+\delta)$$

dove δ è una funzione di parametri caratteristici della forma in pianta. Per sapere come vari δ nel caso più semplice in cui l'ala ha un angolo di freccia nullo, possiamo ricorrere a diagrammi[11] tipo quello raffigurato in figura 42, nel quale δ è in funzione del rapporto di rastremazione.

Variando λ agiamo sulla distribuzione di circolazione lungo l'apertura e possiamo avvicinare la distribuzione di Γ a quella dell'ala ellittica[12]. Osserviamo come il risultato migliore si ottenga per $\lambda = 0{,}3$, valore che ritroviamo, difatti, in quasi tutti i velivoli nei quali una crociera economica rappresenta un criterio di progetto fondamentale. Notiamo poi anche

[10] A parità di allungamento la distribuzione di circolazione ellittica ha il minimo valore del coefficiente di resistenza indotta.

[11] Altrimenti dovremmo usare dei metodi per il calcolo del campo aerodinamico su di un'ala.

[12] Il valore λ=1 rappresenta un'ala rettangolare che, come si nota, presenta un coefficiente di resistenza indotta maggiore di quello di un'ala rastremata.

una dipendenza abbastanza debole[13] di δ dall'allungamento alare, ed in particolare vediamo come un allungamento maggiore determini un effetto negativo, in quanto a parità di rapporto di rastremazione, δ aumenta[14].

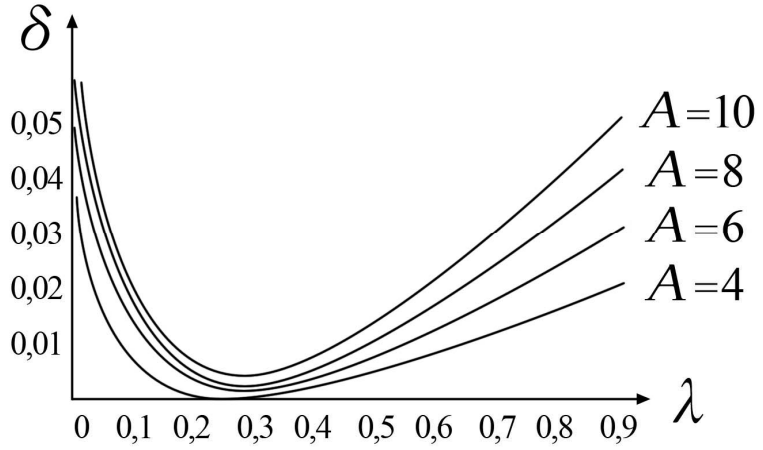


Figura 42

Fatta questa breve analisi dei tipi di resistenza che intervengono su un'ala, possiamo dare l'espressione della polare per l'ala finita, che sarà del tutto analoga all'equazione del C_D per il profilo

$$C_D^{AF} = C_{D0}^{AF} + kC_L^2 + \frac{C_L^2}{\pi A}(1+\delta)$$

dove bisogna stare attenti al fatto che il C_{D0}^{AF} dell'ala e il C_{D0} del profilo non rappresentano necessariamente la stessa quantità, pur essendo intrinsecamente grandezze legate entrambe alla resistenza d'attrito; a tal proposito, una possibile espressione di C_{D0}^{AF} potrebbe essere data da un opportuno valore mediato di C_{D0}

$$C_{D0}^{AF} = \frac{1}{S}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} C_{D0}(\gamma)\,c(\gamma)\,d\gamma$$

[13] Il grosso della dipendenza da A è già nella equazione del C_{Di}.

[14] Una spiegazione molto qualitativa di ciò può essere la seguente: abbiamo detto che riusciamo ad avere il minimo coefficiente di resistenza indotta quando la circolazione approssima quella ellittica; nel caso di un'ala reale, tanto maggiore è l'allungamento e tanto più, per quanto diamo un certo rapporto di rastremazione nel tentativo di avvicinare l'ala ellittica in termini di circolazione, abbiamo una circolazione circa costante per arrivare poi ad una brusca variazione nelle regioni di estremità.

dove, come sempre, il valore del C_{D0} della generica sezione è pesato con il valore della corda in quella sezione. Possiamo scrivere l'espressione di C_D^{AF} anche come

$$C_D^{AF} = C_{D0}^{AF} + \frac{C_L^2}{\pi A}\left(k\pi A + 1 + \delta\right)$$

ossia

$$C_D^{AF} = C_{D0}^{AF} + \frac{C_L^2}{\pi A e}$$

avendo definito il fattore

$$e = \frac{1}{k\pi A + 1 + \delta}$$

che prende il nome di *fattore di Oswald* e che influenza la pendenza del coefficiente di resistenza (sia di quella d'attrito che di quella indotta dal valore dell'angolo d'attacco). Introducendo infine il coefficiente

$$K = \frac{1}{\pi A e} = \frac{k\pi A + 1 + \delta}{\pi A}$$

l'espressione diventa

$$C_D^{AF} = C_{D0}^{AF} + KC_L^2$$

e questa è la forma della polare di un'ala finita con cui esprimeremo le azioni aerodinamiche su una certa configurazione.

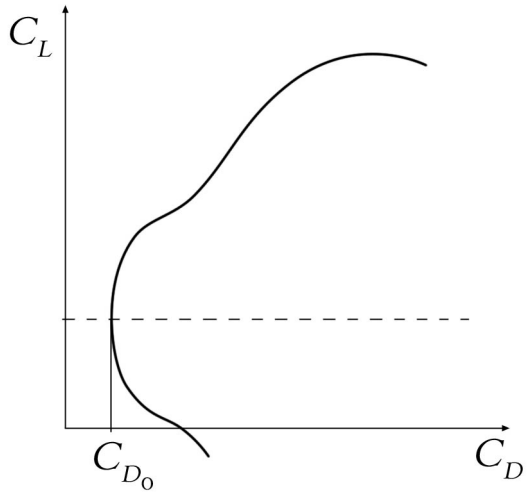


Figura 43

Facciamo a questo punto un'osservazione: abbiamo detto come per un profilo, in particolare laminare, la polare sia esprimibile in forma parabolica, ma non è detto che sia simmetrica: una polare non simmetrica è tipica di un profilo a curvatura. Nella figura 43 è mostrato il grafico di una polare il cui asse non corrisponde al valore zero del coefficiente di portanza (o se preferiamo, una polare in cui il C_{D0} non corrisponde al valore nullo del C_L).

L'espressione del C_D appena scritta di un'ala finita fa riferimento sicuramente ad una polare di tipo simmetrico, nella quale cioè $C_D = C_{D0}$ quando $C_L = 0$; ciò però non costituisce un problema, almeno per un progetto di massima, e possiamo vederlo con l'esempio seguente

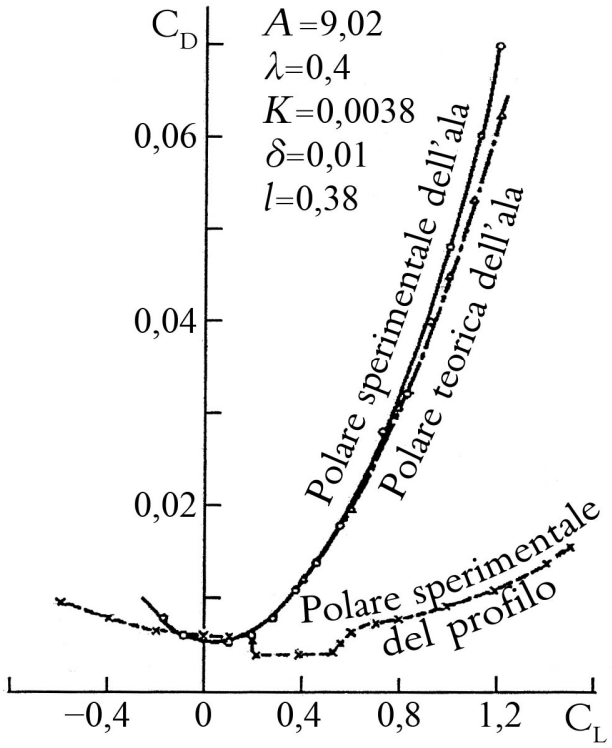


Figura 44

il grafico mostra anzitutto la polare (linea tratteggiata), ricavata sperimentalmente, di un profilo[15] NACA 65-210 (quindi un profilo della serie 6 e perciò laminare) con cui è stata poi costruita un'ala avente allungamento $A = 9{,}02$ e rapporto di rastremazione $\lambda = 0{,}4$; tale ala è stata quindi messa in galleria del vento per ricavarne sperimentalmente la polare (linea continua); osserviamo anzitutto la differenza tra la polare sperimentale del profilo e la polare sperimentale dell'ala costruita con tale profilo: la sacca di laminarità non è assolutamente visibile nella polare dell'ala, che appare anche molto più simmetrica di quella del profilo. Osserviamo infine come la polare teorica (linea tratto e punto), la cui equazione è nota una volta determinati i coefficienti k, δ ed e, sia quasi coincidente con quella rilevata sperimentalmente e ciò conferma il fatto che la espressione del C_{D0} di un'ala finita può benissimo essere utilizzata a partire da una polare del profilo che non è necessariamente simmetrica e che può presentare la sacca di laminarità. Nella pratica inoltre è molto difficile mantenere condizioni di laminarità sull'ala, perché una volta che col profilo laminare viene realizzata l'ala, è necessario che quest'ultima sia perfettamente pulita in quanto basta una minima rugosità sulla superficie dell'ala stessa (causata ad esempio da rivetti e chiodature), oppure che il flusso incidente sull'ala sia già perturbato, per determinare la transizione da regime laminare a regime turbolento. Secondo quanto ora detto possiamo dunque concludere che, per il tipo di

[15] Notiamo infatti come tale polare non simmetrica, con sacca di laminarità, sia relativa ad un valore $A = \infty$ dell'allungamento alare, il che evidenzia appunto che si tratta di un profilo ossia di un'ala infinita.

approssimazione che faremo, l'espressione del C_D^{AF} di un'ala finita, nella sua semplicità ha una discreta validità.

2.18 - IL VELIVOLO COMPLETO: LA POLARE

Consideriamo adesso l'aeromobile completo, occorrerà perciò tener conto del contributo, al valore del C_D di un'ala finita, della fusoliera, dei piani di coda, dell'impennaggio verticale, dei motori, delle antenne e così via. La polare definitiva del velivolo completo viene determinata attraverso la sperimentazione, ma a priori si può considerare che nel passaggio dall'ala al velivolo abbiamo certamente un netto aumento della resistenza d'attrito (si pensi alla superficie bagnata della fusoliera) e quindi un aumento del C_D; altri effetti rilevanti provengono da fenomeni di interferenza aerodinamica e si traducono in notevoli modifiche degli strati limite: dobbiamo aspettarci in genere un aumento di resistenza legato ad interferenza aerodinamica tra lo strato limite dell'ala nella regione di unione con la fusoliera e lo strato limite sulla fusoliera stessa. Teniamo quindi conto che esistono contributi anche rilevanti legati appunto a fenomeni di interferenza aerodinamica e per mettere meglio a fuoco l'importanza di tali fenomeni discutiamo il grafico riportato in figura 45, nel quale viene evidenziata l'interferenza tra l'ala e la gondola motore.

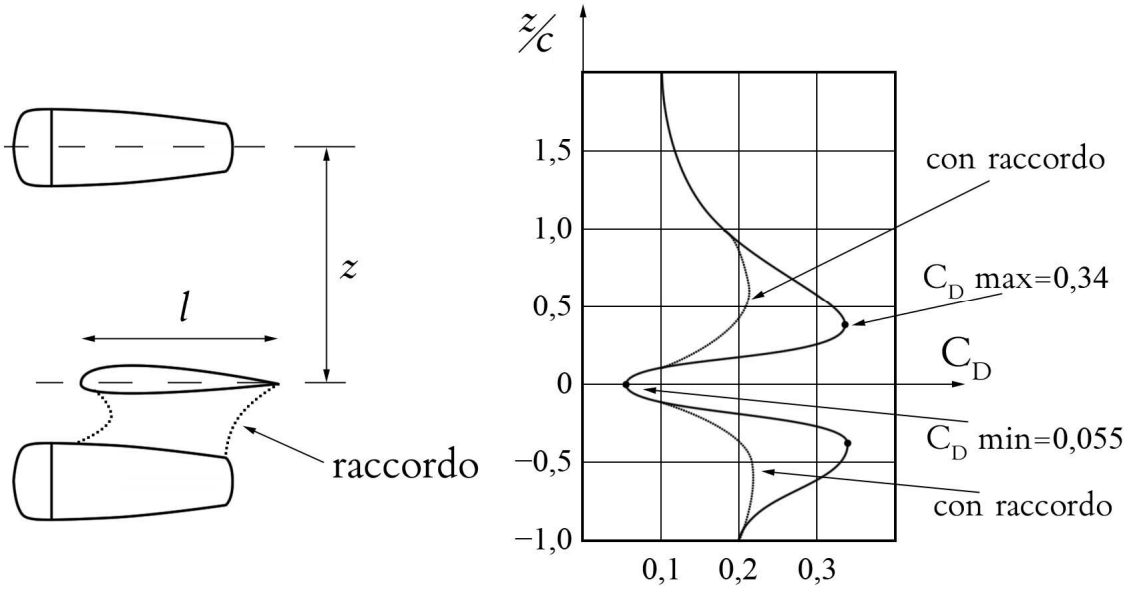


Figura 45

La posizione del motore è identificata dalla distanza z del piano alare, resa adimensionale con la corda del profilo dell'ala; osserviamo come il coefficiente di resistenza, a partire dal valore relativo all'ala isolata ($\frac{z}{c} \to \infty$), vada crescendo man mano che il motore si avvicina all'ala, abbassandosi però bruscamente sino ad un valore minimo quando il motore si trova

esattamente sull'ala[16] (cioè per $\frac{z}{c} = 0$); il C_D tende poi ad aumentare di nuovo se torniamo ad allontanare il motore dall'ala; osserviamo anche l'effetto importante del raccordo (o pilone) il quale, senza entrare nel dettaglio, migliora di fatto l'interazione tra l'ala e la gondola del motore.

Se dunque confrontiamo la polare dell'ala e polare del velivolo completo dovremo aspettarci, come detto, un aumento del C_{D0}, avendo anche effetti sul C_L.

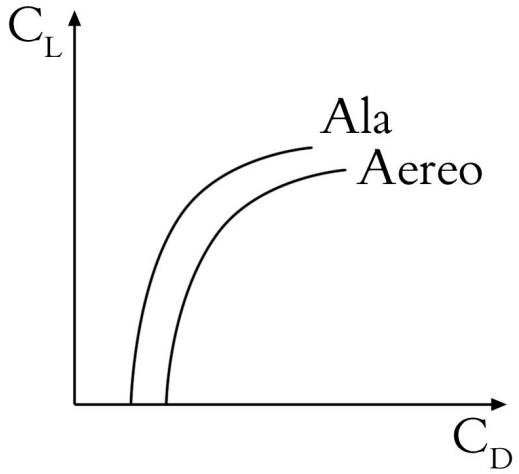


Figura 46

A parità di angolo d'attacco il velivolo svilupperà un valore un po' più basso del coefficiente di portanza; una spiegazione immediata di questo comportamento può far riferimento al fatto che tipicamente la coda, in condizioni di crociera, è deportante, perciò i piani di coda contribuiscono negativamente al valore della portanza totale del velivolo, il che significa che per un certo valore dell'angolo d'attacco la configurazione completa svilupperà un C_L minore di quello dell'ala isolata.

Quanto detto per il profilo riguardo all'influenza del numero di Reynolds e del numero di Mach sulla polare, vale anche per l'ala e per il velivolo completo; così all'aumentare del numero di Reynolds dovremmo osservare una certa diminuzione del C_D ed un certo aumento del $C_{L_{MAX}}$.

Trascureremo la dipendenza dal numero di Reynolds dato che in generale nel margine di variazione della velocità di un aeromobile l'effetto di *Re* non è così importante. Molto più rilevante è invece la dipendenza della polare dal numero di Mach; per tener conto degli effetti della compressibilità possiamo usare ancora la $C_D = C_{D0} + KC_L^2$, considerando però

[16] Tale configurazione era molto frequente qualche anno fa e ci sono ancora oggi dei velivoli che possiedono la gondola motore disposta proprio in corrispondenza dell'ala.

che C_{D0} e K non saranno più costanti, ma funzioni appunto del numero di Mach, e che l'esponente del C_L sarà anch'esso, in generale, funzione del numero di Mach[17].

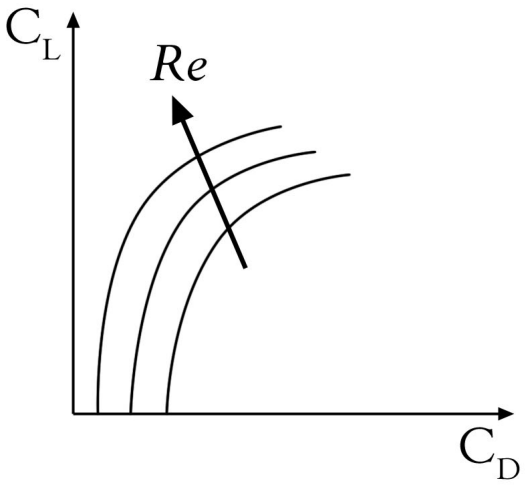


Figura 47

Per via grafica l'andamento della polare di un velivolo subsonico in funzione del numero di Mach è qualitativamente il seguente.

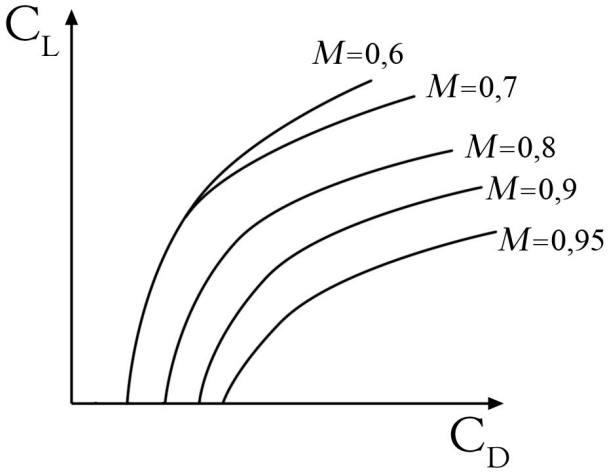


Figura 48

Ovverosia gli effetti del numero di Mach sono trascurabili sino a $M \approx 0,6$, mentre per valori superiori gli effetti si manifestano inizialmente solo a valori relativamente elevati dell'angolo d'attacco, per avere poi anche un aumento del C_{D0} ed una diminuzione del $C_{L_{MAX}}$.

[17] Per le nostre applicazioni, però, possiamo fare l'ulteriore ipotesi che l'esponente del coefficiente di portanza sia 2 in quanto si è osservato che tale approssimazione è del tutto accettabile, per lo meno per quanto riguarda lo studio delle prestazioni di un velivolo supersonico così come le faremo.

Nel caso di velivolo supersonico invece si osserva un andamento che, sempre a livello qualitativo, è il seguente

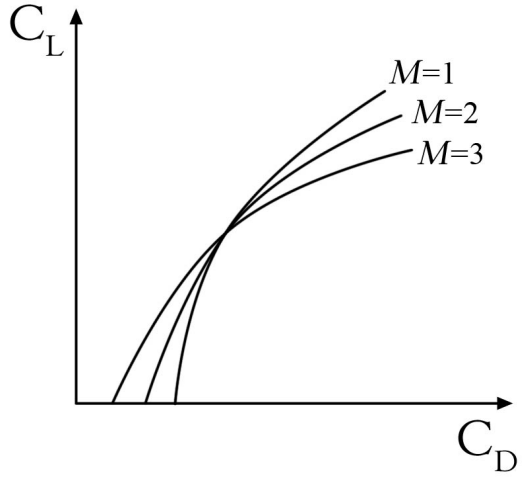


Figura 49

all'aumentare del numero di Mach vi è una diminuzione del C_{D0} ed una lieve diminuzione del $C_{L_{MAX}}$. L'ultimo effetto di cui dobbiamo tener conto nella polare è rappresentativo degli angoli di rotazione delle superfici di controllo: gran parte dello studio delle prestazioni viene fatto utilizzando per il velivolo il modello di punto materiale, ovverosia si rappresenta la dinamica di un velivolo come quella di un punto nel quale è concentrata la massa dell'aeromobile stesso; in questo modo non vengono tenuti in considerazione i valori dei suddetti angoli o il valore della spinta erogata dai motori. Quando però serve un'accuratezza maggiore o si studino condizioni di volo particolari, come il volo in derapata, occorre tener conto che, per esempio, vi sarà una certa dipendenza del coefficiente di resistenza dall'angolo dell'equilibratore o dall'angolo del timone. Non possiamo tuttavia scrivere una relazione generale che tenga conto di tali effetti, e quindi ci limitiamo a scrivere una relazione funzionale che ci ricordi il fatto che, nella polare, si manifesta una dipendenza, oltre che dal numero di Mach, anche dal vettore $\vec{u}$ delle variabili di controllo

$$C_D = C_D\left(C_L; M; \vec{u}\right)$$

con

$$\vec{u} = \left(\delta_E; \delta_A; \delta_R; \delta_T\right)$$

dove δ_T è una variabile di controllo che rappresenta un indicatore del livello di spinta o potenza erogata dal velivolo, δ_E (*elevons*) per gli equilibratori, δ_A (ailerons) per gli alettoni, δ_R (*rudder*) per il timone.

Si è dunque compreso come, almeno per lo studio delle prestazioni, tutto ciò di cui abbiamo bisogno dell'aerodinamica siano i valori di $C_{D0}(M)$, $K(M)$ e $C_{L_{MAX}}(M)$ per quella data configurazione. Osserviamo perciò, a titolo di confronto, la variazione di tali grandezze in un paio di casi rappresentativi:

- TRASPORTO A GETTO (velivolo alto-subsonico)

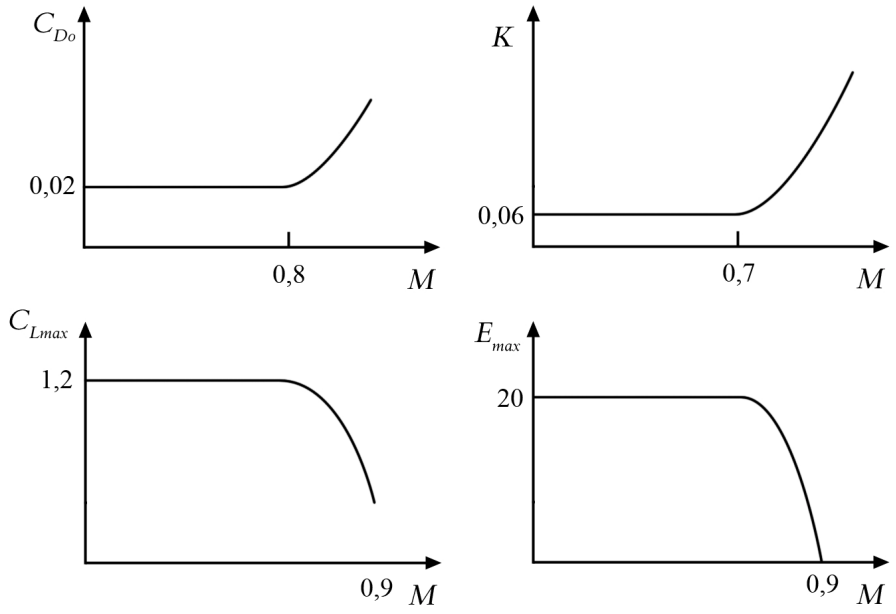


Figura 50

Osserviamo l'andamento del C_{D0}: circa costante fino a $M \approx 0{,}8$, quindi si riscontra un aumento marcato ($M = 0{,}9$ costituisce un limite quasi invalicabile per un aereo di questo tipo). Il coefficiente K è costante sino a $M \approx 0{,}75$ per poi aumentare quasi esponenzialmente. Possiamo dunque concludere che si ha un notevole aumento della resistenza quando si entri in regime transonico, legato a forme di *resistenza d'onda* (riduzione della pressione totale attraverso le onde d'urto) e *resistenza di strato limite* (legata all'interazione degli urti con lo strato limite). Osserviamo poi come diminuisce il $C_{L_{MAX}}$ (un valore di 1,1 è abbastanza plausibile per questi aerei, in assenza di ipersostentazione) e come decresce l'efficienza massima della configurazione all'aumentare del numero di Mach.

- CACCIA SUPERSONICO

È comprensibile che un velivolo supersonico sia progettato per attraversare agevolmente il regime transonico e quindi non dobbiamo aspettarci una variazione eccessivamente ele-

vata di queste grandezze: per quanto riguarda il C_{D0} ritroviamo l'andamento tipico nel transonico; il coefficiente K è più o meno costante fino a $M = 1$ e poi aumenta lentamente, od almeno non così tanto come avveniva nel caso del trasporto; il $C_{L_{MAX}}$ è costante in regime subsonico, decresce fortemente nel transonico ed aumenta nuovamente di poco per poi restare costante da $M = 1,8 - 2,0$ in poi; l'efficienza aerodinamica infine decresce nel passaggio da subsonico a supersonico ma non in modo tanto rilevante come nel caso precedente.

I grafici ora visti contengono però ulteriori informazioni; osserviamo come il C_{D0} sia minore per il caccia, pur non essendo la resistenza un parametro così fondamentale come lo è per un trasporto (teniamo presente che un caccia ha a disposizione una spinta notevole e quindi non è un requisito di progetto la bassa resistenza): alla base di tale fenomeno c'è l'effetto della fusoliera (pensiamo ad esempio ad un F-15 e ad un 747).

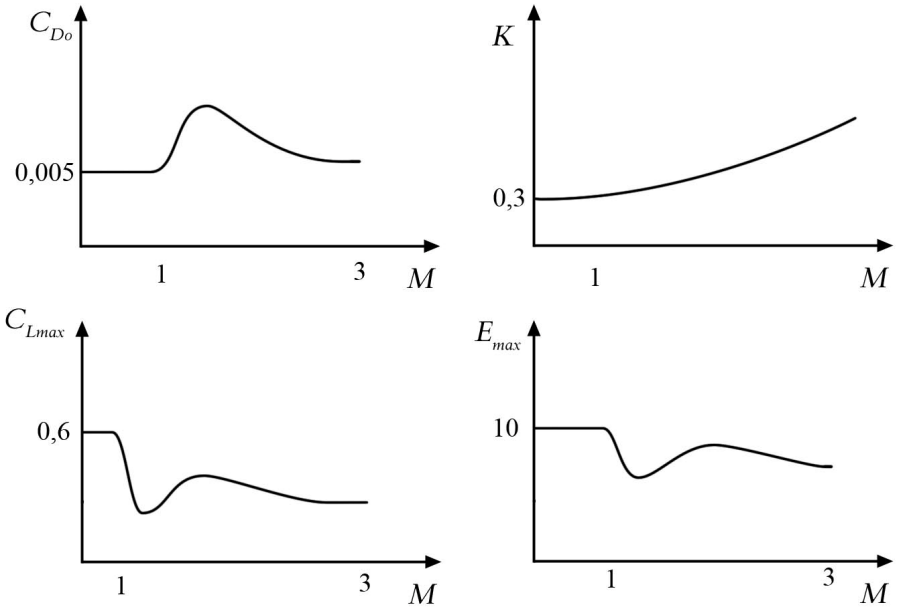
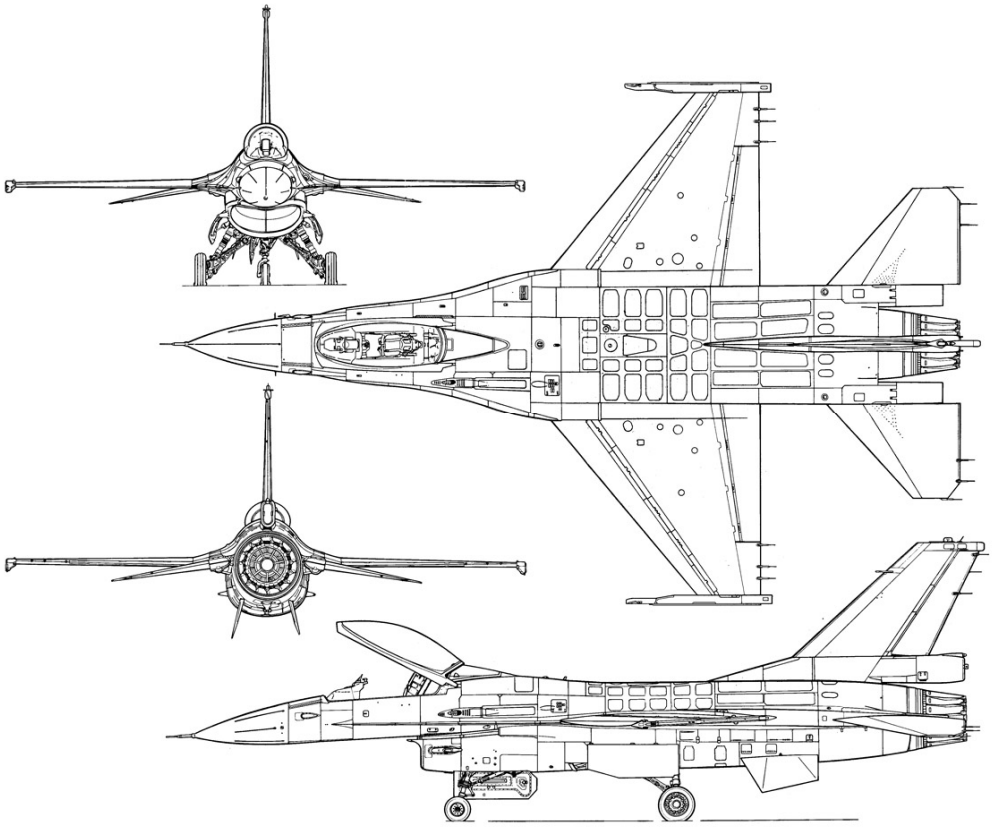


Figura 51

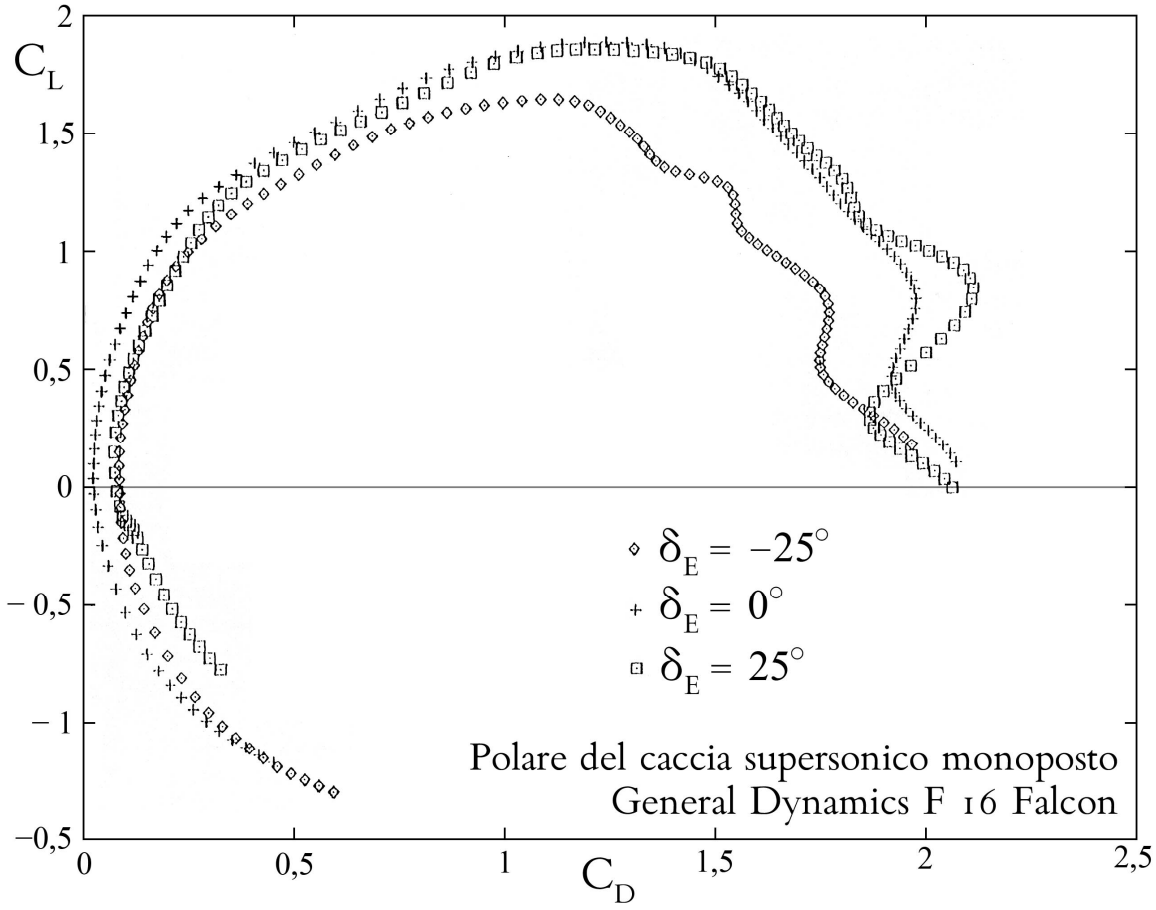
L'altro fenomeno interessante è la differenza in termini del valore di K per il trasporto e per il caccia: nel caso del trasporto esso è tipicamente di 0,055 - 0,06, mentre nel caso del caccia si ha un valore di circa dieci volte più grande. Tale fatto si spiega tenendo conto che il grosso del contributo nel coefficiente K proviene da un termine di resistenza indotta; l'allungamento alare del trasporto è più alto di quello del caccia e quindi la sua resistenza indotta è molto minore di quella del velivolo supersonico.

2.19 - UN ESEMPIO: POLARE DELL'F-16 FALCON

Nel § 18 si è detto che per certi studi, relativi in particolare ad aeromobili ad alte prestazioni come i caccia, non possiamo prescindere dal considerare la dipendenza della polare dagli angoli di rotazione delle superfici aerodinamiche di controllo; a titolo di esempio analizziamo (si veda figura 52) la polare completa di un velivolo ad alte prestazioni ed in particolare del caccia F-16[18]. I dati aerodinamici dell'F-16 sono stati determinati attraverso prove in galleria del vento per angoli d'attacco da 90° a −30°, perché tale velivolo opera in un intervallo di angoli d'attacco piuttosto elevato; nel grafico possiamo notare una regione che può essere ben approssimata da un andamento parabolico, almeno fino ad angoli d'attacco non elevati, mentre notiamo come ad angoli d'attacco piuttosto alti la polare mostri una forte dipendenza dall'angolo δ_E dell'equilibratore. Quindi quando operiamo degli studi di simulazione su un aereo di questo tipo non possiamo omettere la dipendenza delle azioni aerodinamiche degli angoli delle superfici di controllo.



[18] Consideriamo l'F-16 perché è un velivolo relativamente vecchio e quindi abbiamo a disposizione tutti i coefficienti aerodinamici del velivolo in funzione degli angoli aerodinamici e delle variabili di controllo.



Polare dell'F-16 - Figura 52

2.20 - SISTEMI DI IPERSOSTENTAZIONE

Fra i possibili rimedi alle caratteristiche negative ad alta incidenza delle ali a freccia e rastremate abbiamo citato i sistemi di ipersostentazione: tali sistemi non sono semplici dal punto di vista meccanico e appesantiscono l'ala, ma su questo tipo di ali sono assolutamente necessari. Vediamo perciò di descriverli, analizzando come la loro presenza modifichi la polare. Abbiamo notato come l'ala a freccia e rastremata, tipica di molti aeroplani moderni, presenti caratteristiche aerodinamiche ad alti angoli d'attacco tutt'altro che favorevoli; teniamo presente che nella realizzazione di fasi di volo come il decollo e l'atterraggio, il vincolo di avere piste non lunghe imponga il fatto che siano raggiunti certi valori del coefficiente di portanza da parte dell'aeromobile; consideriamo infatti il più semplice equilibrio (volo a velocità costante ed a quota costante) nel quale la portanza equilibra il peso e la spinta equilibra la resistenza

$$W = L = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_L$$

da cui ricaviamo la velocità di volo

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}.$$

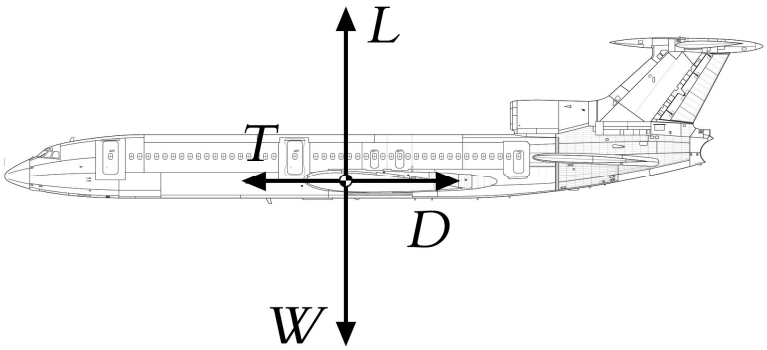


Figura 53

Dall'espressione precedente si evince da quali parametri dipenda la velocità di volo; se vogliamo minimizzare la velocità di volo nelle fasi di decollo ed atterraggio[19], non è certo conveniente agire sul carico[20] e tanto meno conviene aumentare la superficie alare perché, come vedremo, ciò aumenterebbe la resistenza del velivolo nel volo in crociera; resta perciò il coefficiente di portanza: il C_L sviluppato da ali tipo quelle considerate sinora non è molto elevato, soprattutto alle alte incidenze[21].

[19] Per motivi di impegno di pista e di sicurezza è conveniente far atterrare o decollare un aereo alla velocità più bassa possibile; un aereo da trasporto decolla a velocità intorno ai 250 km/h ed atterra a velocità attorno ai 200 km/h.

[20] Non è desiderabile far decollare un grosso aereo da trasporto a metà carico per ridurre le velocità in atterraggio ed in decollo.

[21] Le ali dei velivoli da trasporto sono realizzate per essere efficienti a velocità di crociera elevata perciò sono ali senza curvatura, con basso spessore e con bordo d'attacco curvo e tali caratteristiche non portano ad alti valori del coefficiente di portanza.

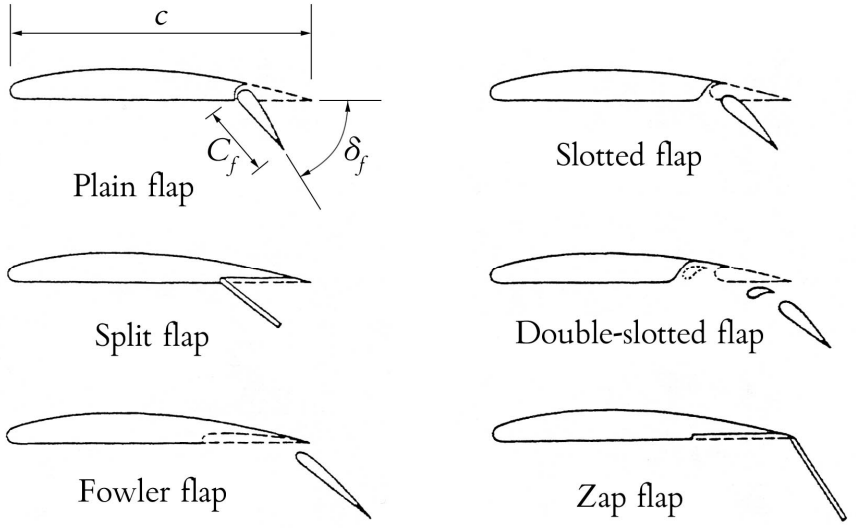


Figura 54

Si aggiungono dunque delle superfici sia sul bordo d'attacco che sul bordo d'uscita, dette ipersostentatori, le quali permettono, nelle fasi di volo che lo richiedano, di massimizzare il $C_{L_{max}}$. Noi prenderemo in considerazione soprattutto degli ipersostentatori di tipo meccanico, che sono quelli installati sulla maggior parte dei velivoli. Vi sono anche ipersostentatori di tipo pneumatico, installati su velivoli ad alte prestazioni. La figura 54 riguarda gli ipersostentatori di bordo d'uscita.

Il sistema più semplice possibile prevede la rotazione verso il basso del bordo d'uscita e porta ad un $\Delta C_{L_{MAX}} = 0,9$; l'ipersostentatore di bordo d'uscita agisce dunque determinando un aumento di curvatura del profilo e quindi una variazione dell'asse di portanza nulla che equivale ad una traslazione della retta di portanza.

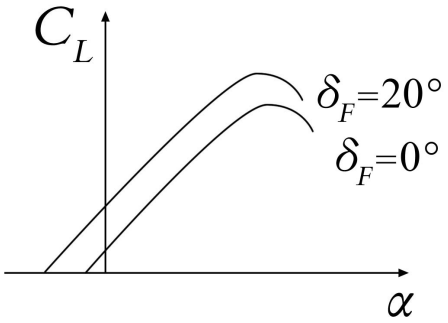


Figura 55

Le configurazioni di ipersostentatori di bordo d'uscita che sono oggi più frequentemente installate sui velivoli commerciali sono quelle di *flap* con fessure (*slot*), configurazioni nelle quali, non solo vi è una rotazione della parte posteriore del profilo, ma anche una traslazione; dalla configurazione originale si passa perciò ad una configurazione che può essere

a doppia fessura o a tripla fessura, nella quale abbiamo diversi effetti: anzitutto si ha un aumento della superficie alare[22] (e questo è forse l'effetto più rilevante), ed inoltre la presenza degli *slot* consente di mettere in comunicazione zone a pressione elevata sul ventre con zone a pressione più bassa sul dorso, determinando così un flusso d'aria dal ventre al dorso che ha l'effetto positivo di posticipare il distacco (e tutti i fenomeni ad esso legati) nella zona critica del bordo d'uscita. Per la configurazione a doppia fessura il guadagno in termini di coefficiente di portanza massimo è di $\Delta C_{L_{max}} = 1,9$.

Notiamo dalla figura 55 come gli ipersostentatori di bordo d'uscita determinando principalmente un aumento di curvatura del profilo, producano, per ogni valore dell'angolo d'attacco, un aumento del coefficiente di portanza, ma la diminuzione dell'angolo d'attacco al quale si raggiunge il $C_{L_{max}}$; quest'ultimo fatto è spiegabile tenendo conto che l'aumento di curvatura determina, nella parte anteriore, notevoli aumenti di velocità e perciò il profilo risulta fortemente decompresso in prossimità del bordo d'attacco. Poiché a tale regione di bassa pressione segue una regione di rapido aumento della pressione stessa, la zona immediatamente a valle del bordo d'attacco presenta una maggior tendenza al distacco e ciò riduce α_{CR}. L'uso degli ipersostentatori di bordo d'uscita dunque porta sicuramente ad un miglioramento in termini di $C_{L_{max}}$, ma riduce l'angolo d'attacco oltre il quale il profilo tende a stallare e ciò non permetterebbe di sfruttare completamente le potenzialità di questi sistemi. Sui velivoli di una certa dimensione perciò, i sistemi di bordo d'uscita sono sempre usati congiuntamente ai sistemi di bordo d'attacco (slat).

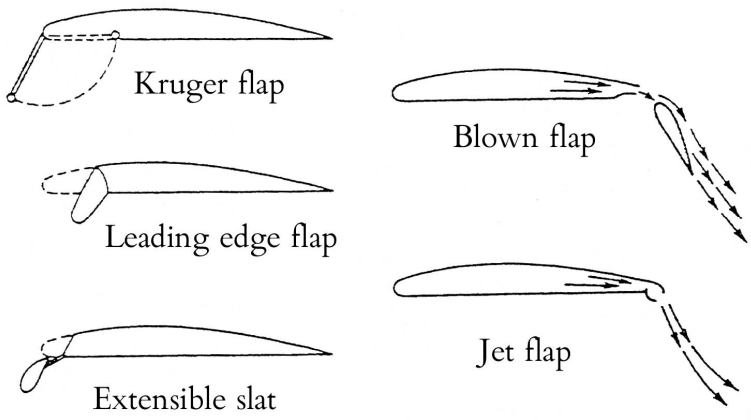


Figura 56

Abbiamo alcuni esempi di tali sistemi, come il *Kruger flap* (che in una forma particolare troviamo installato sul 747) o il *leading edge flap*, i quali, ruotando la parte anteriore del profilo, riducono, se non addirittura eliminano, i problemi di separazione in corrispondenza

[22] Si può arrivare fino ad un 30% in più di corda del profilo.

del bordo d'attacco[23], generando di conseguenza un aumento di α_{CR} e permettendo dunque uno sfruttamento maggiore dei sistemi di bordo d'uscita.

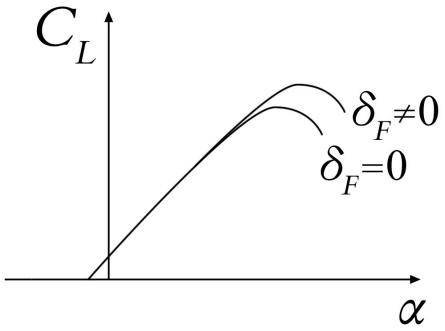


Figura 57

I sistemi usati più frequentemente non comportano però solo una variazione geometrica della parte anteriore del profilo, ma implicano anche una certa traslazione in avanti del bordo d'attacco; ciò permette, analogamente alle fessure di bordo d'uscita, il passaggio del fluido dal ventre (dove la pressione è più elevata) al dorso (dove la pressione è più bassa) e l'effetto, nella sua interpretazione più semplice, è quello di *energizzare* regioni di fluido le quali possiedono un limitato contenuto energetico e che quindi manifestano un tendenza alla separazione: con tale sistema cioè, noi modifichiamo la distribuzione di pressione nella parte anteriore del dorso in modo tale da evitare che si formino dei picchi di bassa pressione e quindi la separazione al bordo d'attacco. L'effetto degli ipersostentatori di bordo d'attacco dunque, è quello di posticipare la separazione e quindi si ha un aumento di α_{CR} e di conseguenza del $C_{L_{MAX}}$.

Realizzare però il massimo coefficiente di portanza ad un anglo d'attacco più elevato non è un fatto molto positivo perché significa atterrare e decollare ad incidenze più elevate e ciò può portare a dei seri problemi[24].

Dunque anche i sistemi di bordo d'attacco non vengono mai usati da soli, ma sempre insieme ai sistemi di bordo d'uscita[25]; andiamo dunque ad osservare l'effetto combinato dei

[23] Nel caso in cui tenda a formarsi una regione di flusso separato in corrispondenza del bordo d'attacco (si veda figura 3) e si è in grado di dare una sorta di rotazione alla parte anteriore del profilo, riuscendo ad allineare la superficie del corpo con le linee di corrente, si riduce od elimina il problema della separazione.

[24] Possiamo infatti notare come certi aerei siano abbastanza bassi rispetto al terreno e quindi una rotazione troppo elevata, in fase di decollo ad esempio, può portarli a toccare la pista con la coda.

[25] In sostanza possiamo dire che i sistemi di bordo d'uscita sono quelli che realizzano gran parte dell'aumento del coefficiente di portanza massimo, mentre i sistemi di bordo d'attacco, pur contribuendo all'aumento del $C_{L_{MAX}}$ servono ad evitare che l'angolo a cui si realizza il $C_{L_{MAX}}$, diminuisca troppo. Troveremo dunque sempre un ipersostentatore di bordo d'uscita sui velivoli di dimensioni non piccolissime, ma troveremo sempre anche gli ipersostentatori di bordo d'attacco. Un vantaggio dei sistemi di bordo d'attacco è che questi possono essere installati lungo tutta la parte anteriore dell'ala, mentre i flap di bordo d'uscita devono essere interrotti laddove

due sistemi in termini di retta di portanza (si veda figura 58). In tale grafico è riportato, per un certo tipo di profilo, l'effetto degli ipersostentatori sia di bordo d'uscita che di bordo d'attacco: le due curve più a destra ci mostrano l'effetto dello *slat* sulla retta di portanza della configurazione pulita e possiamo notare come in assenza dello *slat* lo stallo avviene intorno ai 10° mentre con lo *slat* esteso lo abbiamo intorno ai 22°; le due curve centrali si riferiscono all'effetto dello split *flap* sulla configurazione pulita e sulla configurazione con *slat*; infine le due curve più in alto si riferiscono all'effetto di un *flap* a doppia fessura, sempre sulla configurazione pulita e sulla configurazione con ipersostentatore di bordo d'attacco.

sono posizionati gli alettoni e spesso sono interrotti anche in corrispondenza del flusso di scarico dei motori, in quanto potrebbe non essere conveniente farli operare in corrispondenza di flussi ad elevata pressione dinamica e ad elevata temperatura.

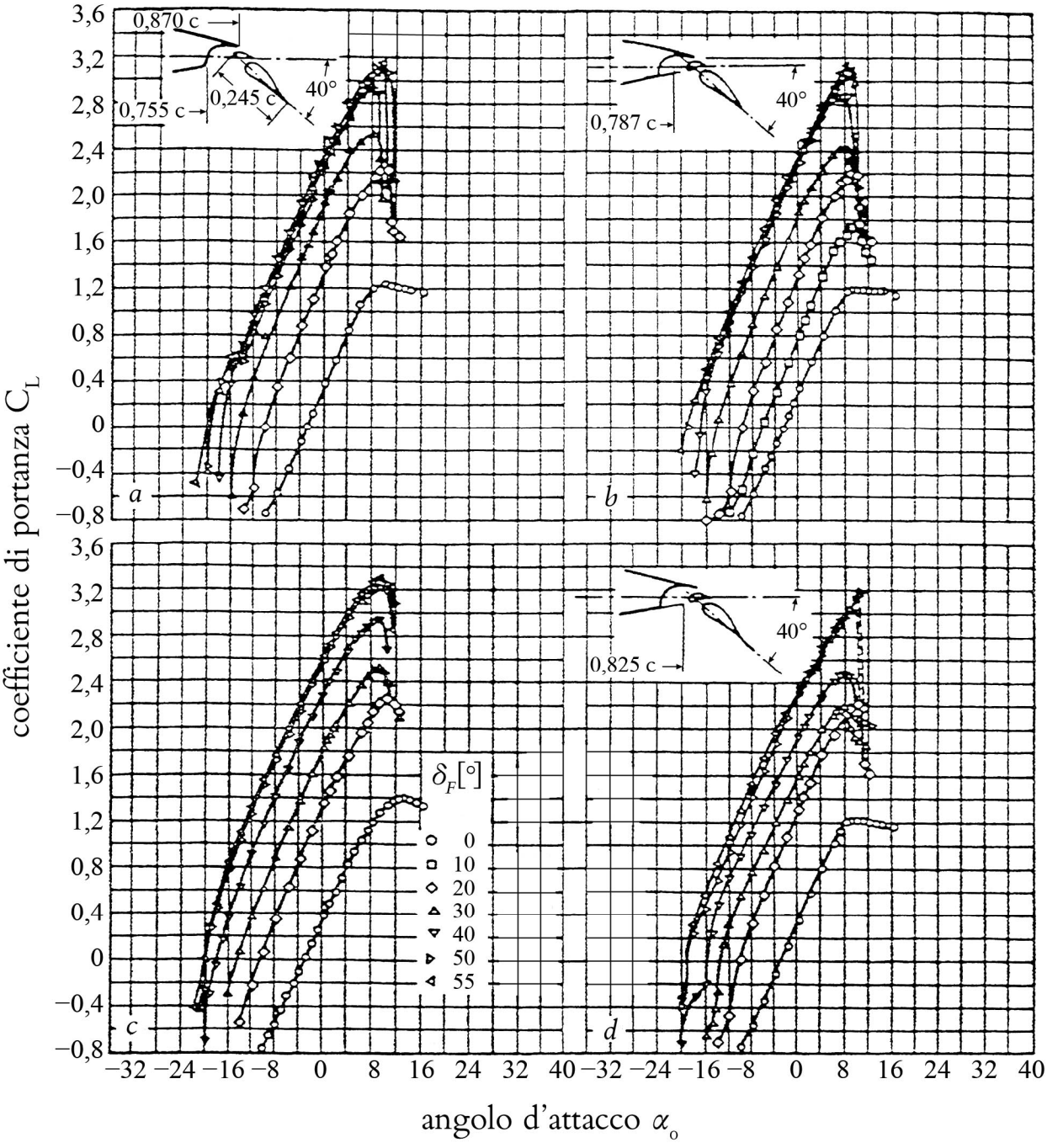


Figura 58

Possiamo notare come procedendo nell'ordine elencato si abbia una riduzione dell'incidenza di massimo coefficiente di portanza per quanto riguarda i sistemi di bordo d'uscita, ma anche come tale effetto sia limitato dall'utilizzo dei sistemi di bordo d'attacco, tanto che nella terza configurazione riusciamo ad avere un $C_{L_{MAX}}$, pari circa a 3, praticamente alla stessa incidenza della configurazione pulita ($\approx 10°$), nella quale invece il $C_{L_{MAX}}$ è circa 1.

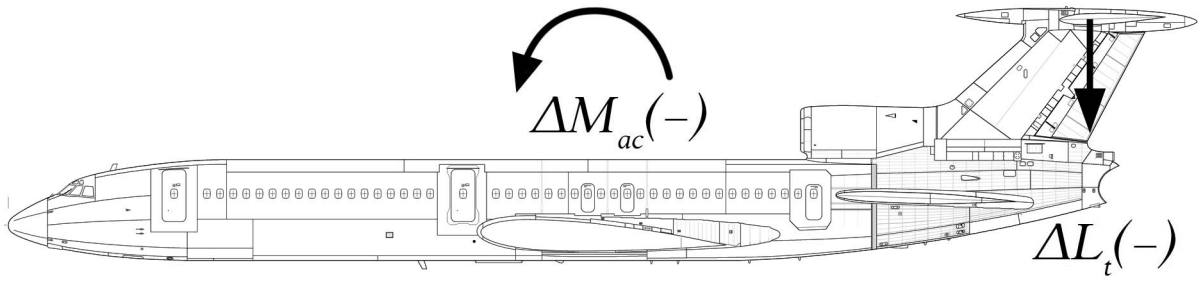


Figura 59

Non pensiamo però che tali aumenti di $C_{L_{MAX}}$, che riscontriamo nel caso del profilo, siano ottenibili anche sul velivolo completo: vedremo, quando parleremo di stabilità, che il velivolo deve essere equilibrato al beccheggio; teniamo presente che l'estensione di un flap produce un aumento della curvatura del profilo e ciò causa una variazione negativa[26] del momento rispetto al centro aerodinamico.

Nel momento in cui vengono estratti gli ipersostentatori il pilota deve continuare a mantenere equilibrato (è ormai d'uso comune l'orribile adattamento "trimmare", dal termine inglese *to trim*, equilibrare) il velivolo e quindi deve produrre delle azioni tali da bilanciare la variazione di momento. Può produrre tali azioni agendo sull'equilibratore sia creando un'ulteriore deportanza in corrispondenza del piano di coda. Il risultato finale è che la portanza totale del velivolo diminuisce e quindi non riusciamo a sfruttare completamente l'effetto degli ipersostentatori[27].

Passiamo a dire due parole sui sistemi pneumatici di ipersostentazione (si veda nuovamente la figura 56, i due esempi a destra) i quali comprendono sistemi di aspirazione dello strato limite o *sistemi di soffiamento dello strato limite*; tali sistemi trovano un'applicazione molto più limitata di quelli meccanici. Per quanto riguarda i sistemi ad aspirazione, in corrispondenza del bordo d'attacco e del bordo d'uscita sono presenti dei piccoli fori che permettono l'aspirazione del flusso; il vantaggio che si ottiene è quello che deriva da una sorta di controllo dello strato limite: mediante l'aspirazione infatti eliminiamo dallo strato limite particelle di fluido a basso contenuto energetico e quindi riduciamo di fatto lo spessore dello strato stesso, col risultato di posticipare la separazione e tutti i fenomeni ad essa correlati. Nel sistema di *soffiamento* viene invece immessa dell'aria in posizioni opportune in corrispondenza del bordo d'attacco e del bordo d'uscita e l'effetto è ancora quello di aumentare

[26] Ricordiamo che una curvatura positiva si accompagna ad un momento picchiante rispetto al centro aerodinamico.

[27] Nel momento in cui si estendano gli ipersostentatori si produce un aumento della portanza del velivolo, però la necessità di volare in volo equilibrato richiede tipicamente la generazione di una portanza negativa sui piani orizzontali di coda e ciò riduce la portanza totale del velivolo.

l'energia del fluido in regioni interne allo strato limite, dove tale energia è bassa, ritardando così la separazione. Dei due sistemi pneumatici quello a soffiamento è più semplice dal punto di vista realizzativo, poiché si dispone facilmente di aria in pressione (basta spillare del fluido in corrispondenza degli stadi opportuni del compressore del turboventola e poi immettere tale aria nelle posizioni opportune) ed infatti un sistema di questo tipo è installato sull'F-104 Starfighter (o sul MiG-21SPS), il quale trae giovamento dal sistema stesso in certe condizioni di volo manovrato ad alta incidenza, durante le quali risulta notevolmente migliorata la risposta del velivolo ai comandi sugli alettoni.

2.21 - EFFETTO DEGLI IPERSOSTENTATORI SULLA POLARE

Consideriamo adesso come la polare, che per noi è la rappresentazione più importante, si modifichi quando estendiamo gli ipersostentatori.

All'estensione dei flap si accompagna un aumento del coefficiente di portanza, ma anche un aumento di resistenza; quindi dobbiamo modificare la polare tenendo conto che, a parità di angolo d'attacco, avremo un maggior C_L ed un maggior C_D. Possiamo dunque inserire, lo indichiamo dal punto di vista qualitativo in figura 60, ulteriori rami della polare rispetto a quello relativo alla configurazione pulita, che corrispondono a valori crescenti dell'angolo di deflessione degli ipersostentatori.

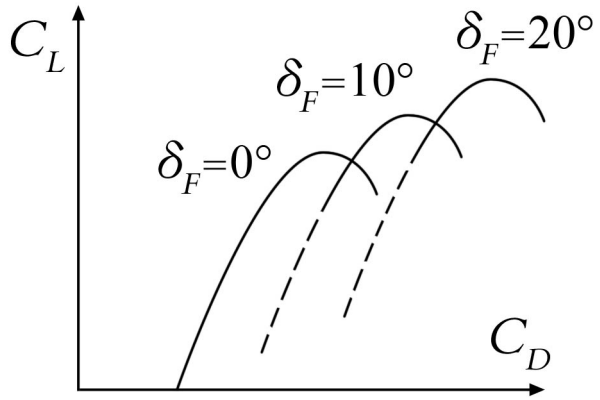


Figura 60

Notiamo infine, sempre dal grafico di figura 60, che per $\delta_F > 0$ la parte di polare relativa alle basse incidenze non è stata tracciata; la spiegazione risiede nel fatto che non avrebbe senso usare gli ipersostentatori a basse incidenze: i manuali di volo riportano le velocità massime in corrispondenza delle quali si possono usare gli ipersostentatori, perché se potessimo attivare gli ipersostentatori alla velocità di crociera, quando cioè la pressione dinamica è molto elevata, danneggeremmo gli ipersostentatori stessi se non tutta l'ala. Ciò non è co-

munque possibile dato che sistemi automatici inattivano gli ipersostentatori oltre i 400 - 500 km/h.

2.22 - EFFETTO DEGLI IPERSOSTENTATORI SULL'EFFICIENZA AERODINAMICA: INTERPRETAZIONE FISICA DI *E*

Abbiamo già visto nel § 9 la definizione di efficienza aerodinamica per un profilo; tale definizione continua a valere per tutta l'ala e più in generale per il velivolo completo

$$E = \frac{C_L}{C_D}.$$

Per determinare l'influenza che gli ipersostentatori hanno su questo fondamentale parametro dobbiamo nuovamente osservare la polare. Una volta che abbiamo a disposizione la polare possiamo tracciare una retta per l'origine passante per un punto qualunque della polare medesima, il quale sarà corrispondente ad un certo valore, che chiamiamo α', dell'angolo d'attacco (ricordiamo che ciascun punto della polare è relativo ad un certo valore dell'angolo d'attacco).

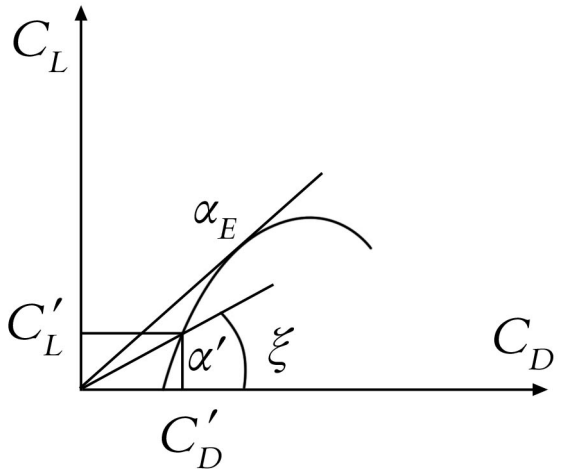


Figura 61

L'angolo sotteso da tale retta ci fornisce l'informazione sull'efficienza aerodinamica alla quale stiamo volando, poiché come possiamo notare dal grafico, abbiamo

$$\tan\xi = \frac{C'_L}{C'_D} = E'.$$

Questo ci permette di determinare immediatamente l'incidenza per la quale l'efficienza aerodinamica è massima, difatti basta tracciare dall'origine la tangente alla polare ed il valore dell'angolo d'attacco relativo al punto di tangenza individua proprio la condizione di massimo cercata. In relazione a questo discorso e ricordando la figura 46, possiamo osservare (si veda figura 62) come l'efficienza massima sia più piccola nel caso del velivolo completo e tale riduzione può arrivare anche al 50%.

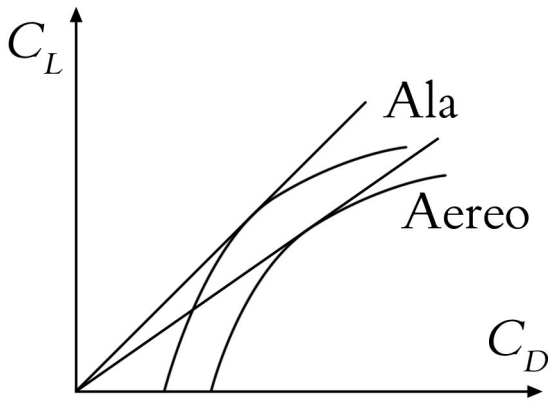


Figura 62

Detto questo possiamo interpretare gli effetti legati all'estensione degli ipersostentatori in termini di efficienza aerodinamica.

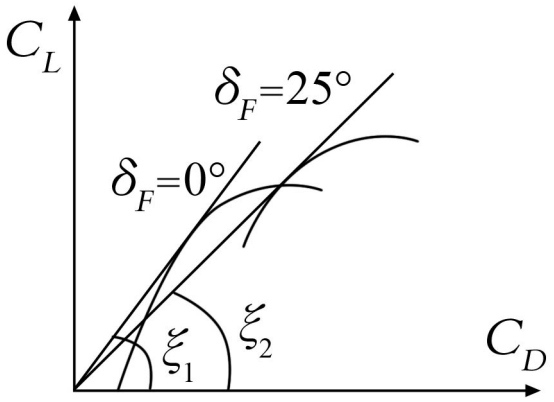


Figura 63

Come si può notare l'estensione degli ipersostentatori produce sempre una riduzione dell'efficienza della configurazione. Dovremo perciò tener sempre presente questo fenomeno, anche perché, come vedremo, l'efficienza aerodinamica è strettamente legata all'autonomia del velivolo[28] e questo può essere in un certo senso intuitivo se cerchiamo di dare a

[28] Alta efficienza significa, tra l'altro, minori consumi durante la crociera. I moderni velivoli da trasporto hanno infatti valori di efficienza massima attorno a 16-20, mentre un caccia tipo F-14 ha un'efficienza massima in volo

tale parametro un'interpretazione fisica. L'efficienza aerodinamica viene spesso definita come l'inverso di un coefficiente di attrito del velivolo: supponiamo di dover spostare un corpo che abbia un certo peso

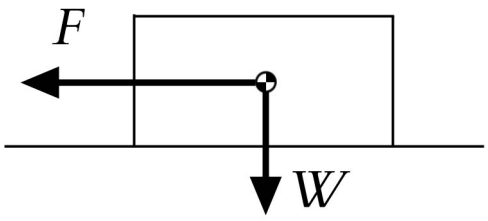


Figura 64

per far questo dobbiamo applicare una forza F legata al peso da una relazione del tipo

$$F = \quad W$$

dove è il coefficiente di attrito. Consideriamo ora un velivolo nella consueta condizione di volo rettilineo orizzontale uniforme (quindi la più semplice condizione di equilibrio che possiamo studiare) ed in volo equilibrato (quindi l'equilibrio alla rotazione è stato opportunamente realizzato)

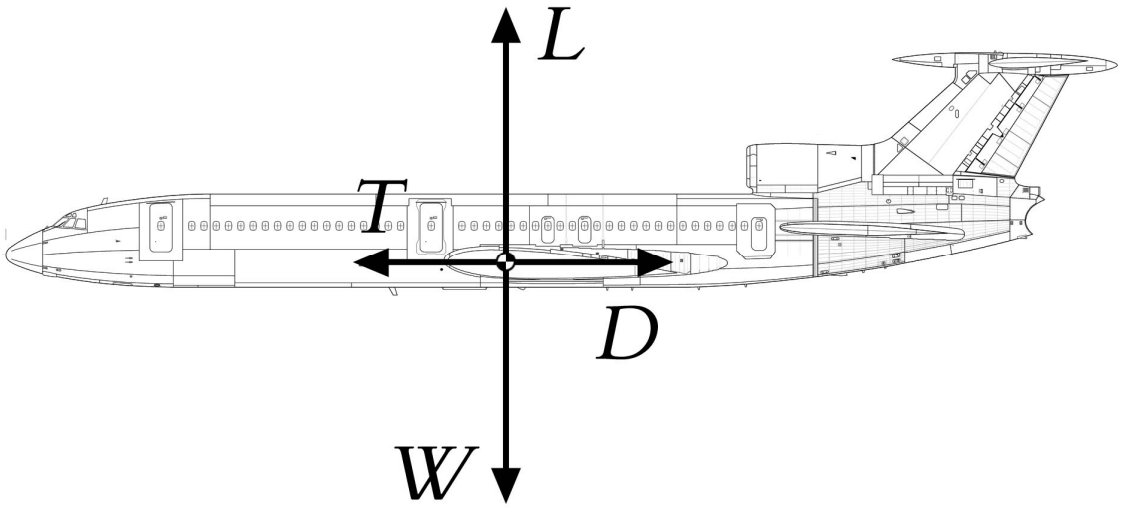


Figura 65

la portanza fa equilibrio al peso, mentre la spinta, equilibra la resistenza

---

subsonico non superiore a 10 e dell'ordine di 8 in volo supersonico; un elicottero avrà un'efficienza massima pari circa a 3-4, quindi è molto improbabile che un elicottero possa compiere un volo su una rotta molto lunga.

$$\begin{cases} L = W \\ T = D \end{cases}$$

dividendo membro a membro otteniamo la relazione fondamentale

$$T = \frac{D}{L} W$$

che possiamo anche scrivere nella forma

$$T = \frac{1}{E} W$$

Tale equazione è fondamentale e caratterizza l'equilibrio del velivolo in volo rettilineo orizzontale uniforme. Confrontando l'ultima con l'espressione di F si può notare come l'inverso dell'efficienza abbia effettivamente lo stesso significato di un coefficiente di attrito del velivolo durante il volo sostentato. L'ultima equazione, nella sua semplicità, fornisce un'informazione importantissima: dato il peso del velivolo e l'efficienza aerodinamica alla quale stiamo volando, siamo in grado di determinare la spinta che dobbiamo applicare per volare a velocità e quota costanti.

2.23 - COMMENTI FINALI

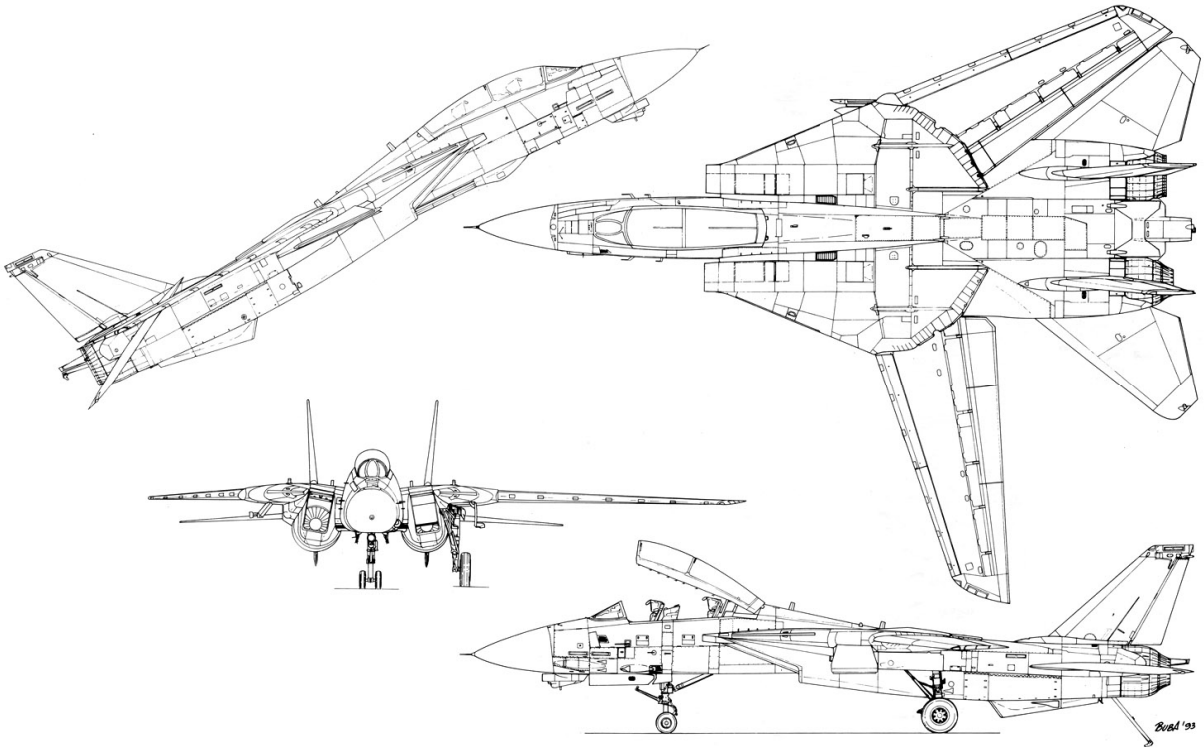
Abbiamo detto quasi tutto ciò che potevamo ritenere interessante ed utile sull'aerodinamica, per quelli che saranno gli argomenti che andremo a trattare; possiamo però fare qualche ulteriore commento. Sulla base delle poche cose che abbiamo detto, guardando l'ala di un aereo, potremmo avere un'idea di massima di quale sarà il tipo di missione per la quale il velivolo è stato costruito. Supponiamo ad esempio di osservare un velivolo con ala a pianta rettangolare, priva di angolo di freccia, con uno spessore piuttosto grande e con una curvatura ed una superficie piuttosto elevate: ala grande significa basso carico alare, curvatura elevata significa buon comportamento alle alte incidenze, grosso spessore vuol dire valori del coefficiente di portanza abbastanza grandi per un certo angolo d'attacco; penseremo quindi ad un aeroplano le cui caratteristiche principali siano il decollo e l'atterraggio in spazi brevi, non certamente un'autonomia elevata, poiché come vedremo non sarà un velivolo troppo efficiente; non certamente una velocità di crociera elevata, perché con quel tipo di ala certamente non possiamo volare ad alta velocità. All'aumentare della velocità di progetto del velivolo sicuramente la curvatura e lo spessore diminuiscono e, se comincia a contare l'efficienza in crociera (quindi bassi consumi), il carico alare comincia ad aumentare (quindi a pa-

rità di peso si riduce la superficie alare). Se arriviamo a velivoli la cui velocità di progetto è superiore a $M \approx 0,7$ osserveremo che sull'ala comparirà la freccia, lo spessore si va ulteriormente riducendo e la curvatura scompare quasi completamente. Aumentando ulteriormente il numero di Mach di volo vedremo spessori sempre più sottili, bordi d'attacco sempre più aguzzi ed angoli di freccia sempre più elevati, fino ad arrivare alla configurazione dell'ala a delta, che risulta conveniente sia dal punto di vista aerodinamico che strutturale.

Per terminare facciamo un confronto fra diverse configurazioni.

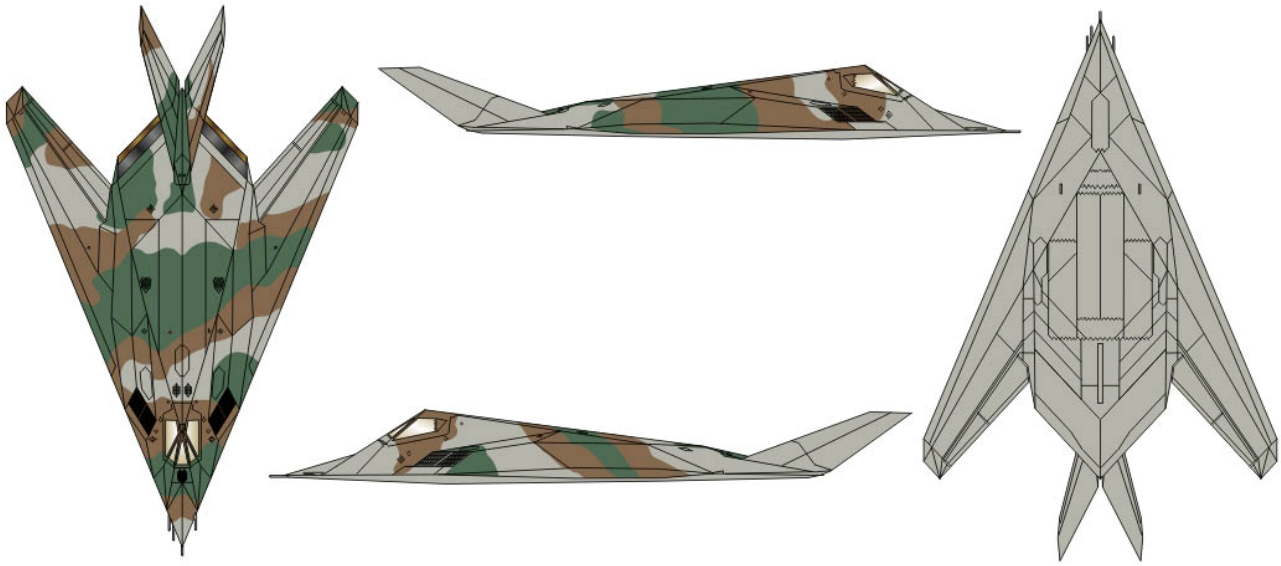
• BOEING 727-200: Questa è una classica configurazione trimotore di un turboventola da trasporto; ha un angolo di freccia che è mediamente di 27°, un allungamento alare pari circa a 7 (valore tipico e caratteristico di tutti i velivoli da trasporto), un numero di Mach di volo in crociera $M = 0,84$ per una quota di crociera di 22'000 ft (6'700 m, un valore relativamente basso), un rapporto di rastremazione intorno a 0,3.

• VOUGHT A-7D CORSAIR II: Questo è un velivolo militare abbastanza vecchio (ormai radiato), del quale notiamo il Mach di volo massimo $M = 0{,}88$ (è dunque un velivolo subsonico) a 5'000 ft, un angolo di freccia di circa 27°, un allungamento pari a 4 (valore basso in quanto tale velivolo deve poter manovrare ad alti valori di accelerazione e quindi diventa sicuramente più importante la resistenza strutturale dell'ala rispetto al consumo: la crociera economica non è certamente una specifica di progetto di questo aereo) ed osserviamo infine la configurazione ad ala alta, cioè ala connessa alla parte superiore della fusoliera), a cui molto frequentemente si associa un valore negativo dell'angolo diedro.



• GRUMMANN F-14A TOMCAT: l'F-14A è un velivolo supersonico ($M = 2{,}4$) ad alte prestazioni anch'esso piuttosto vecchio; si tratta di un velivolo con ala a geometria variabile, caduta ormai quasi completamente in disuso nei velivoli da caccia, ma ancora attuale nei bombardieri. Osserviamo come, con l'ala tutta ruotata in avanti, si arriva ad un valore dell'allungamento di circa 7,2, mentre con l'ala tutta indietro si ottiene $A \approx 1$ e la configurazione è proprio quella di un'ala a delta.

• AEROSPATIALE/BAC CONCORDE: Questo è l'unico velivolo da trasporto supersonico (il Mach di crociera è 2,02 a 15˙500 m di quota) che fu operativo; possiamo notare un basso allungamento ($A = 1{,}17$) ed un'ala definita a delta composito a causa della variazione locale dell'angolo di freccia.



• LOCKHEED F-117A: è stato il primo aeroplano a presentare una scarsa visibilità ai radiolocalizzatori ed agli infrarossi. È interessante notare come requisiti di progetto diversi (appunto la scarsa visibilità radar) abbiamo portato alla definizione di forme che sono completamente diverse da quelle viste fino ad oggi. Osserviamo come tale aeroplano abbia un angolo di freccia di 67°, quando la massima velocità operativa è di $M = 0{,}9$: dunque la frec-

cia così elevata non ha nessuna implicazione di tipo aerodinamico, quanto piuttosto quella di riflettere onde radio non nella direzione della stazione che le emette; in particolare per questo aereo ciò è richiesto dalle specifiche di progetto con sorgenti radar rappresentate da aerei (tipo gli AWACS). La forma esterna è perciò tutta finalizzata ad una specifica di progetto che non è l'efficienza di crociera né la manovrabilità, ma è la visibilità; la configurazione aerodinamica viene dunque da una sorta di intersezione di superfici piane (la semiala è realizzata con tre lastre piane nella zona inferiore e due lastre piane nella zona superiore) ed il tutto produce come effetto un velivolo tutto a spigoli. La cosa interessante è il fatto che questo sistema, che dal punto di vista aerodinamico è rappresentato da lastre piane opportunamente connesse, genera poi un'aerodinamica non così scarsa come ci si potrebbe aspettare, poiché l'insieme di lastre e spigoli produce un sistema di vortici coordinati, i quali generano delle caratteristiche aerodinamiche del tutto soddisfacenti.

• LOCKHEED F-22A: Questo è il prossimo caccia americano che entrerà in servizio dopo il 2000; anche qui scorgiamo come ci siano delle notevoli differenze, oltre che analogie, rispetto, ad esempio, al caso dell'F-14A. Qui le specifiche principali di progetto prevedono un velivolo con bassa visibilità radar ed un'alta agilità (manovrabilità). Osserviamo la forma in pianta abbastanza curiosa dell'ala, con un angolo di freccia pari a 42° per il bordo d'attacco e di −17° (freccia negativa) per il bordo d'uscita, e con un allungamento di 2,3. Osserviamo poi come la fusoliera sia connessa all'ala e finisca per contribuire notevolmente alla portanza totale della configurazione. Per tale aereo si parla di supercrociera (*supercruise*) in quanto lo F-22A ha la possibilità di volare mantenendo per lungo tempo una velocità supersonica con un Mach di 1,4 (la spinta è maggiore del peso e ciò permette la salita in accelerazione verti-

cale); il rapporto di rastremazione è di 0,17, l'angolo di svergolamento dell'ala è di −3° (valore del tutto convenzionale) e l'angolo diedro è negativo e pari a −3°. Osserviamo la configurazione a doppia coda, che è classica negli aerei supersonici da combattimento poiché riduce l'ingombro ed aumenta la visibilità che avrebbe una coda singola ed evita che il piano di coda verticale finisca in una zona in cui siano presenti vortici prodotti ad alti angoli d'attacco, spesso in modo non simmetrico, dalle zone di connessione tra ala e fusoliera, i quali potrebbero generare seri problemi di controllo del velivolo; osserviamo inoltre come i piani di coda verticali siano notevolmente inclinati. Abbiamo poi i piani di coda orizzontali con una strana forma e tutti mobili (per i motivi che vedremo) e la presenza sul bordo d'uscita dell'ala degli alettoni e dei flap che però in questo caso possono essere usati anche come alettoni. L'ultima cosa molto importante riguarda gli ugelli dei motori, i quali con dei sistemi molto complessi permettono la *vettorizzazione* della spinta, cioè consentono di orientare l'asse di spinta del motore, permettendo così di produrre coppie di controllo (soprattutto di beccheggio), le quali risultano molto efficaci nelle fasi di volo in manovra a velocità molto bassa, quando la ridotta pressione dinamica di volo rende poco efficaci le superfici di governo aerodinamico.

Capitolo 3

ATMOSFERA TIPO E VELOCITÀ CARATTERISTICHE

3.1 - IL MODELLO MATEMATICO DELL'ATMOSFERA

Cominciamo ad occuparci della cosiddetta *atmosfera di riferimento*, cioè di come venga realizzato un modello matematico dell'atmosfera dove l'aereo si trova ad operare. I motivi per i quali è necessario costruire un modello matematico dell'atmosfera sono diversi; anzitutto perché moltissime caratteristiche collegate al velivolo dipendono dall'atmosfera: le azioni aerodinamiche sono fortemente influenzate dalla densità e dalla temperatura (pensiamo all'effetto del numero di Mach e del numero di Reynolds), così come le azioni propulsive, legate a pressione e temperatura dell'aria che interagisce col motore. Supponiamo pertanto di dover scrivere tabelle o disegnare grafici all'interno di un manuale di volo, che rappresentino le prestazioni dell'aeromobile e che perciò forniscano le caratteristiche di volo dell'aereo: dato che, per i motivi sopra citati, tali prestazioni dipendono dalle caratteristiche dell'atmosfera, è intuitiva la necessità di riferire dette prestazioni ad un'atmosfera caratteristica; tale atmosfera caratteristica prende il nome di *atmosfera standard* (o *aria tipo*). L'aria tipo rappresenta dunque un modello matematico dell'aria, nel quale esiste una relazione biunivoca tra la quota ed i parametri fisici dell'atmosfera: ciò significa che se lavoriamo in aria tipo, noto un valore della quota, risultano determinati i valori di tutte le caratteristiche dell'aria e viceversa.

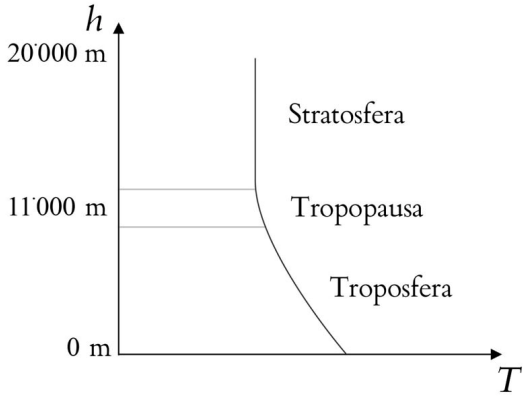


Figura 1

Il punto di partenza per la costruzione del modello dell'atmosfera si basa su una certa relazione sperimentale tra temperatura ambiente e quota, la quale prevede il fatto che la temperatura decresca lentamente a partire dal livello del mare sino ad una quota di 11˙000 m, con un gradiente di −0,0065 K/m, per poi mantenersi costante fino ad una quota di 20˙000 m.

La zona compresa tra il livello del mare e gli 11˙000 m prende il nome di *troposfera*, mentre la zona tra gli 11˙000 m fino ai 20˙000 m prende il nome di *stratosfera*; la fascia di separazione tra queste due zone prende il nome di *tropopausa*. La regione di nostro interesse non va oltre i 20˙000 m (la quota di volo, in crociera, di un aeroplano da trasporto non supera in genere i 10 - 12 km).

Fatta questa fondamentale considerazione, osserviamo quali equazioni si usino per formulare il modello dell'atmosfera tipo; la prima è l'equazione di stato dei gas perfetti (per unità di volume)

$$P = \varrho R T$$

e la seconda è l'equazione dell'idrostatica, che prevede all'interno dell'atmosfera tipo una variazione della pressione di tipo statico

$$dP = -\varrho g dh$$

dividendo tra loro tali due equazioni otteniamo un'equazione integrale

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT} dh$$

che dovrà essere integrata in corrispondenza delle due zone che abbiamo identificato prima.

- TROPOSFERA

Tenendo presente che $\frac{dT}{dh} = -0,0065 \text{ K/m} = a$, per quanto riguarda l'andamento della temperatura, integrando, si ottiene

$$T = T_{LM} + a\left(h - h_{LM}\right)$$

dove la quota al livello del mare è nulla per definizione ($h_{LM} = 0$). Sostituendo nella equazione integrale $dh = \frac{dT}{a}$ si ottiene

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{Ra}\frac{dT}{T}$$

che integrata fra il livello del mare e la generica quota h fornisce

$$\ln\left(\frac{P}{P_{LM}}\right) = -\frac{g}{Ra}\ln\left(\frac{T}{T_{LM}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{P_{LM}} = \left(\frac{T}{T_{LM}}\right)^{-\frac{g}{Ra}}$$

dove i valori dei parametri dell'atmosfera a livello del mare sono tutti noti e corrispondono ai valori medi misurati ad una latitudine di 40° N. Abbiamo così ottenuto la variazione della pressione, in atmosfera tipo nella troposfera in funzione della temperatura, il che è del tutto equivalente a dire in funzione della quota. Completiamo il discorso esprimendo anche la variazione della densità: la cosa è immediata in quanto l'equazione di stato si può scrivere

$$\frac{P}{P_{LM}} = \frac{\varrho}{\varrho_{LM}}\frac{T}{T_{LM}}$$

quindi

$$\frac{\varrho}{\varrho_{LM}} = \frac{P}{P_{LM}}\left(\frac{T}{T_{LM}}\right)^{-1} = \left(\frac{T}{T_{LM}}\right)^{-\frac{g+Ra}{Ra}}.$$

Nota la variazione con la quota della temperatura, della pressione e della densità, tutte le altre caratteristiche fisiche dell'atmosfera (viscosità, velocità del suono, ecc.) possono essere determinate.

- STRATOSFERA

Dato che, nell'ambito dell'atmosfera tipo, al di sopra degli 11 km e fino a circa 20 km, la temperatura si mantiene costante, integrando l'equazione differenziale $\frac{dP}{P} = -\frac{g}{RT}dh$ tra il valore ad 11 km ed una generica quota stratosferica, si ottiene

$$\ln\left(\frac{P}{P_s}\right) = -\frac{g}{RT_s}(h - h_s) \;\Rightarrow\; \frac{P}{P_s} = e^{-\frac{g}{RT_s}(h-h_S)}$$

dove $h_s = 11$ km, P_s è la pressione ad 11 km e $T_s = T_{LM} + ah_s$. Per quanto riguarda la densità, essendo la temperatura costante, dall'equazione di stato si ricava

$$\frac{P}{P_s} = \frac{\varrho}{\varrho_s}$$

e quindi

$$\frac{\varrho}{\varrho_s} = e^{-\frac{g}{RT}(h-h_s)}$$

La densità, cioè, varia nella stratosfera con la stessa legge di variazione della pressione. Anche nel caso della stratosfera conoscendo la variazione di temperatura, pressione e densità con la quota, siamo in grado di determinare la variazione di tutte le altre grandezze di stato dell'atmosfera.

Le informazioni relative all'andamento delle grandezze fisiche dell'atmosfera al variare della quota in atmosfera di riferimento sono riportate su tabelle; nei manuali di volo le caratteristiche sono sempre rappresentate in termini di aria tipo.

3.2 - MISURAZIONE DELLA QUOTA.

La misurazione della quota su un velivolo viene effettuata mediante una misura di pressione; sui velivoli esistono due tipi di altimetri, l'*altimetro barometrico*, il quale fornisce la quota in base ad una misura di pressione statica, e il *radioaltimetro*, il quale viene utilizzato nella fase finale dell'avvicinamento alla pista in quanto fornisce una eccellente accuratezza e segna zero quando i carrelli toccano terra. In genere l'altimetro radio viene usato a partire da quote non superiori alle poche centinaia di metri, mentre per tutti gli altri livelli di volo, l'informazione sulla quota proviene da una misura di pressione statica. L'altimetro barometrico, per gran parte delle condizioni di volo[2], è tarato rispetto alla pressione del livello del mare in atmosfera tipo: una presa di pressione registra il valore della pressione statica tenendo conto che la pressione di riferimento è quella al livello del mare in aria tipo, e attraverso le relazioni viste nel § precedente, tale misura viene convertita in una misura di quota. Il valore che così si ottiene non corrisponde alla quota geometrica del velivolo, ma in questo modo due velivoli che viaggiano allo stesso livello, misureranno la stessa quota, che prende il nome di *altezza di pressione*.

Altimetro barometrico di un Sukhoj Su-27[1]

[1] Caccia intercettore monoposto bimotore.

[2] In particolare in Europa, fino al cosiddetto livello di transizione 70, cioè 7˙000 ft di quota (2˙133,6 m).

La conoscenza della quota geometrica non è rilevante, perlomeno quando la quota di volo non è bassa; l'importante è che tutti gli aeromobili abbiano gli altimetri tarati allo stesso modo, affinché, volando alla stessa quota e nella stessa zona, misurino lo stesso valore di altezza di pressione, garantendo così la sicurezza per quanto riguarda la separazione dei livelli di volo. Tale informazione non è sufficientemente accurata invece nel caso di atterraggio e così, al di sotto del livello di transizione 70, viene comunicata all'equipaggio un'informazione che permette di selezionare l'altimetro radio, in modo che questo fornisca una misura molto prossima alla quota geometrica.

Ai fini delle procedure di volo e del controllo del traffico aereo, la posizione verticale di un aeromobile viene determinata mediante l'altimetro a pressione. Esso si basa sulla legge di variazione della pressione atmosferica in funzione dell'altitudine.

L'altimetro è costituito da una scatola, la quale, attraverso la presa statica del tubo di Pitot installato sulla fusoliera, è in comunicazione con l'aria nella quale l'aeromobile vola. Entro la scatola è posta una capsula aneroide, nell'interno della quale è stato fatto il vuoto. La capsula è libera di espandersi e di comprimersi in funzione della pressione esterna: salendo in quota si espande giacché cala la pressione e viceversa.

Radioaltimetro di un Su-27
(метры, metri)

La taratura della capsula barometrica dell'altimetro viene fatta per tutti gli strumenti in atmosfera tipo. In campo internazionale l'ISA (*International Standard Air*) è definita come quell'atmosfera in cui l'aria è completamente secca, la temperatura al livello del mare è di 15 °C, la pressione al livello del mare è di 760 mmHg, la diminuzione verticale della temperatura è di 6,5 °C per ogni 1˙000 m fino alla temperatura di −56,5 °C.

Ciò significa che lo strumento per qualsiasi valore di pressione indica la corrispondente altezza secondo le leggi dell'aria tipo. Inoltre, per evitare di provvedere alla conversione della pressione in altitudine, gli altimetri usati in aviazione forniscono direttamente la distanza verticale dell'aeromobile rispetto ad un livello di riferimento e, pertanto, lo strumento segnerà quota zero quando lo stesso, in aria reale, è sollecitato da una pressione effettiva di 1˙013,25 hPa.

La pressione atmosferica su ogni dato punto della superficie della terra è naturalmente e continuamente soggetta ad aumenti e diminuzioni; il punto dello spazio in cui può trovarsi la pressione di 1˙013,25 hPa a sua volta sale o scende e lo possiamo avere effettivamente al livello del mare come pure al di sotto di tale livello.

Per conoscere l'esatta posizione verticale di un aeromobile negli altimetri vi è un dispositivo che permette di variare il dato di pressione di riferimento. A tal fine, nel quadrante dello strumento, esiste una finestrella (chiamata *finestra di Kollsman*) graduata in valori di pressione (hPa o pollici di mercurio) che, mediante un apposito bottone, può essere regolata

in modo da farle indicare un voluto dato di riferimento. Questa operazione si chiama *regolaggio altimetrico*. In pratica ruotando l'apposito nottolino zigrinato non si fa altro che muovere l'indice dell'altitudine essendo tale nottolino collegato meccanicamente all'indice delle altitudini.

Abbiamo detto quindi che l'altimetro è uno strumento che indica la quota di un aeromobile, cioè la distanza verticale che, ad un certo istante, separa il velivolo da una superficie usata come riferimento, che può essere convenzionale o reale: il livello medio del mare (*mean sea level*), il terreno, il livello di volo. Ci ritroveremo così a leggere sul quadrante secondo la regolazione impostata:

ALTEZZA: distanza verticale dell'aeromobile da un punto della superficie terrestre, come ad esempio un monte od un aeroporto.

ALTITUDINE: distanza verticale dell'aeromobile dal livello del mare.

LIVELLO DI VOLO (quota pressione): distanza verticale tra aeromobile e la superficie isobarica 1˙013,25 hPa, in condizioni di aria tipo.

ELEVAZIONE: altezza dal livello del mare di un terreno.

La conoscenza della quota è di fondamentale importanza per mantenere la distanza di sicurezza dal suolo, ma anche per garantire le separazioni verticali tra i diversi velivoli e per seguire una determinata traiettoria di procedura, soprattutto in fase di decollo e avvicinamento.

La taratura della scala altimetrica viene effettuata facendo corrispondere ad ogni valore di pressione l'altitudine che si avrebbe in atmosfera tipo. L'atmosfera reale generalmente si discosta da quella tipo, determinando un errore nella valutazione della quota. Gli errori da cui possono essere affette le misure altimetriche dipendono da cause meccaniche legate allo strumento, dagli errori di lettura e dai fattori meteorologici come la differenza tra il gradiente termico verticale effettivo e quello che vi sarebbe in aria tipo (errore di temperatura, variabile nel tempo e nello spazio), oppure differenza tra la pressione effettiva ad un certo livello di riferimento e quella che vi sarebbe in condizioni di aria tipo (errore di pressione, variabile nel tempo e nello spazio).

Gli errori di temperatura si presentano quando il gradiente termico verticale sia diverso da quello stabilito per l'aria tipo. L'altimetro darà indicazioni corrette solo nel caso in cui la temperatura alla quota dell'aeromobile risulti uguale a quella in aria tipo a quella quota. Un aeromobile in rotta isobarica seguirà una traiettoria in discesa se si dirige verso una zona a temperatura decrescente, mentre sarà in salita se volerà verso una zona di aria calda in quanto le isobare (linee che uniscono punti di ugual pressione) si distanziano maggiormente ri-

spetto alle stesse in aria fredda. Calcoli matematici ci dimostrano come l'errore aumenta con la quota, mentre è pressoché nullo al livello del mare: errori di temperatura e pressione si possono anche presentare insieme lungo la rotta dando una risultante che può arrivare anche all'ordine dei 2˙000 ft.

In funzione della correzione dell'errore di pressione e del riferimento utilizzato, esistono vari modi di regolazione di un altimetro. Per facilitare la trasmissione nei servizi delle telecomunicazioni, alcuni di tali metodi si identificano con apposite voci del codice "Q":

QNH: pressione atmosferica reale all'elevazione di una località e riportata al livello del mare mediante tabelle di aria tipo. Il QNH è pertanto il valore di pressione da inserire nell'altimetro affinché questo, all'atterraggio, indichi l'elevazione aeroportuale ed al livello del mare segni zero.

QFE: pressione atmosferica corrispondente al livello dell'aerodromo. Se si inserisce il QFE, l'altimetro indica l'altezza assoluta dell'aeromobile in volo rispetto l'aeroporto e, quindi, indicherà zero all'atterraggio.

QNE: pressione atmosferica reale al livello del mare in condizioni di aria tipo. In parole povere esso è l'altezza che intercorre, in aria tipo, tra la pressione atmosferica di un dato luogo e la pressione standard di 1˙013,25 hPa. In pratica il QNE di un dato aeroporto corrisponde alla distanza verticale, in condizioni di aria tipo, tra il QFE dell'aeroporto e la pressione 1˙013,25 hPa. Vedremo anche che sarà utilizzato per mantenere adeguata separazione tra aeromobile al di sopra di una certa quota, essendo un valore fisso.

QFF: pressione atmosferica al livello del mare calcolata partendo dalla pressione misurata al livello dell'aerodromo cioè dal QFE e considerando l'atmosfera come aria reale; l'altimetro segnerà le altitudini.

Un altimetro tarato in aria tipo e regolato sul QNH, quando posto al livello della stazione segnerà la sua elevazione e quando in volo, altitudini. In effetti, quando il pilota chiede a terra il QNH, egli intende chiedere con quale pressione deve regolare il suo altimetro perché, se fosse a terra sullo stesso punto della stazione, esso indichi l'altitudine effettiva della stazione. Per un aeromobile che usa il QNH la distanza verticale dagli ostacoli è ottenibile per differenza tra l'altitudine letta sull'altimetro e la nota elevazione degli ostacoli stessi (ottenibile dalle carte aeronautiche). Quando su un aeroporto non esiste un ente ATS in grado di fornire il QNH, un pilota, conoscendo l'altitudine dell'aerodromo, può comunque conoscere il QNH del posto. Si opera nella seguente maniera: si fa ruotare il nottolino di regolaggio fino a far indicare alle lancette altimetriche l'altitudine effettiva dell'aeroporto. Il corrispondente valore di pressione che si legge sul quadrante barometrico rappresenta il QNH del luogo in quel dato momento.

Un altimetro tarato in aria tipo e regolato sul QFE, quando posto al livello della stazione segnerà distanza verticale zero e quando in volo altezze. Il QFE viene usato ogni qualvol-

ta il pilota desidera che durante l'avvicinamento per l'atterraggio il suo altimetro indichi l'altezza effettiva dell'aeromobile sul livello della pista. Il QFE si ottiene dalla torre dell'aeroporto sul quale si intende atterrare, ed una volta inserito nell'altimetro le indicazioni di questo saranno altezze rispetto la pista di volo. Questo tipo di regolaggio non ha alcuna utilità nel volo in rotta.

Il regolaggio standard, in altre parole il QNE, consiste nel regolare l'altimetro facendo comparire sul quadrante barometrico il valore della pressione al livello del mare in aria tipo e cioè 1˙013,25 hPa. Con questa regolazione lo strumento indica l'altitudine effettiva sopra un dato punto sul livello del mare, purché su tale punto la pressione esistente sia di 1˙013,25 hPa. Ogni qualvolta la pressione sia diversa da tale valore o le caratteristiche dell'atmosfera reale non siano conformi a quelle dell'atmosfera tipo, l'altimetro indicherà un'altitudine diversa dall'effettiva. Questo modo di regolazione, tuttavia, offre il grande vantaggio di essere sempre lo stesso nel tempo e nello spazio, per cui è utile nella separazione verticale degli aeromobili, nella quale non è essenziale la distanza verticale dal terreno, bensì la distanza verticale tra un velivolo ed un altro.

L'uso del regolaggio tipo ha condotto allo sviluppo della separazione verticale degli aeromobili in volo con il sistema dei *livelli di volo* (FL, Flight Level). Si definisce livello di volo quella superficie di pressione atmosferica costante riferita ad una specifica pressione di riferimento e separata dal livello contiguo da uno specifico intervallo di pressione. Conseguentemente, il sistema dei livelli di volo consiste in una serie di livelli di pressione atmosferica costante, essenzialmente paralleli, separata tra loro da specifici intervalli e con il livello zero coincidente col livello che ha come riferimento la 1˙013,25 hPa. Gli FL consecutivi al livello zero sono numerati di cinque in cinque come indicazione della centesima parte dell'altitudine, espressa in piedi, letta sull'altimetro, ad esempio FL 90 = 9˙000 ft.

Una volta raggiunto un FL, per mantenerlo il pilota deve volare conservando un'indicazione costante dell'altimetro, anche se ciò comporti una variazione della quota reale rispetto al suolo. A causa delle variazioni di temperatura dell'atmosfera, la relazione altezza-pressione che si riscontra in realtà non corrisponde a quella dell'aria tipo. Per un pilota che vola seguendo un FL, l'adeguata separazione dal terreno è ottenibile assicurandosi che il FL prescelto non infranga l'altitudine minima di rotta stabilita; ecco perché i livelli di volo si usano solo al di sopra di una determinata quota fissa per ogni aeroporto, stabilita in modo tale che venga assicurata una separazione minima dagli ostacoli. A tal proposito si definisce:

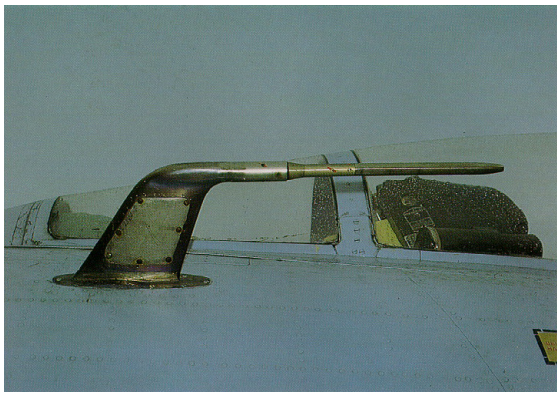
ALTITUDINE DI TRANSIZIONE (TA): l'altitudine al di sopra della quale si vola per livelli di volo (ad esempio a Bologna è 6˙000 ft).

STRATO DI TRANSIZIONE: lo spazio compreso tra l'altitudine di transizione ed il livello di transizione.

LIVELLO DI TRANSIZIONE (TL): il più basso livello disponibile al di sotto del quale si vola per altitudini. Esso varia in funzione del QNH locale del momento in modo da garantire sempre almeno i 1˙000 ft di quota dello strato di transizione.

Un adeguato regolaggio altimetrico è indispensabile. Bisogna ricordare altresì che un incidente non è quasi mai dovuto ad un singolo errore, ma ad una concatenazione di eventi sfavorevoli e, se si vuole evitarlo, si deve spezzare almeno un anello di questa catena.

3.3 - CALIBRAZIONE DELL'ANEMOMETRO: VELOCITÀ CARATTERISTICHE



Tubo di Pitot montato sulla fiancata destra di un Sukhoj Su-27

La velocità di un aeromobile viene misurata con il *tubo di Pitot*. Nella sua forma più semplice, il tubo di Pitot, permette la misura di una pressione differenziale, tra la pressione di ristagno, determinata in genere mediante una presa posta nella parte anteriore del tubo, e la pressione statica, misurata da una presa statica. Da questa differenza di pressione si ricava la velocità. Se leggiamo i manuali di volo troviamo citate diverse definizioni di velocità: nello specifico si parla di *velocità indicata*, *velocità calibrata*, *velocità equivalente* e *velocità vera*. Illustriamo il significato di tali termini.

- VELOCITÀ INDICATA

La velocità che il pilota legge sull'*anemometro* viene detta velocità indicata V_{IAS} (IAS *indicated air speed*).

L'anemometro è lo strumento che consente di misurare la velocità dell'aereo relativa alla massa d'aria che lo circonda. L'informazione cioè fornita al pilota è affetta da tre tipi di errori.

Errore di postazione. È l'errore prodotto dall'assetto dell'aereo, che, specialmente alle basse velocità, inducono sensibili variazioni della pressione statica. La correzione viene effettuata sommando algebricamente alla IAS i valori di velocità ottenuti dall'apposito grafico, fornito dal costruttore nel manuale di volo.

Errore di compressibilità. Questo errore deve essere tenuto in considerazione operando con aerei a getto, o comunque ad elevate prestazioni. Esso diventa infatti rilevante quando

la velocità cresce al punto da riuscire a comprimere le molecole d'aria all'interno della camera della presa dinamica.

Errore di densità. È l'errore più rilevante dell'anemometro, di cui bisogna sempre tener conto per ottenere la *velocità vera*. L'anemometro è tarato in modo che l'indice segni esattamente la velocità del moto dell'aereo rispetto all'aria, quando l'aria in cui ha luogo il volo possiede tutte le caratteristiche dell'atmosfera tipo al livello del mare. Quando ciò non avviene, cioè quando l'aria ha una densità diversa, lo strumento segna valori di velocità che non corrispondono a quelli della reale velocità di volo. Salvo casi particolari in cui l'aereo si trovi a volare nelle depressioni terrestri o a bassissima quota in condizioni di alta pressione e bassa temperatura, l'errore di densità rende sempre la velocità indicata minore della velocità effettiva di volo.

• VELOCITÀ CALIBRATA E VELOCITÀ VERA

La velocità calibrata V_{CAS} (CAS *calibrated air speed*) è la misura di velocità corretta dagli *errori di postazione e compressibilità*, introdotti dalle anomalie degli impianti, dagli assetti dell'aereo e dalla compressibilità dell'aria; viene detta velocità calibrata perché essa non misura ancora la *velocità vera* di volo V_{TAS} (TAS *true air speed*). Per velivoli che operino in condizioni subsoniche a basse velocità possiamo fare l'ipotesi di fluido incompressibile ed impiegare l'equazione di Bernoulli

$$P + \frac{1}{2}\varrho V^2 = P_0$$

(dove con P_0 si è indicata la pressione totale) si ottiene la velocità vera

$$V_{TAS} = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\varrho}}.$$

Otteniamo la formula di calibrazione dalla stessa espressione se al posto della densità effettiva in quota si pone la densità al livello del mare in atmosfera tipo

$$V_{CAS} = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\varrho_{LM}}}.$$

Tale discorso però, come specificato, è vero solo per basse velocità di volo, dato che l'equazione utilizzata per la formula di calibrazione è valida solo nel caso incompressibile. Valutiamo sino a che valore della velocità o del numero di Mach possiamo utilizzare tale

formula di calibrazione per misurare la velocità di volo. Al fine di studiare l'errore sulla velocità che commettiamo quando usiamo questa formula, risulta opportuno determinare la funzione

$$\left(\frac{P_0 - P}{\frac{1}{2}\varrho V^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

che, in condizioni di fluido incomprimibile, vale 1. Per vedere quanto vale invece tale funzione al variare del numero di Mach utilizziamo delle espressioni derivate dalla cosiddetta equazione di Bernoulli per fluidi comprimibili, ed in particolare utilizziamo la

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \delta M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(dove $\delta = \frac{\gamma - 1}{2} \approx 0{,}22$ e $\gamma = \frac{c_P}{c_V} \approx 1{,}44$) che fornisce il rapporto tra la pressione di ristagno (o totale) e la pressione statica in funzione del numero di Mach[3]; l'altra relazione che sfruttiamo è fornita dalla definizione della velocità del suono

$$a^2 = \gamma \frac{P}{\varrho}.$$

Avendo a disposizione tali relazioni possiamo scrivere

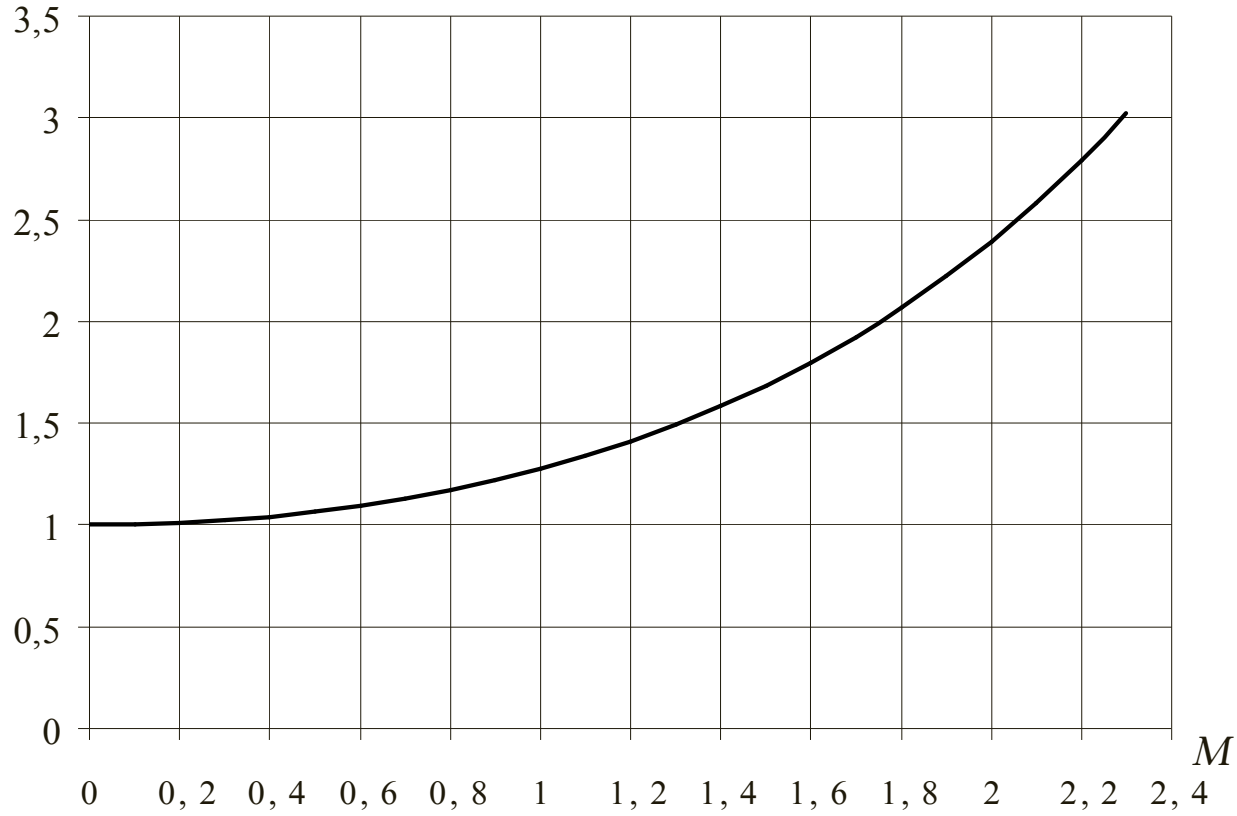
$$\frac{P_0 - P}{\frac{1}{2}\varrho V^2} = \frac{\frac{P_0}{P} - 1}{\frac{1}{2}\frac{\varrho}{P} V^2} = \frac{\frac{P_0}{P} - 1}{\frac{1}{2}\gamma M^2}$$

la velocità che compare nella formula precedente è la *velocità vera*. Semplificando e tenendo conto delle relazioni scritte prima, si ha

$$\frac{P_0 - P}{\frac{1}{2}\varrho V^2} = \frac{2}{\gamma M^2}\left[\left(1 + \delta M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right].$$

[3] Senza scendere in ulteriori dettagli diciamo solo che tale formula si deduce dall'equazione di bilancio della quantità di moto per fluidi comprimibili e con riferimento ad una trasformazione isentropica e stazionaria. Per maggiori dettagli vedi Filippo Sabetta, *Gasdinamica*, capitolo 3.

Il grafico della relazione così ottenuta in funzione del numero di Mach mostra il seguente andamento.



Errori di compressibilità - Figura 2

La conclusione è dunque che possiamo volare con un misuratore di velocità che utilizzi una formula di calibrazione per fluidi incompressibili fino a numeri di Mach di volo non superiori a 0,4; al di sopra di tale valore commettiamo un errore troppo grande e dobbiamo utilizzare una formula di calibrazione che tenga conto della compressibilità dell'aria. Per ottenere tale relazione partiamo sempre da una misura di pressione differenziale che possiamo esprimere come

$$P_0 - P = \left(\frac{P_0}{P} - 1\right) P = \left[\left(1 + \delta \frac{V^2}{a^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right] P$$

della quale esplicitando la velocità, che è una *velocità vera*, otteniamo

$$V_{TAS} = \sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\varrho}}.$$

La formula della V_{CAS} si basa sulla stessa espressione, nella quale la differenza di pressione ($P_0 - P$) è quella effettivamente misurata, mentre pressione e densità sono al livello del mare in aria tipo

$$V_{CAS} = \sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P_{LM}} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_{LM}}{\varrho_{LM}}}.$$

Attenzione al fatto che la differenza di pressione misurata dal tubo di Pitot è quella effettiva, mentre la pressione statica è quella al livello del mare. Come già detto, la velocità calibrata sarebbe quella che leggeremmo sullo strumento se non vi fossero gli errori di assetto e di compressibilità; poiché tali errori sono comunque presenti, per ottenere la velocità calibrata dalla velocità indicata sui manuali di volo sono riportate delle tabelle che permettono di definire la correzione ΔV_1, (che, per quanto detto riguardo agli errori citati, può essere funzione degli angoli aerodinamici α e β) che va apportata alla V_{IAS} per ottenere la V_{CAS}.

- VELOCITÀ EQUIVALENTE

La velocità equivalente V_{EAS} (EAS *equivalent air speed*) è la V_{CAS} corretta dall'errore di pressione, o meglio la velocità vera calcolata con la densità al livello del mare; la relazione da considerare è pertanto la seguente

$$\frac{1}{2}\varrho_{LM}V_{EAS}^2 = \frac{1}{2}\varrho V_{TAS}^2.$$

Definiamo la velocità equivalente come quella velocità che, con riferimento alla densità al livello del mare in atmosfera tipo, elevata al quadrato e moltiplicata per la metà della densità al livello del mare, fornisce lo stesso valore della pressione dinamica effettiva di volo. Notiamo come, dall'espressione precedente e dall'espressione della velocità vera, si ottenga per fluidi incompressibili

$$V_{EAS} = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\varrho_{LM}}} = V_{CAS}$$

cioè nel caso incompressibile la velocità equivalente coincide con la velocità calibrata e quindi la formula di calibrazione per fluidi incompressibili fornisce direttamente quella che per il pilotaggio è la velocità fondamentale (vedremo meglio più avanti il perchè).

Nel caso di fluido compressibile invece, la V_{EAS} differisce dalla V_{TAS} per un rapporto di densità

$$V_{EAS} = \sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\varrho_{LM}}}$$

e quindi

$$\frac{V_{TAS}}{V_{EAS}} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\varrho}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\varrho_{LM}}}} = \sqrt{\frac{\varrho_{LM}}{\varrho}}$$

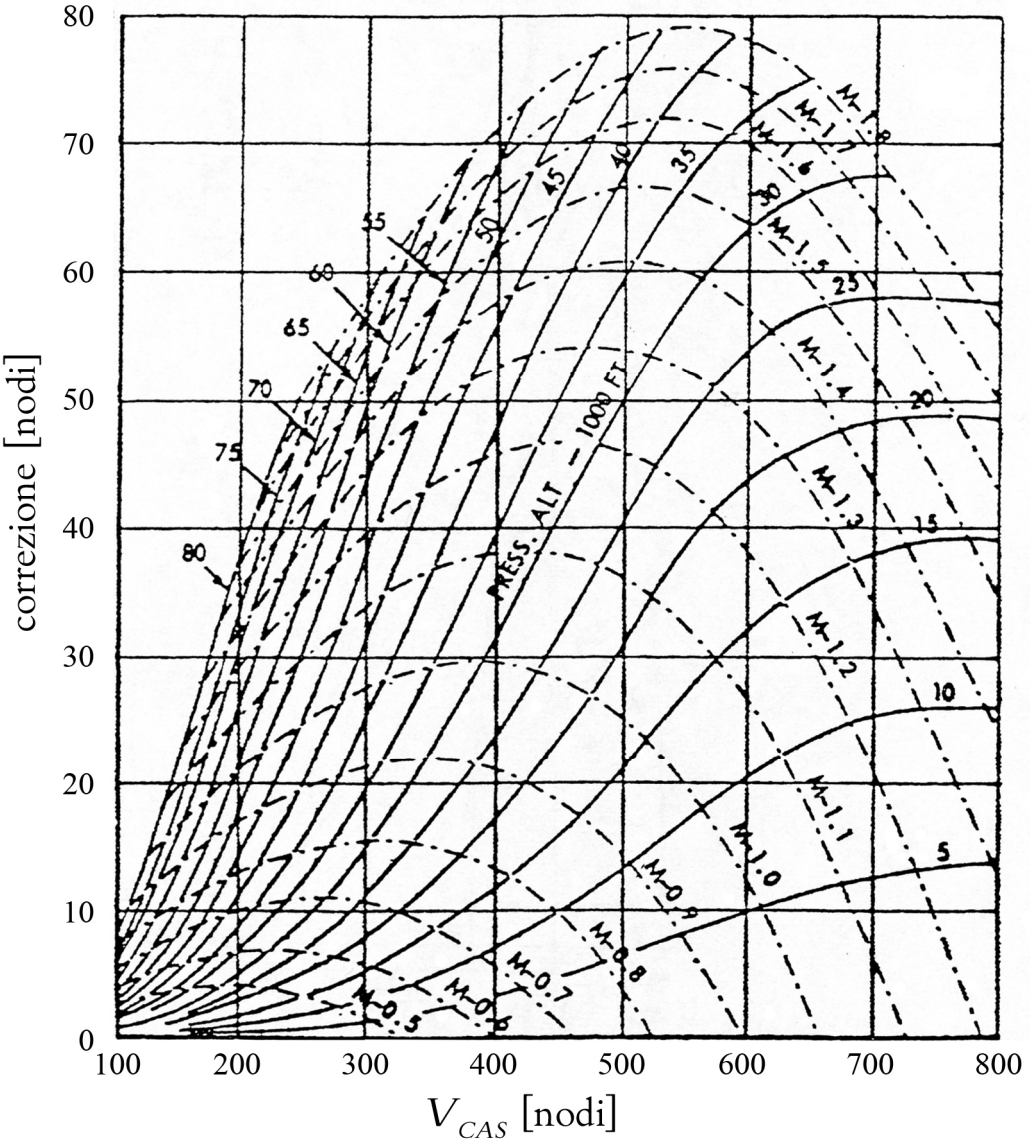
mentre nella formula di calibrazione dalla V_{CAS} compare anche la pressione al livello del mare; possiamo quindi esprimere il rapporto tra la V_{EAS}, ricavata dalla definizione tenendo però conto ora della espressione della V_{TAS}, e della V_{CAS}, otteniamo

$$\frac{V_{EAS}}{V_{CAS}} = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\varrho_{LM}}}}{\sqrt{\left[\left(\frac{P_0 - P}{P} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\frac{2\gamma}{\gamma - 1}\frac{P_{LM}}{\varrho_{LM}}}} = \sqrt{\frac{P}{P_{LM}}}$$

Nei manuali di volo sono riportati in genere del grafici i quali permettono di determinare, nota la velocità calibrata, una correzione che ci consente di passare alla velocità equivalente

$$\Delta V_C = V_{CAS} - V_{EAS}$$

tale correzione (che possiamo anche esprimere in termini del rapporto F) viene frequentemente chiamata correzione di compressibilità; tale definizione però genera una notevole confusione, in quanto la formula di calibrazione di V_{CAS} tiene già conto della compressibilità dell'aria, potremmo quindi dare una spiegazione di quella definizione dicendo che la correzione è necessaria solo nel caso di fluido compressibile, poiché nel caso di fluido incompressibile la V_{EAS} e la V_{CAS} sono uguali. Un classico esempio di grafico presente nei manuali di volo e che permette di determinare la correzione ΔV_C è quello riportato in figura 3: in ascissa abbiamo la velocità calibrata, in ordinata abbiamo la correzione (entrambe riportate in nodi) e sul grafico abbiamo una serie di curve parametrizzate con l'altezza di pressione (espressa in piedi); nota dunque la velocità calibrata e l'altezza di volo possiamo determinare la correzione da apportare alla V_{CAS} per ottenere la V_{EAS}: se ad esempio abbiamo $V_{CAS} = 400$ nodi ed un altezza di volo $h = 30'000$ piedi , la correzione che leggiamo è di circa 30 nodi, dunque nient'affatto trascurabile.



Correzione di pressione per la velocità calibrata - Figura 3

Riassumendo quindi:

$$\text{IAS} \xrightarrow[\text{posizione e di compressibilità}]{\text{corretta dagli errori di}} \text{CAS} \xrightarrow[\text{di pressione}]{\text{corretta dagli errori}} \text{EAS} \xrightarrow[\text{di densità}]{\text{corretta dagli errori}} \text{TAS}$$

3.4 - CONCLUSIONI

Riassumiamo brevemente quanto introdotto nel § precedente circa l'ottenimento delle diverse velocità caratteristiche: viene letta sull'anemometro la velocità indicata V_{IAS}, la quale dovrà essere corretta per eliminare le fonti di errore che abbiamo citato; otteniamo così la velocità calibrata V_{CAS} e questa volta è necessaria una seconda correzione per ottenere la

velocità equivalente V_{EAS}; moltiplicando poi per la radice del rapporto fra la densità in quota e la densità al livello del mare otteniamo la velocità vera V_{TAS}.

In genere tali operazioni vengono fatte, a bordo, da un calcolatore (*air data computer*) il quale è preposto all'organizzazione e presentazione di tutte queste informazioni, di solito la velocità equivalente e la velocità vera.

Dal punto di vista del pilotaggio la grandezza fondamentale è sicuramente la V_{EAS}. In primo luogo perchè risulta più comodo calcolare la V_{EAS} dato che le grandezze misurate sono la differenza di pressione $P_0 - P$ e la pressione statica P, in quanto la densità al livello del mare è una grandezza nota; determinare invece la velocità vera richiede una misura di temperatura per poi determinare la densità in quota.

Secondo poi, l'interesse del pilota è quasi sempre rivolto alla velocità equivalente, dal punto di vista del pilotaggio infatti una delle grandezze fondamentali è la pressione dinamica cui è sottoposto il velivolo e ricordiamo che, proprio per la sua definizione, la velocità equivalente, a meno di una costante, fornisce il valore della pressione dinamica effettiva di volo, mentre se vogliamo arrivare a conoscere la pressione dinamica a partire dalla velocità vera dobbiamo per forza avere anche una misura della densità.

Un'altra grandezza cui il pilota è interessato è il valore del coefficiente di portanza: facendo riferimento all'equazione di equilibrio

$$W = L$$

si ottiene

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\varrho S V_{TAS}^2} = \frac{2\frac{W}{S}}{\varrho V_{TAS}^2}$$

dove il carico alare W/S è un parametro noto, ma se anche conosciamo la V_{TAS} non siamo ancora in grado di determinare il coefficiente di portanza a cui sta volando l'aereo perché abbiamo bisogno di determinare anche la densità; possiamo però esprimere il C_L, tenendo conto della definizione di V_{EAS}, anche come

$$C_L = \frac{2\frac{W}{S}}{\varrho_{LM} V_{EAS}^2} = \frac{c}{V_{EAS}^2}$$

ed in questo caso basta conoscere la velocità equivalente per ricavare il C_L, in quanto tutte le altre grandezze sono costanti note, senza perciò dover effettuare altre misure.

Un ulteriore esempio che ci mostra come la velocità equivalente risulti molto più importante della velocità vera è il seguente: supponiamo che i manuali di volo riportino la velocità di stallo TAS del velivolo, che per definizione è

$$V_{S_{TAS}} = \sqrt{\frac{2\frac{W}{S}}{\varrho C_{L_{MAX}}}}$$

scritta in questo modo però la velocità di stallo dipende dal valore della densità e dunque tale velocità dovrebbe essere riportata sui manuali di volo per ogni possibile valore della quota; in termini di velocità di stallo equivalente invece

$$V_{S_{EAS}} = \sqrt{\frac{2\frac{W}{S}}{\varrho_{LM} C_{L_{MAX}}}}$$

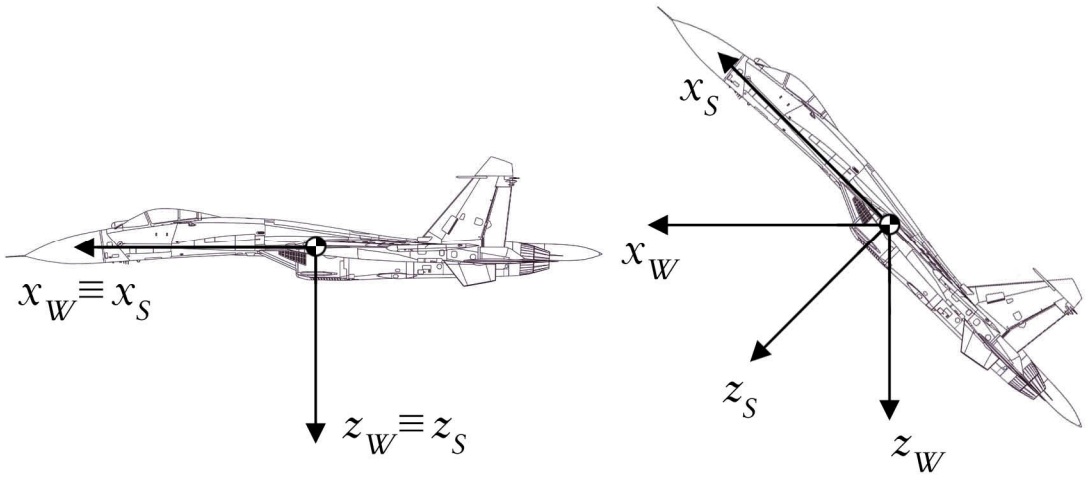
abbiamo un valore costante (per lo meno a numeri di Mach subsonici), nel quale non interviene la dipendenza dal valore della densità. Quindi il pilota, noto il carico alare ed il coefficiente di portanza massimo per quella configurazione, conosce il valore della velocità di stallo equivalente, legge la V_{EAS} sullo strumento apposito e, senza preoccuparsi della misura di densità, è in grado di determinare se si trova in una condizione di sicurezza o meno. Da questi semplici ma significativi esempi si capisce dunque come sia più rilevante l'informazione sulla velocità equivalente che non quella sulla velocità vera; l'informazione sulla velocità vera torna utile quando occorre effettuare dei calcoli di navigazione, ma la V_{TAS} si ottiene immediatamente dalla V_{EAS}, utilizzando la definizione di V_{EAS}. Teniamo infine presente che la differenza tra V_{EAS} e V_{TAS} è piuttosto rilevante: a 30˙000 piedi (9˙144 metri), il rapporto tra la densità a tale quota e la densità al livello del mare è pari circa a 0,37 e questo significa che ad una velocità equivalente di 400 km/h corrisponde una velocità vera di 660 km/h. Per fare un esempio pratico, se il Su-27 stalla a 200 km/h e la velocità indicata dallo strumento è minore di tale valore, allora il caccia stallerà, malgrado la sua velocità effettiva possa essere notevolmente maggiore quando l'aereo operi ad alta quota.

Capitolo 4

EQUAZIONI DEL MOTO DEL VELIVOLO

4.1 - ASSI INERZIALI E ASSI DI STABILITÀ

Prima di procedere alla scrittura delle equazioni cardinali del moto del velivolo, introduciamo altre due terne di riferimento, diverse da quelle definite nel § 1.3, le quali saranno utili nel seguito. Indichiamo la prima terna di riferimento con $\Im_I\left(x_I;y_I;z_I\right)$, detta *inerziale*, in quanto in questa terna vale la relazione $\vec{F}=m\vec{a}$ (con $\vec{a}$ accelerazione assoluta), cioè un sistema di assi che possiede un moto di pura traslazione rettilinea uniforme rispetto ad un riferimento con origine nel sole e assi fissi rispetto alle cosiddette stelle fisse (riferimento quest'ultimo che può con ottima approssimazione essere considerato inerziale). La seconda terna di riferimento, che utilizzeremo nello studio della stabilità dinamica, è detta *terna di stabilità* e la indichiamo con $\Im_S\left(x_S;y_S;z_S\right)$; gli assi di stabilità costituiscono una terna solidale col velivolo, con origine nel baricentro, la quale in una condizione di volo simmetrico e in un generico istante di riferimento, ha l'asse longitudinale x_S allineato con il vettore velocità e quindi coincidente con l'asse vento x_W.



Sukhoj Su-27 durante una manovra - Figura 1

È importante specificare il fatto che tale definizione vale solo in un istante iniziale di riferimento, perché negli istanti successivi, se il moto del velivolo viene perturbato, la terna di assi di stabilità, restando solidale al velivolo, non sarà più coincidente con la terna di assi vento.

4.2 - IPOTESI SEMPLIFICATIVE

Useremo le equazioni cardinali del moto nello studio delle condizioni di equilibrio, per l'analisi delle caratteristiche di volo e per lo studio della stabilità dell'aereo. Per il tipo di applicazioni che ci interessano, formuleremo le equazioni in base a certe ipotesi semplificative che non hanno validità in assoluto, ma che sono valide nell'ambito dei problemi che studieremo nell'ambito del *volo atmosferico*, cioè a quote non eccessivamente elevate[1].

La prima ipotesi riguarda la rigidezza del velivolo: se non diversamente specificato, considereremo l'aeromobile come un *sistema rigido* e perciò non terremo conto di eventuali gradi di libertà elastici. Per avere un'idea di come in realtà le deformazioni elastiche siano molto evidenti[2], basta dare un'occhiata ad un'ala durante la corsa di decollo. Le conclusioni che siamo in grado di dedurre modellando il velivolo come un sistema rigido, hanno comunque validità e costituiscono la base degli studi sulla dinamica; eventualmente, quando il tipo di problema lo richieda, vengono utilizzati modelli più complessi, che tengono conto di tutti i gradi di libertà considerando come deformabile l'aeromobile. Vi sono delle situazioni in cui sarà inammissibile ignorare elementi che risultino in moto relativo rispetto al velivolo; parliamo di sottosistemi quali masse in rotazione (come eliche, rotori od elementi rotorici dei turbogetti e dei turboventola), il cui effetto deve essere quindi modellato, oppure, in particolari casi di studio, del moto delle superfici del sistema di controllo: quando il pilota agisce sulla barra applica una forza esterna ad un sistema costituito dalla barra (o comunque dall'organo di comando), alla linea di controllo che trasmette il segnale di comando ed alla superficie di governo aerodinamico, i quali costituiscono un sistema dinamico a sé stante che possiede uno o più gradi di libertà addizionali rispetto a quelli del velivolo. Questo tipo di sottosistema deve essere modellato quando si studiano determinati problemi, come la stabilità dinamica a comandi liberi, di cui peraltro noi non ci occuperemo.

La seconda ipotesi importante è quella di velivolo inteso come *sistema a massa costante*: la massa del velivolo varia durante il volo per effetto dei consumi, ma la durata dei fenomeni che noi studieremo in genere sarà sufficientemente breve da poter effettivamente considerare costante la massa dell'aeromobile. La scelta dipende dal problema in esame, perché è chiaro che se volessimo simulare il volo di un aereo da Londra a New York non sarà pensabile integrare le equazioni del moto nell'ipotesi di massa costante. Se invece simuliamo una manovra, tale ipotesi è del tutto accettabile, salvo casi particolari. Se prendiamo in considerazione i razzi possiamo dire che, ad esempio, il primo stadio del Saturn V ha una variazione

[1] Per quanto riguarda le nostre applicazioni, possiamo indicare una quota massima di 15-18 km.

[2] Un'estremità alare di un 747, passando da una condizione scarica, cioè col velivolo a velocità nulla, ad una condizione operativa subisce una variazione dell'ordine delle decine di centimetri.

della massa lorda al decollo dell'ordine del 27% al minuto, perciò studiando un sistema di questo tipo sarebbe inammissibile utilizzare l'ipotesi di massa costante[3].

La terza ipotesi rilevante è relativa al sistema di riferimento nel quale scriviamo le equazioni del moto del velivolo: l'equazione di Newton in termini semplici ($\vec{F} = m\vec{a}$) vale in un riferimento inerziale; con qualche semplificazione e sempre relativamente a certi problemi possiamo considerare come inerziale una terna la cui origine si trovi in un certo punto dalla superficie terrestre ed avente l'asse z diretto verso il centro della terra e l'asse x tangente alla superficie

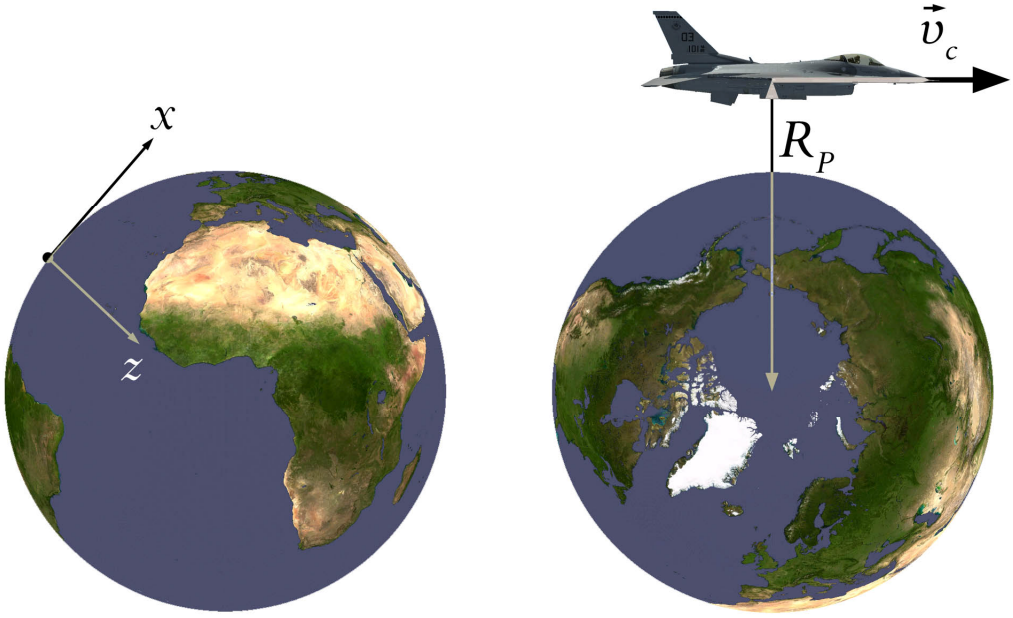


Figura 2

Questo significa trascurare gli effetti legati alla rotazione terrestre; al fine di stimare quanto tale ipotesi sia legittima, valutiamo tali effetti. Supponiamo di guardare la terra dal polo nord (cioè supponiamo che l'asse terrestre esca dal piano del foglio): se un aeromobile si trova ad una certa distanza R_P dal centro della terra ad una velocità $\vec{v}_P$, il fatto di trascurare la rotazione della terra significa anzitutto trascurare l'accelerazione del riferimento non inerziale, un termine del tipo

$$\omega_T^2 R_P$$

[3] Per avere dei termini di riferimento, possiamo dire che un velivolo da combattimento supersonico ha una variazione di massa dell'ordine dello 0,2% al minuto, mentre nel caso di un velivolo bimotore ad elica da 6-8 passeggeri (quindi relativamente leggero) ha una variazione della massa intorno allo 0,05% al minuto.

che convenientemente normalizziamo dividendo per g e dove ω_T^2 rappresenta la velocità angolare della terra. L'altro termine di cui dovremmo tener conto sarà l'*accelerazione di Coriolis*, la quale sarà esprimibile come

$$\frac{2}{g}\vec{\omega}_T \times \vec{v}_P .$$

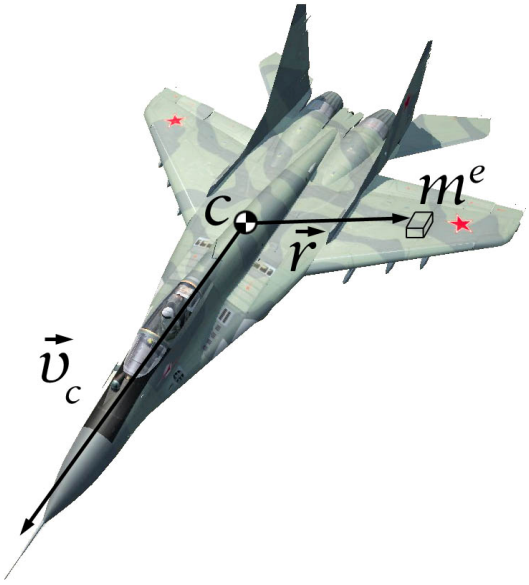
C'è infine un terzo termine di cui dovremmo tener conto, l'*accelerazione centripeta*

$$\frac{v_P^2}{R_P g}$$

ma trascureremo tale termine in base ad un'ulteriore ipotesi che è quella cosiddetta di terra piatta: parlare di terra piatta significa dire che un velivolo che procede mantenendo costante il valore della quota, non descrive una traiettoria circolare, ma descrive una traiettoria rettilinea.

Per stimare effettivamente l'errore che commettiamo nel trascurare tali termini, sostituiamo nelle espressioni trovate, dei valori rappresentativi di un caso che costituisce un limite superiore per le nostre applicazioni: consideriamo cioè un apparecchio che voli a Mach 2, ad una quota $h = 11{\cdot}000$ m cui corrisponde una velocità $\vec{v}_P = 590$ m/s; la distanza del velivolo dal centro della terra, tenuto conto che il raggio medio terrestre è di circa $6{\cdot}377$ km, è $R_P = 6{,}388 \cdot 10^6$ m, mentre la velocità angolare della terra è circa $\omega_T = 0{,}73 \cdot 10^{-5}$ s^{-1}; con tali valori i termini adimensionali valgono rispettivamente 0,003, 0,004 e 0,005. Dunque osserviamo che, anche nel caso di un aereo il quale stia volando a velocità e quota piuttosto elevati, tali effetti sono del tutto trascurabili.

4.3 - EQUAZIONI CARDINALI DEL MOTO IN ASSI INERZIALI



Mikoyan Gurevich MiG-29 - Figura 3

Occupiamoci finalmente di ricavare le equazioni del moto del velivolo e per farlo tratteremo il velivolo come costituito da un'insieme di elementi infinitesimi tridimensionali di massa m^e; indichiamo poi con $\vec{c}$ la posizione del baricentro e con $\vec{r}$ il vettore che identifica la posizione del generico elemento infinitesimo rispetto al baricentro.

Scriviamo il secondo principio della dinamica applicato ad un generico elemento infinitesimo:

$$\vec{F}_e = m_e \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

È possibile esprimere convenientemente la velocità del generico elemento infinitesimo come

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Consideriamo ora la distribuzione di massa del velivolo completo ed applichiamo il secondo principio della dinamica a tutte le masse che costituiscono il velivolo

$$\vec{F} = \sum_e m_e \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_c + \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

dove con $\vec{F}$ abbiamo indicato la risultante delle forze esterne agenti sul velivolo. Il fatto di considerare rigido il velivolo ci permette di poter affermare che la sommatoria delle derivate rispetto al tempo sarà pari alla derivata della sommatoria

$$\sum_e m_e \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_c + \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \sum_e m_e \frac{d\vec{v}_c}{dt} + \sum_e m_e \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right).$$

Notiamo ora che $\vec{v}_c$ è una costante rispetto alla distribuzione di massa, perciò possiamo scrivere

$$\sum_e m_e \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{v}_c}{dt}\sum_e m_e = M\frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

avendo indicato con $M = \sum_e m_e$ la massa totale del velivolo; inoltre per la definizione stessa di momento statico rispetto al baricentro, si ha

$$\sum_e m_e \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_e m_e \vec{r}\right) = 0 .$$

In conclusione la *prima equazione cardinale del moto* è

$$\vec{F} = M\frac{d\vec{v}_c}{dt}.$$

Per formulare la seconda equazione cardinale dobbiamo fare un bilancio del momento della quantità di moto (così come la precedente costituisce un bilancio di quantità di moto).

Il momento di quantità di moto associato al singolo elemento infinitesimo risulta essere per definizione

$$\vec{h}_e = \vec{r} \times m_e \vec{v} = m_e (\vec{r} \times \vec{v})$$

derivando

$$\frac{d\vec{h}_e}{dt} = m_e\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

tenendo conto della espressione di $\vec{v}$ e del fatto che un vettore moltiplicato vettorialmente per se stesso dà zero come risultato, possiamo riscrivere l'espressione precedente come

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{h}_e}{dt} = m_e\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_c \times \vec{v}\right)$$

da cui otteniamo

$$\vec{r} \times m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{v}_c \times m_e \vec{v} + \frac{d\vec{h}_e}{dt}.$$

Indicando con $\vec{G}_e = \vec{r} \times \vec{F}_e$ il momento esterno agente sul singolo elemento infinitesimo e sostituendo l'espressione precedentemente trovata nella $\vec{r} \times \vec{F}_e = \vec{r} \times m_e \frac{d\vec{v}}{dt}$, si ottiene

$$\vec{G}_e = \vec{v}_c \times m_e \vec{v} + \frac{d\vec{h}_e}{dt}.$$

In perfetta analogia con quanto fatto per la prima equazione cardinale, passiamo a considerare la distribuzione totale di massa

$$\vec{G} = \sum_e \left(\vec{v}_c \times m_e \vec{v} + \frac{d\vec{h}_e}{dt} \right)$$

dove $\vec{G} = \sum_e \vec{G}_e$ rappresenta la *risultante del momento esterno agente sul velivolo*. Sempre in base all'ipotesi di rigidità possiamo scrivere

$$\sum_e \frac{d\vec{h}_e}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_e \vec{h}_e = \frac{d\vec{h}}{dt}$$

dove con $\vec{h}$ indichiamo il momento totale della quantità di moto[4] del nostro sistema; inoltre, tenendo conto che $\sum_e m_e \vec{v}_c = \left(\sum_e m_e \right) \vec{v}_c = M\vec{v}_c$, si ha

$$\sum_e \vec{v}_c \times m_e \vec{v} = \vec{v}_c \times \sum_e m_e \vec{v} = \vec{v}_c \times M\vec{v}_c \equiv 0$$

per cui, in definitiva, otteniamo la seguente espressione della *seconda equazione cardinale del moto del velivolo*

$$\vec{G} = \frac{d\vec{h}}{dt}.$$

Notiamo a questo punto che, mentre nella prima equazione cardinale del moto compaiono esplicitamente le variabili del moto ed in particolare $\vec{v}_c$, così non avviene nella seconda equazione cardinale: cerchiamo dunque di esplicitare anche l'equazione precedente rispetto a dei parametri legati direttamente al moto dell'aereo; per fare ciò ripartiamo dalla definizione di momento della quantità di moto dell'elemento infinitesimo di massa m_e e ricaviamo la velocità $\vec{v}$ dalla $\vec{v} = \vec{v}_c + \frac{d\vec{r}}{dt}$, nella quale però ora teniamo conto dell'ipotesi di

[4] Attenzione a non confondere il *momento totale della quantità di moto* con il *momento della quantità di moto totale*; in proposito si veda P. G. Bordoni, «Lezioni di meccanica razionale».

rigidità del velivolo, che ci consente di esprimere la velocità di un qualunque elemento infinitesimo come

$$\vec{v}_e = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_e$$

avendo indicato con $\vec{\omega}$ il vettore della velocità angolare del velivolo. Sostituendo la precedente nella definizione di momento della quantità di moto otteniamo

$$\vec{h}_e = \vec{r} \times m_e \vec{v}_c + \vec{r} \times \vec{\omega} \times m_e \vec{r}$$

e tenendo conto della distribuzione di massa del velivolo si ha

$$\vec{h} = \sum_e \vec{h}_e = \sum_e \vec{r} \times m_e \vec{v}_c + \sum_e \vec{r} \times \vec{\omega} \times m_e \vec{r}$$

nella quale, per definizione di momento statico rispetto al baricentro, si ha

$$\sum_e \vec{r} \times m_e \vec{v}_c = \left(\sum_e m_e \vec{r} \right) \times \vec{v}_c \equiv 0 .$$

Inoltre possiamo esprimere il doppio prodotto vettoriale, ricordando che $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$, come

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) .$$

Possiamo poi esprimere le componenti di $\vec{r}$ ed $\vec{\omega}$ nel riferimento $\Im_I$ nel modo seguente

$$\vec{r} = x\,\hat{i} + y\hat{j} + z\,\hat{k}$$
$$\vec{\omega} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\,\hat{k}$$

dove con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ abbiamo indicato i versori di $\Im_I$. Con tale notazione il doppio prodotto vettoriale diventa

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \vec{r}\left(Px + Qy + Rz\right) .$$

Sostituendo nella espressione di $\vec{h}$, in termini di componenti nel riferimento $\Im_I$, abbiamo per la componente lungo l'asse x

$$h_x = \sum_e P\left(x^2 + y^2 + z^2\right)m_e - \sum_e x\left(Px + Qy + Rz\right)m_e$$

tenendo però conto che le componenti di $\vec{\omega}$ sono delle costanti rispetto alla distribuzione di massa, si ottiene

$$h_x = P\sum_e \left(y^2 + z^2\right)m_e - Q\sum_e xym_e - R\sum_e xzm_e\,.$$

In definitiva, ricordando la definizione di *momenti* e di *prodotti d'inerzia* ed essendo il discorso perfettamente identico per le altre due componenti, abbiamo

$$\begin{aligned} h_x &= PI_x - QI_{xy} - RI_{xz} \\ h_y &= -PI_{xy} + QI_y - RI_{yz} \\ h_z &= -PI_{xz} - QI_{yz} + RI_z \end{aligned}$$

che in forma vettoriale possiamo scrivere come

$$\vec{h} = \underline{\underline{I}}\vec{\omega}$$

dove $\underline{\underline{I}}$ rappresenta il tensore d'inerzia

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}.$$

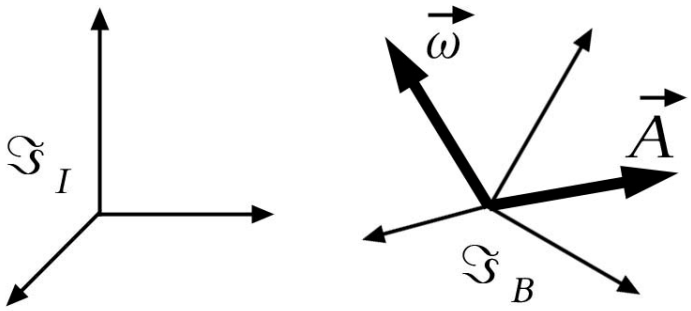
Possiamo finalmente esprimere la seconda equazione cardinale nel modo seguente

$$\vec{G} = \frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right).$$

4.4 - EQUAZIONI DEL MOTO IN ASSI CORPO

Nel § precedente abbiamo ottenuto due equazioni vettoriali, la $\vec{F} = M\frac{d\vec{v}_c}{dt}$ e la $\vec{G} = \frac{d}{dt}\left(\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right)$, nelle quali compaiono esplicitamente la velocità del baricentro e la velocità

angolare del velivolo; così come sono scritte, tali relazioni valgono solo nel riferimento inerziale; queste equazioni vettoriali vengono però quasi sempre scritte in un riferimento solidale al velivolo, specialmente la seconda equazione cardinale. È spontaneo chiedersi quale vantaggio si abbia nel riformulare le equazioni del moto in $\Im_B$, ad un prezzo che comporta il fatto che il termine inerziale ha una forma sicuramente più complessa di quella che abbiamo ottenuto: teniamo presente che, avendo scritto le equazioni cardinali ed in particolare la seconda, in $\Im_I$ il cui orientamento è fisso durante il moto del velivolo, il tensore d'inerzia $\underline{\underline{I}}$ è una quantità dipendente dal tempo, in quanto il velivolo ruota rispetto a $\Im_I$; tale tensore diventa invece una costante se lavoriamo in una terna di riferimento solidale al velivolo (e perciò non inerziale). Cerchiamo di capire quale sia la correzione che dobbiamo apportare per lavorare con derivate di vettori[5] in un riferimento non inerziale; consideriamo una terna inerziale $\Im_I$ e una terna generica $\Im_B$ in moto rispetto alla precedente con una certa velocità angolare $\vec{\omega}$.



Vettore $\vec{A}$ solidale alla terna mobile - Figura 4

Indichiamo con $\vec{A}$ un generico vettore che supponiamo applicato nell'origine di $\Im_B$ (ciò non lede la generalità del discorso) e solidale con $\Im_B$. La relazione che lega le derivate di $\vec{A}$ nella terna mobile e le derivate di $\vec{A}$ nella terna fissa è

$$\left(\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_I \right) = \dot{\vec{A}}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{A}_B$$

dove la simbologia a primo membro indica che la derivata è fatta in $\Im_I$, ma viene scritta per componenti in $\Im_B$; a secondo membro invece il pedice B sta ad indicare che tutte quelle quantità sono scritte per componenti in $\Im_B$. A verifica di quanto detto alla nota 5, si consideri che se ad esempio il vettore $\vec{A}$ è costante nel riferimento mobile, il vettore $\dot{\vec{A}}$,

[5] Se il vettore è una quantità invariante rispetto al sistema di riferimento, la sua derivata potrebbe non essere invariante, perciò, cambiando il riferimento, dobbiamo tener conto di questo differenza.

che rappresenta appunto la derivata di $\vec{A}$ fatta in $\mathfrak{I}_B$, è nullo mentre, come si può vedere dall'equazione precedente, la derivata di $\vec{A}$ fatta in $\mathfrak{I}_I$ non è nulla, perché il termine $\vec{\omega}_B \times \vec{A}_B$ in generale non è nullo (il vettore $\vec{A}$ cioè non varia nella terna mobile, ma la sua derivata è diversa da zero se la calcoliamo in $\mathfrak{I}_I$, perché $\vec{A}$ ruota con la stessa velocità angolare di $\mathfrak{I}_B$).

Da notare che per quanto detto, se è giustificabile il fatto che la seconda equazione cardinale del moto venga di solito scritta in un sistema di riferimento solidale al velivolo, non è altrettanto indispensabile farlo anche per la prima equazione, ma siccome molto spesso tutte e due le equazioni vengono scritte nello stesso riferimento, così faremo anche noi; tenuto conto dell'equazione scritta prima, la $\vec{F} = M\dfrac{d\vec{v}_c}{dt}$ e la $\dfrac{d}{dt}\left(\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right) = \vec{G}$ diventano

$$M\left(\dot{\vec{v}}_c + \vec{\omega} \times \vec{v}_c\right)_B = \vec{F}_B$$
$$\left[\underline{\underline{I}}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \left(\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right)\right]_B = \vec{G}_B \ .$$

Molto spesso per esprimere i prodotti vettoriali in cui è coinvolta la velocità angolare si usa una notazione matriciale di tale quantità; se cioè indichiamo con p, q ed r le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto agli assi corpo e con u_c, v_c e w_c le componenti di $\vec{v}_c$ si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \vec{v}_c &= \left(p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}\right) \times \left(u_c\hat{i} + v_c\hat{j} + w_c\hat{k}\right) = \\ &= 0 + v_c p\hat{k} - w_c p\hat{j} - u_c q\hat{k} + 0 + w_c q\hat{i} + u_c r\hat{j} - v_c r\hat{i} + 0 = \\ &= \begin{pmatrix} w_c q - v_c r \\ u_c r - w_c p \\ v_c p - u_c q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \\ w_c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e si definisce la matrice antisimmetrica $\underline{\underline{\tilde{\omega}}}$

$$\underline{\underline{\tilde{\omega}}} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo modo possiamo scrivere il prodotto vettoriale $\vec{\omega} \times \vec{v}_c$ come il prodotto di matrici $\underline{\underline{\tilde{\omega}}}\,\vec{v}_c$.

Dedichiamo ora la nostra attenzione ai termini di forza e momento esterni; abbiamo già elencato nell'introduzione il sistema di azioni esterne agenti sul velivolo e quindi sulla base di quella distinzione possiamo scrivere

$$\vec{F}_B = \left(\vec{F}_P + \vec{F}_A + \vec{F}_T\right)_B$$

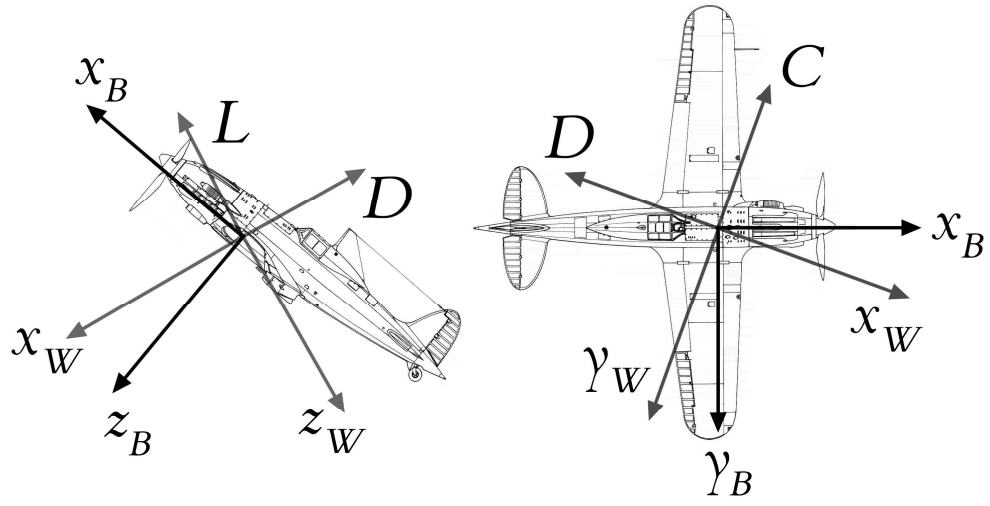
(con $\vec{F}_P$ forza peso, $\vec{F}_A$ forze aerodinamiche e $\vec{F}_T$ forze propulsive) ed in modo del tutto analogo il momento, tenendo presente che la forza peso, passando per il baricentro non dà contributo, si può scrivere

$$\vec{G}_B = \left(\vec{G}_A + \vec{G}_T\right)_B .$$

Cominciamo ad occuparci dei vari termini partendo da quelli di forza; per quanto riguarda la forza peso abbiamo

$$\left(\vec{F}_P\right)_B = \underline{\underline{L}}_{BI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{bmatrix}$$

dove il vettore $\begin{bmatrix} 0 & 0 & Mg \end{bmatrix}^T$ rappresenta le componenti della forza peso nel riferimento inerziale, mentre la matrice $\underline{\underline{L}}_{BI}$ è una matrice di trasformazione, di cui parleremo nel prossimo §, che ci permette di proiettare un vettore scritto in $\Im_I$ nelle sue componenti in $\Im_B$.



Macchi MC.202 Folgore - Figura 5

Per le forze aerodinamiche, in modo analogo alla forza peso, si ha

$$\left(\vec{F_A}\right)_B = \underline{\underline{L}}_{BW} \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}$$

in cui il vettore $\begin{bmatrix} -D & -C & -L \end{bmatrix}^T$ rappresenta le componenti della forza aerodinamica in $\Im_W$, mentre $\underline{\underline{L}}_{BW}$ è anch'essa una matrice di trasformazione che permette di passare da $\Im_W$ a $\Im_B$. Osserviamo come le componenti di $\vec{F}_A$ si scrivano in modo molto naturale in $\Im_W$; la portanza L, la resistenza D e la devianza C hanno infatti la stessa direzione rispettivamente dell'asse z_W, dell'asse x_W e dell'asse y_W, ma verso opposto.

Rimandando al futuro una discussione più approfondita, ci limitiamo a dire che le componenti della forza propulsiva in $\Im_B$ sono

$$\left(\vec{F}_T\right)_B = \begin{bmatrix} F_{T_x} \\ F_{T_y} \\ F_{T_z} \end{bmatrix}.$$

Similmente operiamo per quanto riguarda i momenti; il momento aerodinamico ha componenti

$$\left(\vec{G}_A\right)_B = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}$$

detti rispettivamente momento di rollio (L), di beccheggio (M), e di imbardata (N), mentre indichiamo il momento rispetto al baricentro dovuto alle azioni propulsive[6] semplicemente con

$$\left(\vec{G}_T\right)_B = \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix}$$

4.5 - MATRICI DI TRASFORMAZIONE $\underline{\underline{L}}_{BI}$ E $\underline{\underline{L}}_{BW}$ ANGOLI DI EULERO ED ANGOLI AERODINAMICI

[6] Se l'asse di spinta non passa per il baricentro avremo dei momenti dovuti alle forze propulsive.

Abbiamo introdotto nel § precedente le due matrici $\underline{\underline{L}}_{BI}$ e $\underline{\underline{L}}_{BW}$, che abbiamo detto essere matrici di trasformazione: premoltiplicando le componenti di un vettore definito in $\Im_I$ per la matrice $\underline{\underline{L}}_{BI}$ otteniamo le componenti dello stesso vettore in $\Im_B$, mentre premoltiplicando le componenti di un vettore definito in $\Im_W$ per la matrice $\underline{\underline{L}}_{BW}$ otteniamo le componenti dello stesso vettore in $\Im_B$. Sappiamo che le matrici di trasformazione sono *ortonormali*, cioè sono matrici 3×3 in cui le colonne costituiscono dei vettori di lunghezza unitaria (da cui la proprietà di normalità) ed ortogonali fra loro (da cui la proprietà di ortogonalità); ciascun elemento perciò rappresenta un coseno direttore che permette di individuare l'orientamento di ciascuno degli assi di una terna rispetto a ciascuno degli assi di un'altra terna. Un matrice di trasformazione è dunque costituita da nove elementi, tra i quali però sussistono sei relazioni indipendenti (tre di normalità e tre di ortogonalità) e pertanto solo tre parametri restano indipendenti[7]. Per completare il modello matematico del velivolo abbiamo pertanto bisogno di esprimere convenientemente le due matrici $\underline{\underline{L}}_{BI}$ e $\underline{\underline{L}}_{BW}$.

Nota la matrice $\underline{\underline{L}}_{BI}$ siamo in grado di determinare l'orientamento del velivolo rispetto alla terna inerziale, perciò, generalizzando il problema, dobbiamo cercare di esprimere l'orientamento di una terna solidale al velivolo rispetto alla terna inerziale[8]. Tale problema può essere affrontato definendo diversi insiemi di parametri; nella meccanica del volo atmosferico in genere si usano due tipi di parametri: i primi sono gli *angoli di Eulero*, dei quali ci occuperemo, mentre i secondi, di cui non parleremo ma che si usano molto in problemi di simulazione, sono detti *quaternioni*; gli angoli di Eulero costituiscono un sistema minimo di parametri, in quanto sono tre, mentre i quaternioni (come dice la parola stessa) sono quattro parametri e perciò non costituiscono un sistema minimo (ossia non sono indipendenti tra loro).

L'uso degli angoli di Eulero discende dal fatto che possiamo rappresentare l'orientamento di un corpo rispetto ad una terna mediante tre successive rotazioni elementari, ciascuna di esse effettuata attorno ad un asse opportuno del sistema coordinato. La scelta della sequenza di rotazioni è del tutto arbitraria e perciò non esiste un solo insieme di angoli di Eulero[9]; vediamo dunque qual è la scelta che viene fatta in meccanica del volo.

---

[7] Del resto tre è il numero minimo di parametri necessari a rappresentare l'orientamento di un corpo rigido o, il che è lo stesso, di una terna di riferimento, rispetto ad un dato riferimento.

[8] In questo caso si parla di *assetto del velivolo*: per assetto di un velivolo si intende tipicamente l'orientamento del velivolo rispetto alla terna inerziale.

[9] In particolare esistono dodici diversi insiemi di angoli di Eulero, difatti: possiamo effettuare la prima rotazione attorno a tre diversi assi, quindi abbiamo tre possibilità; la seconda rotazione potrà essere effettuata attorno a ciascuno asse che non sia quello rispetto al quale abbiamo effettuato la prima, perché altrimenti continueremmo a ruotare sempre attorno alla stessa direzione, perciò abbiamo altre due possibilità; per la terza rotazione vale esattamente quanto detto riguardo alla seconda e cioè possiamo ruotare attorno a ciascun asse che non

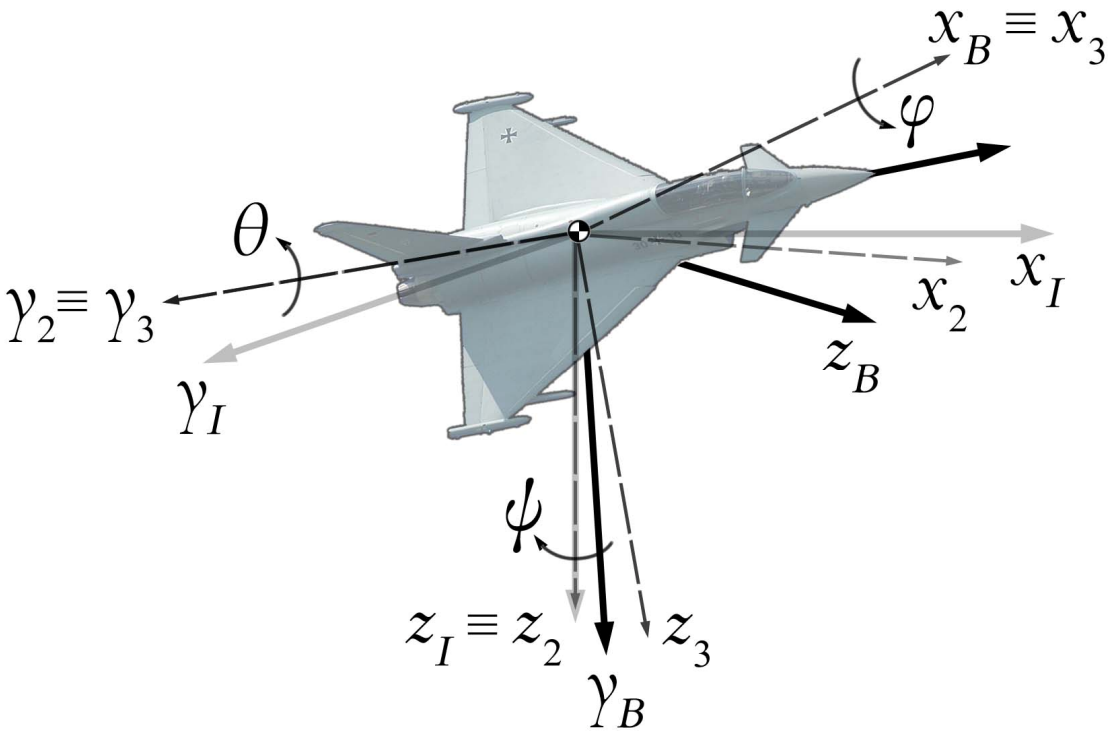


Figura 6

Attraverso tre rotazioni elementari (cioè attorno ad uno degli assi del sistema) dobbiamo portare la terna $\Im_I$ a coincidere con la terna $\Im_B$. Per convenzione la prima rotazione avviene attorno all'asse z_I di un angolo ψ (*angolo di imbardata*) ed il modulo della velocità angolare è $\dot{\psi}$. La seconda rotazione avviene attorno all'asse y_2, cioè attorno alla posizione assunta dall'asse y_I dopo la prima rotazione; l'angolo corrispondente è θ (*angolo di beccheggio*) e la velocità angolare è $\dot{\theta}$. Osserviamo come queste prime due rotazioni abbiano portato l'asse x_I a coincidere con l'asse x_B ed dunque la terza ed ultima rotazione non può che avvenire attorno a tale asse, in modo che y_2 venga a sovrapporsi ad y_B e z_3 (posizione assunta da z_I dopo le prime due rotazioni) su z_B; l'angolo associato è φ (*angolo di rollio*) e la velocità angolare è $\dot{\varphi}$. A ciascuna delle rotazioni elementari possiamo associare un'opportuna matrice di trasformazione; separiamo perciò i tre passi compiuti e analizziamo una alla volta le tre rotazioni, (vedi figura 6).

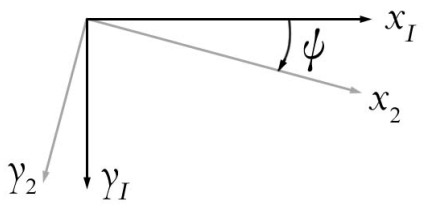
Abbiamo detto che la prima rotazione avviene attorno a z_I ed è caratterizzata da un angolo di imbardata ψ che porta l'asse x_I in x_2 e l'asse y_I in y_2; indichiamo la matrice di trasformazione associata a tale rotazione con $\underline{\underline{L}}_3(\psi)$ (il pedice indica che stiamo ruotando

---

sia quello attorno al quale abbiamo effettuato la seconda, per cui altre due possibilità; in definitiva le possibili diverse terne di angoli di Eulero sono 3×2×2=12.

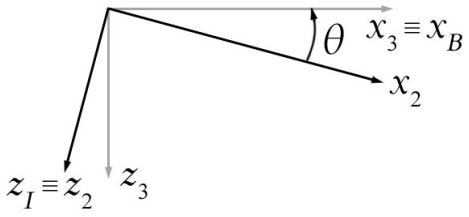
attorno al terzo asse del nostro riferimento, mentre tra parentesi tonde è indicato l'angolo di rotazione) ed è data da

$$\underline{\underline{L}}_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



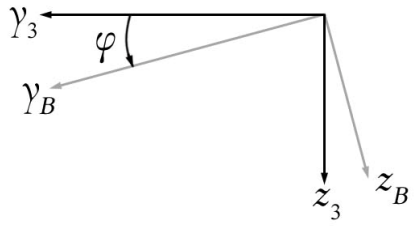
La seconda rotazione avviene attorno all'asse y_2, l'angolo ad essa associato è l'angolo di beccheggio θ e porta l'asse x_2 in $x_3 \equiv x_B$ e l'asse z_2 in z_3. La matrice di trasformazione corrispondente, con analoga simbologia, è

$$\underline{\underline{L}}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



La terza ed ultima rotazione avviene attorno all'asse $x_3 \equiv x_B$ di un angolo di rollio φ e porta l'asse $y_2 \equiv y_3$ in y_B e l'asse z_3 in z_B la matrice di trasformazione sarà dunque

$$\underline{\underline{L}}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



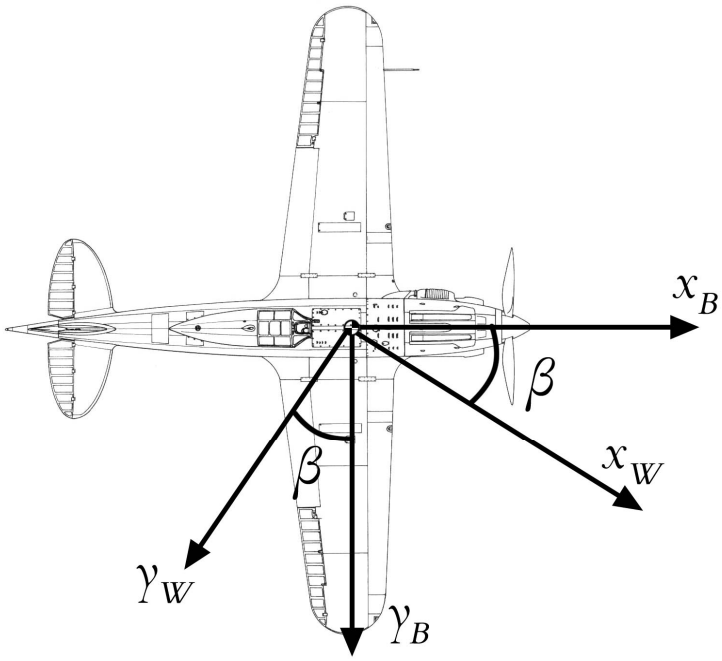
sulla base di quanto abbiamo detto possiamo esprimere la matrice di trasformazione $\underline{\underline{L}}_{BI}$ come

$$\underline{\underline{L}}_{BI} = \underline{\underline{L}}_{BI}(\varphi;\theta;\psi) = \underline{\underline{L}}_1(\varphi) \cdot \underline{\underline{L}}_2(\theta) \cdot \underline{\underline{L}}_3(\psi)$$

da cui

$$\underline{\underline{L}}_{BI} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\psi & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi - \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi & \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi + \cos\varphi\cos\psi & \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\psi + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi & \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\psi - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Determiniamo ora la matrice di trasformazione $\underline{\underline{L}}_{BW}$ che definisce l'orientamento di $\mathfrak{I}_B$ rispetto a $\mathfrak{I}_W$. In questo secondo caso la sequenza di rotazione è la seguente: la prima rotazione avviene attorno all'asse z_W ed è una rotazione antioraria in quanto deve portare l'asse x_W nel piano $x_B y_B$

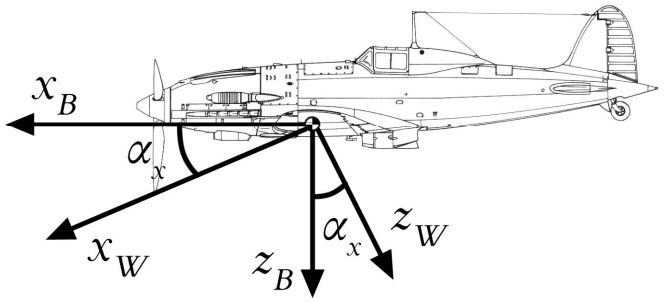


Angolo di derapata - Figura 7

e quindi la matrice di trasformazione elementare è

$$\underline{\underline{L}}_3(-\beta) = \begin{pmatrix} \cos(-\beta) & \mathrm{sen}(-\beta) & 0 \\ -\mathrm{sen}(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ricordiamo che l'angolo di derapata è definito positivo in verso orario. Dopo la prima rotazione la situazione nel piano di simmetria è la seguente



Angolo d'attacco - Figura 8

perciò per portare i due sistemi a coincidere dobbiamo ruotare attorno all'asse $y_B \equiv y_W$ di un angolo α_x e dunque la matrice elementare è

$$\underline{\underline{L}}_2(\alpha_x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha_x & 0 & -\operatorname{sen}\alpha_x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_x & 0 & \cos\alpha_x \end{pmatrix}$$

Notiamo il fatto che per andare da $\mathfrak{I}_W$ ad $\mathfrak{I}_B$ occorrono solo due rotazioni, poiché uno degli assi vento (z_W), per definizione, diverrà già coincidente con il corrispondente asse corpo (z_B). In definitiva per la matrice $\underline{\underline{L}}_{BI}$ abbiamo

$$\underline{\underline{L}}_{BW} = \underline{\underline{L}}_2(\alpha_x)\,\underline{\underline{L}}_3(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha_x\cos\beta & -\cos\alpha_x\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha_x \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha_x\cos\beta & -\operatorname{sen}\alpha_x\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha_x \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{BW}(\alpha_x;\beta)$$

Avendo espresso sia la matrice $\underline{\underline{L}}_{BI}$ che la matrice $\underline{\underline{L}}_{BW}$ attraverso l'introduzione di nuove variabili e precisamente i tre *angoli di Eulero* (φ, ψ e θ) e due angoli aerodinamici (α_x e β). Dobbiamo a questo punto verificare come tali angoli vengano espressi in funzione delle variabili del moto; la parte più immediata di tale problema è sicuramente l'espressione degli angoli aerodinamici, per la cui determinazione cominciamo dalla relazione

$$\vec{v}_{c_B} = \underline{\underline{L}}_{BW}\vec{v}_{c_W} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{BW}\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$; in termini di componenti abbiamo dunque

$$\begin{cases} u = V\cos\alpha_x\cos\beta \\ v = V\,\text{sen}\,\beta \\ w = V\,\text{sen}\,\alpha_x\cos\beta \end{cases}$$

se ora dividiamo l'ultima per la prima otteniamo

$$\tan\alpha_x = \frac{w}{u}$$

da cui

$$\alpha_x = \arctan\frac{w}{u}$$

mentre direttamente dalla espressione di v ($v = V\,\text{sen}\,\beta$), abbiamo

$$\beta = \text{arcsen}\,\frac{v}{V}$$

e dunque note le componenti della velocità del baricentro in $\Im_B$ siamo in grado di determinare, attraverso queste due relazioni, gli angoli aerodinamici. Meno immediata è la determinazione degli angoli di Eulero, per i quali dobbiamo scrivere relazioni di tipo differenziale le quali mettono in relazione il vettore velocità angolare dell'aeromobile (o meglio le sue componenti in assi corpo) con le derivate degli angoli di Eulero

$$\vec{\omega}_B = f\left(\dot{\varphi}\quad\dot{\theta}\quad\dot{\psi}\right)$$

da questa relazione otterremo le equazioni di evoluzione degli angoli di Eulero. Partiamo dunque da una relazione tra vettori che esprima il vettore $\vec{\omega}$ come somma dei tre vettori associati alle rotazioni elementari viste prima; indicando con $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ i versori di $\Im_B$, con $\hat{I}$, $\hat{J}$ e $\hat{K}$ i versori di $\Im_I$ e con $\hat{I}_2$, $\hat{J}_2$ e $\hat{K}_2$ i versori del riferimento $\Im_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$, si ha

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\hat{K} + \dot{\theta}\hat{J}_2 + \dot{\varphi}\hat{i} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k}$$

esprimiamo ora tale relazione per componenti nel riferimento $\Im_B$, tenendo conto che per portare l'asse y_2 nella sua giacitura finale dobbiamo ruotare di un angolo pari a φ attorno all'asse longitudinale x_B

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \dot{\psi}\underline{\underline{L}}_{BI}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}\underline{\underline{L}}_{1}(\varphi)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\varphi}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che in forma compatta possiamo scrivere come

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

con

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \cos\varphi & \text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ 0 & -\text{sen}\,\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix}.$$

In realtà però l'espressione più utile è quella che ci permette di esprimere le derivate degli angoli di Eulero in funzione delle componenti della velocità angolare in $\Im_B$ ed otteniamo tale relazione invertendo la matrice precedente

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}^{-1}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Si faccia attenzione al fatto che la matrice $\underline{\underline{R}}$ non è una matrice di trasformazione, poiché sappiamo che un'altra fondamentale proprietà delle matrici di trasformazione è che l'inversa coincide con la trasposta: $\underline{\underline{R}}$ non gode di questa proprietà ed il motivo di ciò sta nel fatto che i vettori $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ non giacciono su una terna ortogonale.

4.6 - DETERMINAZIONE DELLA TRAIETTORIA

L'ultima relazione è formata da tre equazioni di tipo cinematico e si aggiunge alla formulazione delle equazioni del moto del velivolo. Occorre ora determinare delle equazioni che rappresentino l'evoluzione delle coordinate del baricentro ed in particolare nella terna

inerziale: se conosciamo la legge con cui variano le coordinate del baricentro in $\Im_I$, che indichiamo con x, y, z, conosciamo di fatto la traiettoria del velivolo; tenendo conto della definizione della matrice di trasformazione $\underline{\underline{L}}_{BI}$, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \left(\vec{v}_c\right)_I = \underline{\underline{L}}_{IB}\left(\vec{v}_c\right)_B$$

perciò, nota la velocità del baricentro in $\Im_B$ e conoscendo la matrice $\underline{\underline{L}}_{IB} = \underline{\underline{L}}_{BI}^T$, possiamo determinare le componenti della velocità del baricentro nel riferimento $\Im_I$ e quindi la traiettoria del baricentro stesso.

4.7 - EQUAZIONI SCALARI IN ASSI CORPO

Prima di scrivere le equazioni del moto del velivolo proiettate sulla terna di assi corpo, riscriviamo in forma compatta il sistema di equazioni cui siamo giunti nei §§ precedenti

equazioni di tipo dinamico

$$\begin{cases} m\left(\dot{\vec{v}}_c + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}\vec{v}_c\right)_B = \left(\vec{F}_A + \vec{F}_P + \vec{F}_T\right)_B \\ \left(\underline{\underline{I}}\dot{\vec{\omega}} + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right)_B = \left(\vec{G}_A + \vec{G}_T\right)_B \end{cases}$$

equazioni di tipo cinematico

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underline{\underline{R}}^{-1}\vec{\omega}_B = \underline{\underline{R}}^{-1}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{IB}\left(\vec{v}_c\right)_B \end{cases}$$

e commentiamo tale sistema. Si tratta di un sistema di 12 equazioni scalari in 12 incognite che possiamo rappresentare attraverso il vettore di stato

$$\vec{x} \equiv \left(u \quad v \quad w \quad p \quad q \quad r \quad \varphi \quad \theta \quad \psi \quad x \quad y \quad z\right)$$

ciò che interessa mettere in evidenza è il tipo di accoppiamento esistente tra le diverse equazioni del sistema: osserviamo come nella 1ª equazione cardinale compaia la velocità angolare, quindi una grandezza legata al moto di assetto del velivolo, ma ricordiamo come la presenza di tale velocità dipenda esclusivamente dal fatto che abbiamo scelto di scrivere tale equazione in $\mathfrak{I}_B$, pur non essendo obbligati a farlo[10]; la forza peso a 2° membro dipende poi dagli angoli di Eulero[11] e quindi ne risulta un accoppiamento con la prima relazione cinematica; per quanto riguarda la forza aerodinamica, dal punto di vista funzionale possiamo scrivere

$$\vec{F}_A = f\left(V \quad \alpha_x \quad \beta \quad \dot{\alpha}_x \quad \dot{\beta} \quad \vec{\omega} \quad \delta_A \quad \delta_E \quad \delta_R \quad \delta_T \quad h\right)$$

e lo stesso tipo di dipendenza vale per il momento aerodinamico $\vec{G}_A$, mentre per le azioni propulsive abbiamo

$$\vec{F}_T = f\left(V \quad \alpha_x \quad \beta \quad \delta_T \quad h\right)$$

ed analogamente per $\vec{G}_T$: osserviamo che è la dipendenza di queste grandezze di forza e di momento che finisce per accoppiare tutte le equazioni sia di tipo dinamico che di tipo cinematico che abbiamo scritto.

Il passo successivo è quello di scrivere in forma scalare le equazioni cardinali del moto, ciò è immediato

$$\begin{cases} m\left(\dot{u} + qw - rv\right) = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta + F_{Ax} + F_{Tx} \\ m\left(\dot{v} + ru - pw\right) = mg\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + F_{Ay} + F_{Ty} \\ m\left(\dot{w} + pv - qu\right) = mg\cos\theta\cos\varphi + F_{Az} + F_{Tz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr\left(I_z - I_y\right) - I_{xz}pq = L_A + L_T \\ I_y\dot{q} + rp\left(I_x - I_z\right) + I_{xz}\left(p^2 - r^2\right) = M_A + M_T \\ I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + pq\left(I_y - I_x\right) + I_{xz}qr = N_A + N_T \end{cases}$$

ed osserviamo come nelle ultime tre equazioni, dette anche equazioni di Eulero, non compaiano prodotti d'inerzia del tipo I_{xy} ed I_{yz}, poiché si ipotizza che la distribuzione di

[10] Se avessimo scritto la 1ª equazione cardinale nel riferimento inerziale non avremmo avuto questo tipo di accoppiamento tra termini inerziali.

[11] È comprensibile che, a seconda di come il velivolo è orientato, variano le componenti della forza peso, la quale resta verticale.

massa sia simmetrica rispetto all'asse y; se inoltre ci si riferisce ad una terna corpo che sia principale o centrale d'inerzia[12], anche il prodotto d'inerzia I_{xy} si annulla, il tensore d'inerzia assume forma diagonale[13] e le equazioni di Eulero assumono la più semplice forma

equazioni di Eulero

$$\begin{cases} I_x\dot{p} - qr\left(I_y - I_z\right) = L_A + L_T \\ I_y\dot{q} - rp\left(I_z - I_x\right) = M_A + M_T \\ I_z\dot{r} - pq\left(I_x - I_y\right) = N_A + N_T \end{cases}$$

4.8 - TENSORE D'INERZIA IN ASSI DI STABILITÀ

Abbiamo definito, nel § 1, la terna di assi di stabilità di cui vedremo i vantaggi quando parleremo di stabilità dinamica del velivolo ed in particolare quando utilizzeremo la teoria delle piccole perturbazioni per formulare le equazioni del moto in forma linearizzata. L'uso di questa terna comporta però una piccola complicazione in più che deriva dal fatto che tale terna è definita in una certa condizione di riferimento dove per ogni condizione di riferimento il tensore d'inerzia deve essere ricaricolato; facciamo un esempio: supponiamo di essere in condizione di volo in crociera, a basso angolo d'attacco e di essere all'equilibrio ad un angolo d'attacco $\alpha_e = \alpha_1$ all'istante $t = t_0$.

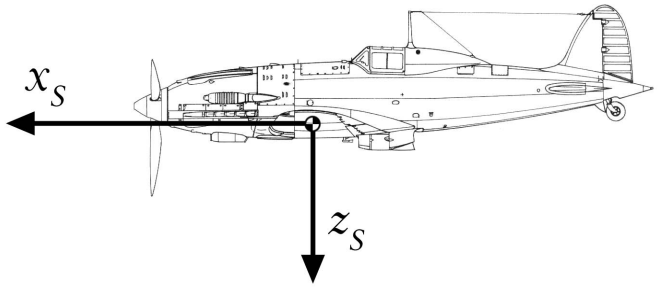


Figura 9

Se la condizione di equilibrio è perturbata, la terna $\Im_S$ resta solidale al velivolo e quindi si discosta da $\Im_W$; supponiamo che per tale configurazione si sia determinato il tensore

[12] Anche se poi in meccanica del volo non risulta così conveniente lavorare in un tale tipo di terna.

[13] Sappiamo infatti che, dato un tensore d'inerzia, è sempre possibile diagonalizzarlo, poiché il tensore d'inerzia è per definizione una matrice simmetrica definita positiva e quindi gli autovalori di questa matrice corrispondono proprio agli elementi sulla diagonale del corrispondente tensore d'inerzia in assi principali; gli autovettori di tale matrice hanno poi la caratteristica di essere ortogonali e corrispondono alle colonne della matrice di trasformazione che porta dalla generica terna di assi corpo alla terna di assi principali.

d'inerzia. Consideriamo ora un'altra condizione di volo in cui all'istante di riferimento $t = t_0$ si abbia $\alpha_e = \alpha_2 \neq \alpha_1$.

Osserviamo che in questo caso il velivolo è orientato diversamente rispetto alla terna di stabilità e quindi in questa nuova condizione di equilibrio dovremo calcolare nuovamente il tensore d'inerzia[14].

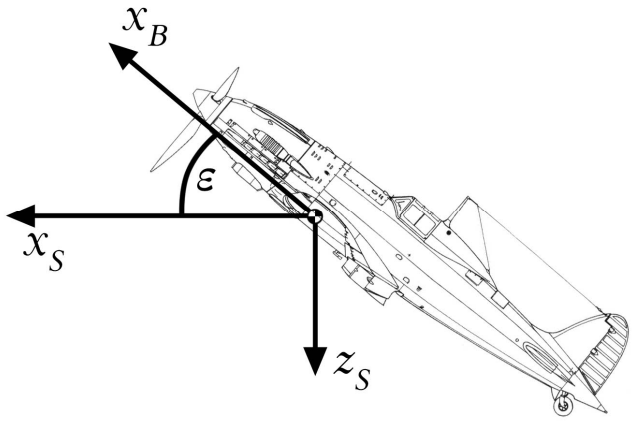


Figura 10

La cosa non presenta particolari difficoltà, una volta noti i momenti d'inerzia nel sistema di assi principali, i quali possono sempre essere determinati una volta noto l'angolo ε tra la terna di assi principali e la terna di assi di stabilità.

$$\begin{cases} I_{x_S} = I'_x \cos^2 \varepsilon + I'_x \operatorname{sen}^2 \varepsilon \\ I_{y_S} = I'_y \\ I_{z_S} = I'_x \operatorname{sen}^2 \varepsilon + I'_z \cos^2 \varepsilon \\ I_{xz_S} = \dfrac{1}{2}\left(I'_x - I'_z\right) \operatorname{sen} 2\varepsilon \end{cases}$$

4.9 - ELEMENTI IN MOTO RELATIVO

Abbiamo parlato di velivolo rigido come principale assunzione nella formulazione delle equazioni del moto; occorre però tener presente che esistono degli elementi in moto relati-

[14] Attenzione a non fare confusione: bisogna nuovamente calcolare il tensore d'inerzia perchè le due configurazioni di equilibrio sono diverse, ossia è diverso nei due casi l'orientamento del velivolo rispetto alla terna di stabilità; il tempo, in questo caso, non c'entra niente, anche perché la terna di stabilità, a partire dall'istante $t = t_0$, resta solidale al velivolo in quanto è una terna corpo e dunque il tensore d'inerzia in assi di stabilità non dipende dal tempo.

vo rispetto al velivolo, per i quali non è quindi possibile fare l'ipotesi di corpo rigido: questo significa tener conto di sottosistemi, i quali tipicamente sono in rotazione rispetto al sistema principale che è quello costituito dal velivolo. Un classico esempio di elementi in moto relativo sono le eliche o gli elementi retorici dei turbogetti e dei turboventola; questi elementi possono avere un effetto sul comportamento del velivolo: tali effetti, che discuteremo solo dal punto di vista qualitativo, rientrano sotto la definizione generale di *effetti di tipo giroscopico*. Per considerare l'apporto di tali elementi in moto relativo dobbiamo tener conto del fatto che esistano dei termini di momento della quantità di moto addizionali, che, per il generico elemento in rotazione, avranno un'espressione del tipo

$$\vec{h}_r = \underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r$$

dove $\underline{\underline{I}}_r$ rappresenta il tensore d'inerzia dell'elemento rotorico, determinato rispetto ad una terna centrata nel centro di massa dell'elemento ed equiorientata rispetto alla terna corpo, mentre $\vec{\omega}_r$ è la velocità relativa dell'elemento in rotazione rispetto all'aeromobile. Sotto certe ipotesi, in particolare relative al numero di pale dell'elemento in rotazione, $\underline{\underline{I}}_r$ può essere costante e la precedente equazione diventa un termine dell'equazione di bilancio del momento angolare ed in particolare dovrà intervenire la derivata nel riferimento mobile del momento angolare $\vec{h}_r$, con il risultato che a 1° membro avremo dei termini del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{\underline{I}}_{r_i} \vec{\omega}_{r_i} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\underline{\underline{\omega}}} \underline{\underline{I}}_{r_i} \vec{\omega}_{r_i}$$

dove n corrisponde al numero di elementi rotorici del sistema: osserviamo come intervenga il prodotto tra la velocità angolare della terna solidale al velivolo (rappresentata dalla matrice $\tilde{\underline{\underline{\omega}}}$) ed il momento angolare della massa in rotazione (dato da $\underline{\underline{I}}_{r_i} \vec{\omega}_{r_i}$); termini di questo tipo producono effetti di accoppiamento inerziale tra dinamica delle masse in rotazione e dinamica dell'aeromobile.

4.10 - EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO IN ASSI VENTO

Abbiamo trattato tutto ciò che riguarda la scrittura delle equazioni del moto del velivolo, equazioni che useremo sia nello studio delle prestazioni che nello studio della stabilità dinamica. Lo studio delle prestazioni viene fatto con riferimento a certe condizioni di equilibrio, ma, cosa molto più importante, viene fatto con riferimento ad un modello semplificato dell'apparecchio, che chiamiamo *modello di punto materiale*, nel quale immaginiamo cioè

che la dinamica di assetto possa essere trascurata e si possa quindi lavorare solo in termini di equilibri di forze; questa è un'ipotesi abbastanza rilevante, perché vedremo che quasi tutto lo studio delle caratteristiche di volo viene fatto appunto trascurando l'assetto, cioè il moto del velivolo rispetto al suo baricentro, e ciò in definitiva significa che nello studio delle prestazioni supporremo realizzato l'equilibrio dei momenti rispetto al baricentro[15]. Certamente, se e quando occorrano risultati più accurati, si studieranno anche le condizioni di equilibrio delle forze tenendo conto anche dell'equilibrio di assetto.

In particolare risulta molto conveniente per i motivi che vedremo, scrivere l'equazione di bilancio della quantità di moto in una terna di assi vento: dal momento in cui non ci interessa l'orientamento del velivolo non è necessario lavorare in una terna di assi corpo, poiché risulta molto più semplice, soprattutto per quanto riguarda l'espressione delle azioni aerodinamiche, lavorare in una terna di assi vento. La terna di riferimento $\mathfrak{I}_W$ è una terna non inerziale e quindi la forma dei termini inerziali dell'equazione sarà la stessa di quella che avevamo in $\mathfrak{I}_B$

$$m\left(\dot{\vec{v}}_c + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_W = \left(\vec{F}_A + \vec{F}_P + \vec{F}_T\right)_W$$

dove $\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_W$ rappresenta la velocità angolare della terna di assi vento, ed è in generale diversa da $\underline{\underline{\tilde{\omega}}}$ che ricordiamo rappresenta la velocità angolare della terna di assi corpo. Dobbiamo a questo punto scrivere la precedente per componenti scalari in $\mathfrak{I}_W$ e cominciamo col esprimere le componenti dei diversi vettori: per quanto riguarda le velocità abbiamo

$$\left(\vec{v}_c\right)_W = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \left(\vec{\omega}\right)_W = \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix}$$

mentre per le forze abbiamo

$$\left(\vec{F}_A\right)_W = \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} \qquad \left(\vec{F}_P\right)_W = \begin{bmatrix} -mg \operatorname{sen}\theta_W \\ mg\cos\theta_W \operatorname{sen}\varphi_W \\ mg\cos\theta_W \cos\varphi_W \end{bmatrix} \qquad \left(\vec{F}_T\right)_W = \begin{bmatrix} \left(F_{Tx}\right)_W \\ \left(F_{Ty}\right)_W \\ \left(F_{Tz}\right)_W \end{bmatrix}$$

[15] Equilibrio realizzato attraverso un'azione sui controlli, cioè attraverso un'opportuna rotazione delle superfici di controllo aerodinamico.

dove θ_W e φ_W sono due degli angoli di Eulero che identificano l'orientamento della terna di assi vento rispetto alla terna inerziale ed in genere sono detti rispettivamente *angolo di beccheggio* ed *angolo di rollio del vettore velocità*. Calcolando il prodotto $\left(\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_W$

$$\left(\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_W = \begin{bmatrix} 0 & -r_W & q_W \\ r_W & 0 & -p_W \\ -q_W & p_W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_W V \\ -q_W V \end{bmatrix}$$

otteniamo che in forma scalare la $m\left(\dot{\vec{v}}_c + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_w = \left(\vec{F}_A + \vec{F}_P + \vec{F}_T\right)_W$ diventa

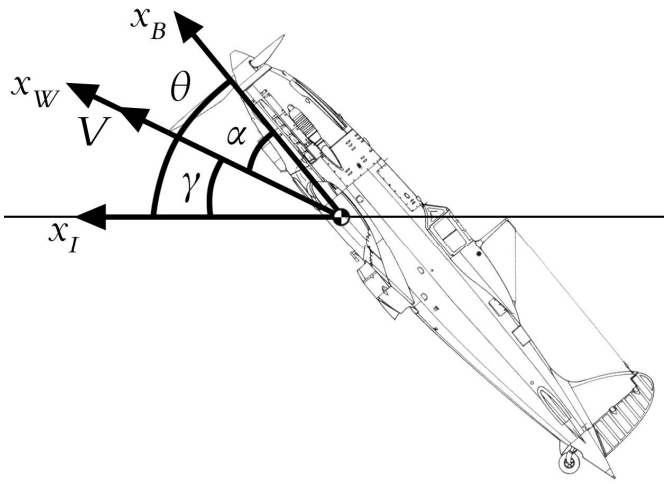
$$\begin{cases} m\dot{V} = -D - mg \operatorname{sen} \theta_W + F_{T_{xW}} \\ mr_W V = -C + mg \cos\theta_W \operatorname{sen} \varphi_W + F_{T_{yW}} \\ -mq_W V = -L + mg \cos\theta_W \cos\varphi_W + F_{T_{zW}}. \end{cases}$$

Faremo quasi sempre riferimento, tranne che in un caso particolare, a condizioni di volo simmetrico (angolo β di derapata nullo), perciò condizioni di volo nelle quali tutte le variabili non appartenenti al piano di simmetria sono nulle; avremo perciò

$$C = 0 \qquad \varphi_W = 0 \qquad r_W = 0 \qquad F_{T_{yW}} = 0$$ [16]

e nell'ambito di tali ipotesi la seconda equazione del sistema è un'identità; prima di scrivere le restanti due equazioni, diamo qualche definizione: consideriamo una vista laterale del velivolo e mettiamo in evidenza i tre assi x_I, x_B e x_W.

[16] Possiamo affermare che quest'ipotesi sia una conseguenza del volo simmetrico, perché se l'angolo di rollio non è nullo, è molto difficile volare in equilibrio mantenendo pari a zero tutte le grandezze non simmetriche: per volare su una traiettoria rettilinea con il velivolo in sbandamento, dobbiamo compiere certe operazioni sui comandi (ciò che i piloti chiamano "incrociare i comandi") e volare di solito ad angolo di derapata diverso da zero. Quindi l'ipotesi $\varphi_W = 0$ è strettamente legata all'ipotesi di volo simmetrico, anche se stiamo parlando di angoli di Eulero della terna vento, poiché l'asse z_W giace nel piano di simmetria del velivolo, c'è comunque una parentela tra φ_W e l'angolo di rollio del velivolo.



Angolo d'attacco α, angolo di rampa γ ed angolo di beccheggio θ - Figura 11

L'angolo tra x_B e x_W è α_x (angolo d'attacco); l'angolo tra x_W e x_I è l'angolo θ_W che di fatto è l'angolo (di Eulero) che nella condizione di volo simmetrico permette di definire la giacitura dall'asse x_W rispetto all'orizzontale; infine l'angolo tra x_B e x_I è l'angolo θ (di Eulero) che permette di identificare la giacitura di x_B rispetto all'orizzontale. Indicheremo l'angolo θ_W d'ora in avanti con γ, prendendo il nome di *angolo di rampa*, identificando l'orientamento del vettore velocità rispetto all'orizzontale e, nel piano verticale, la direzione della traiettoria del velivolo.

Osserviamo come dalla figura 11 risulti

$$\gamma = \theta - \alpha_x$$

Nella condizione di volo simmetrico che stiamo trattando risulta anche che $q_W = \dot{\gamma}$ (possiamo capirlo immediatamente se facciamo riferimento alla matrice $\underline{\underline{R}}$ vista nel § 5), ma si faccia attenzione al fatto che ciò vale, come anche la $\gamma = \theta - \alpha_x$, solo nel caso che stiamo trattando di volo in condizioni simmetriche.

A questo punto possiamo riscrivere la prima e la terza del sistema nelle ipotesi considerate

$$\begin{cases} m\dot{V} = -D - mg\,\mathrm{sen}\,\gamma + F_{T_{xW}} \\ -m\dot{\gamma}V = -L + mg\cos\gamma + F_{T_{zW}} \end{cases}$$

e le cose si semplificano ulteriormente se facciamo un'ipotesi riguardo alla direzione del vettore $\vec{F}_T$: lo studio delle prestazioni viene solitamente fatto in condizioni che sono prossime a quelle in cui l'aeromobile passa la maggior parte della sua vita operativa, quindi in particolare, condizioni di volo in crociera e condizioni di volo in salita ed in discesa durante

la missione, e quindi, nell'ambito di tale tipo di problemi, possiamo immaginare che la forza propulsiva sia diretta secondo l'asse vento x_W, perciò possiamo supporre

$$\begin{cases} F_{T_{xW}} \approx T \\ F_{T_{zW}} \approx 0 \end{cases}$$

e dunque scrivere

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}\dot{V} = T - D - W \operatorname{sen}\gamma \\ -\dfrac{W}{g}\dot{\gamma}V = -L + W\cos\gamma \end{cases}$$

avendo introdotto il peso $W = mg$.

4.11 - EQUAZIONE DI EQUILIBRIO ENERGETICO

Le caratteristiche di volo vengono studiate utilizzando un'equazione che discende dal sistema precedente, ma che privilegia un'analisi di tipo energetico; in termini di energia (ci occuperemo di energia cinetica e di energia potenziale) certi effetti e certi contributi diventano molto evidenti dal punto di vista fisico. La formulazione di questa equazione di bilancio energetico implica qualche passaggio formale ed un'ulteriore semplificazione relativa al fatto che faremo sempre riferimento, se non altrimenti specificato, ad una condizione di volo su traiettoria rettilinea e ciò significa che è del tutto accettabile considerare situazioni in cui l'angolo di rampa si mantenga costante (dunque $\dot{\gamma} = 0$); sotto quest'ultima ipotesi la seconda delle equazioni del sistema diventa

$$L = W\cos\gamma$$

e tale equazione prende spesso il nome di *equazione di sostentamento*, poiché con essa si afferma che la portanza (o forza sostentante) del velivolo deve fare equilibrio al peso o, nel caso in cui sia diverso da zero l'angolo di rampa, deve fare equilibrio ad una componente del peso. Tenendo conto che la precedente deve sempre essere soddisfatta, la prima equazione del sistema viene riscritta in termini energetici, moltiplicando ambo i membri per la velocità di volo

$$\frac{W}{g}\dot{V}V = V(T - D) - WV\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

sapendo che

$$\frac{V\dot{V}}{g} = \frac{d}{dt}\frac{V^2}{2g}$$

perciò

$$\frac{d}{dt}\frac{V^2}{2g} = V\frac{T - D}{W} - V\,\mathrm{sen}\,\gamma\,.$$

Si noti che $V\,\mathrm{sen}\,\gamma$ rappresenta la velocità verticale del velivolo nel riferimento inerziale $\Im_I$

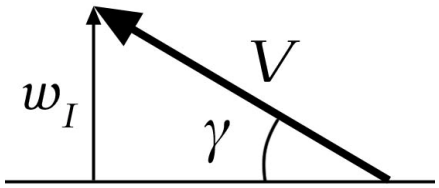


Figura 12

ed è perciò pari alla variazione di quota rispetto al tempo

$$w_I = \frac{dh}{dt}$$

ed dunque si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2g} + h\right) = \frac{VT - VD}{W}$$

Il 1° membro rappresenta la derivata rispetto al tempo di grandezze che hanno le dimensioni di un'altezza: h è l'*altezza geometrica* ed è rappresentativa dell'energia potenziale associata al velivolo, mentre $\frac{V^2}{2g}$ è detta *altezza cinetica* od *altezza di arresto* dell'aeroplano

ed è rappresentativa dell'energia cinetica associata all'aereo. Indichiamo con h_c il termine di altezza cinetica, mentre con H indichiamo la cosiddetta *altezza totale*

$$h_c = \frac{V^2}{2g} \qquad \Rightarrow \qquad H = h_c + h\,.$$

Occupiamoci ora del 2° membro: i termini a numeratore hanno le dimensioni di una potenza, definiamo pertanto la potenza disponibile Π_d e la potenza necessaria Π_n come

$$\Pi_d = VT \qquad \text{potenza disponibile}$$
$$\Pi_n = VD \qquad \text{potenza necessaria}$$

così come possiamo definire la spinta disponibile e la spinta necessaria

$$T_d = T \qquad \text{spinta disponibile}$$
$$T_n = D \qquad \text{spinta necessaria}$$

perciò l'equazione di bilancio energetico può essere scritta come

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\Pi_d - \Pi_n}{W} = \frac{\Delta\Pi}{W}\,.$$

Questa equazione costituisce la base per lo studio delle caratteristiche di volo dell'aereo. Il termine $\frac{\Delta\Pi}{W}$ prende il nome di *eccesso di potenza specifica* e rappresenta un parametro di fondamentale importanza per lo studio delle prestazioni. Compiremo lo studio delle caratteristiche di volo, tenendo conto che l'equazione $L = W\cos\gamma$ di sostentamento deve sempre essere soddisfatta, con riferimento alla precedente, la quale può essere specializzata per trattare tutta una serie di problemi: in particolare un certo numero di caratteristiche di volo sono relative a condizioni di volo a velocità costante il che significa $h_c = \text{cost.}$ e quindi la precedente diventa

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

e con questa equazione studieremo, per esempio, le caratteristiche di volo in salita, trattandole dunque come fasi di volo a velocità costante ed a quota variabile. Un altro caso interessante sarà quello di volo a quota costante, nel quale caso l'equazione di bilancio energetico diventa

$$\frac{dh_c}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

e con questa studieremo fasi di volo accelerato e decelerato, quindi fasi di volo nelle quali viene modificata la velocità del velivolo. Infine, l'altro caso che ha un numero di applicazioni vastissimo e comprende tutte le fasi di volo in crociera, è quello in cui sia la quota che la velocità siano costanti, perciò in tale situazione l'equazione di bilancio energetico si riduce a

$$\frac{\Delta\Pi}{W} = 0$$

il che significa $\Pi_d = \Pi_n$, o in modo equivalente $T_d = T_n$.

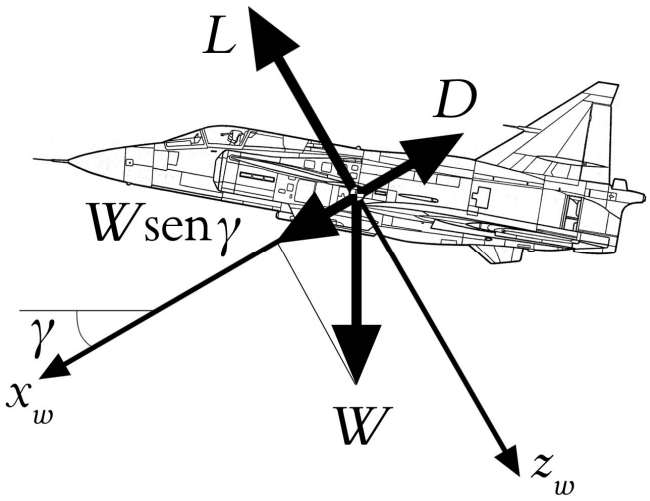
Capitolo 5

IL VOLO LIBRATO

5.1 - ANGOLO DI RAMPA E VELOCITÀ DI VOLO

Il primo problema per il quale studieremo le prestazioni riguarda il volo in assenza di propulsione, che viene generalmente indicato come *volo librato*. Per trattare questo fenomeno potremmo usare l'equazione di bilancio energetico, ma, tenendo conto che la forza propulsiva è nulla, possiamo partire semplicemente dall'equazione di bilancio della quantità di moto in assi vento (le due cose sono del tutto equivalenti). In volo librato operano sempre i velivoli sprovvisti di apparato propulsivo o il cui apparato propulsivo ha cessato di funzionare.

Facciamo anzitutto uno schema del velivolo in questa situazione.



SAAB JA-37 Viggen - Figura 1

In figura 1 troviamo un aereo che scende muovendosi lungo una traiettoria rettilinea: osserviamo come in questa condizione di volo una componente del peso (e precisamente $W \operatorname{sen} \gamma$) sia diretta nella direzione del vettore velocità, cioè nella direzione di avanzamento del velivolo, e svolge perciò le funzioni di una forza propulsiva; si parla in questo caso di contributo propulsivo del peso. Nell'ipotesi di volo su traiettoria rettilinea (quindi angolo di rampa costante) ed in assenza di spinta, le equazioni del moto scritte nel capitolo precedente diverranno

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}\dot{V} = -D - W \operatorname{sen} \gamma \\ 0 = W \cos \gamma - L \end{cases}$$

Il primo obbiettivo che ci proponiamo è di determinare da che cosa dipendano l'angolo di rampa e la velocità durante la discesa; facciamo pertanto l'ulteriore ipotesi che la discesa avvenga a velocità costante; vedremo poi come in realtà non sia possibile mantenere costante sia γ che V durante la discesa in volo librato.

Per la prima delle due equazioni di equilibrio si ha

$$-D - W \operatorname{sen} \gamma = 0$$

e dividendo membro a membro la precedente per la seconda delle equazioni di equilibrio si ottiene

$$\tan \gamma = -\frac{D}{L} = -\frac{1}{E}$$

e questa è la prima relazione fondamentale che caratterizza la condizione di volo librato. Notiamo come l'angolo di rampa dipenda esclusivamente dalle caratteristiche aerodinamiche dell'aeromobile, rappresentate dall'efficienza aerodinamica; l'angolo di rampa dunque non dipende dal carico alare e ciò significa che un velivolo molto pesante ed un velivolo molto leggero, se hanno la stessa configurazione aerodinamica, vale a dire la stessa efficienza, manterranno lo stesso angolo di rampa durante la discesa. Dipendendo esclusivamente da E, possiamo concludere che γ dipende esclusivamente dall'angolo d'attacco al quale stiamo volando e questo può essere rappresentato immediatamente per via grafica utilizzando una polare ruotata per convenienza di 90°, nella quale il C_L ed il C_D sono riportati nella stessa scala.

Tracciamo una qualunque retta per l'origine: essa interseca la polare nei punti A e B cui corrispondono due diversi valori del coefficiente di portanza e quindi due diversi valori dell'angolo d'attacco, che indichiamo con α_A ed α_B (con $\alpha_A < \alpha_B$). Abbiamo già detto come l'angolo ξ sia strettamente legato all'efficienza, poiché

$$\xi = \arctan E \qquad \Rightarrow \qquad \tan \gamma = -\frac{1}{\tan \xi} = -\cot \xi$$

quindi la retta tracciata identifica due condizioni di volo a diverso valore di angolo d'attacco, alle quali è però associato lo stesso valore di efficienza e quindi lo stesso angolo di rampa; in particolare osserviamo come, in base alla espressione della $\tan \gamma$, il complementare di ξ sia proprio γ. Tracciando perciò delle rette per l'origine ricaviamo gli angoli di rampa in volo librato che corrispondono ai diversi valori dell'angolo d'attacco, inoltre, tracciando la

tangente alla polare per l'origine, identifichiamo il valore α_C dell'angolo d'attacco cui corrisponde la massima efficienza aerodinamica e quindi il minimo angolo di rampa.

Passiamo ora a determinare la velocità; ricordiamo che per il calcolo della velocità in condizioni di volo sostentato si fa sempre riferimento all'equazione di sostentamento, cioè alla seconda delle equazioni del moto, dalla quale, esprimendo la portanza in funzione del C_L, si ottiene

$$L = W\cos\gamma = \frac{1}{2}\varrho S V^2 C_L \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}\cos\gamma}$$

ed anche questa è una importante relazione che indica, come ci aspettavamo, che la velocità dipende dal carico alare, dal coefficiente di portanza e dal coseno dell'angolo di rampa.

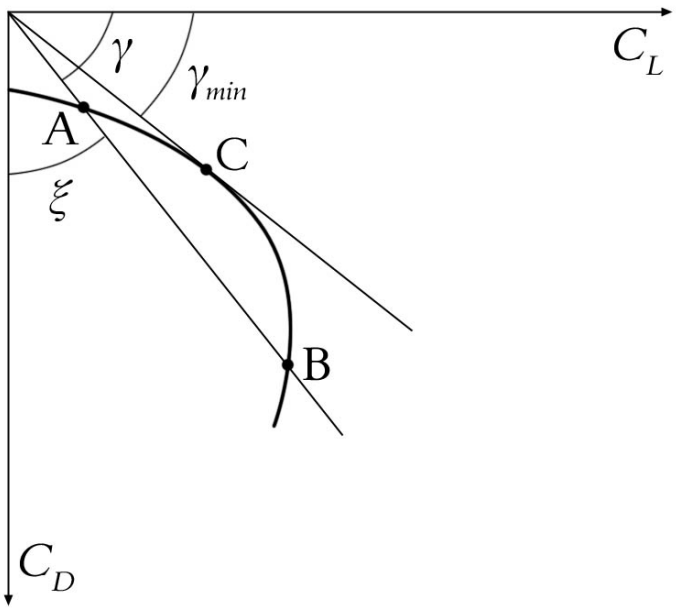


Figura 2

Notiamo inoltre che la precedente contiene un'altra informazione che vale la pena di discutere: osserviamo che la presenza della densità dell'aria comporta che, contrariamente a quanto ipotizzato all'inizio, la discesa non avviene a velocità costante, perché, variando la quota, varia la densità e di conseguenza la velocità; tale fatto è evidenziato da un'altra considerazione, l'equazione di sostentamento può essere espressa come

$$W\cos\gamma = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_L$$

perciò, se vogliamo effettuare la discesa ad angolo di rampa costante, il che implica per quanto visto prima che si mantenga costante anche il C_L, deve mantenersi costante anche la pressione dinamica durante la discesa e ciò significa volare a $V_{EAS} = \text{cost.}$; come conseguenza, durante la discesa, la V_{TAS} subirà una variazione ed in particolare andrà diminuendo. Quanto ora dimostrato ci pone il problema di quando poter considerare valida l'ipotesi di discesa a velocità costante: in effetti in moltissimi casi tale ipotesi è del tutto accettabile, poiché è vero che la velocità varia, ma varia molto lentamente[1]; esistono però delle situazioni in cui tale semplificazione perde la sua validità e più avanti vedremo proprio un caso di questo tipo, valutando l'errore che si commette trascurando $\dot{V}$.

5.2 - AUTONOMIA CHILOMETRICA E TEMPO DI DISCESA: INDICE DI QUOTA

Nello studio dei problemi del volo librato di solito interessa conoscere la massima distanza percorribile a partire da una certa quota od il tempo che il velivolo impieghi per scendere ad una certa quota ed il tempo che il velivolo impieghi per scendere da un certo livello di volo ad un altro livello oppure a terra. Il primo parametro riguarda principalmente situazioni in cui un velivolo motorizzato si trova, per avaria o per la fine del combustibile, a volare senza spinta: in questi casi è importante sapere quale sarà la massima distanza percorribile dal velivolo medesimo in modo tale che possa raggiungere un aeroporto; il problema del tempo invece riguarda principalmente il volo sportivo con gli alianti: massimizzare il tempo di discesa permette di rimanere in volo più a lungo e di sfruttare in modo più efficace le eventuali correnti ascensionali. Per determinare tali due caratteristiche ricorriamo alle due relazioni cinematiche

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = V\cos\gamma \\ \dfrac{dz}{dt} = -V\,\text{sen}\,\gamma = -\dfrac{dh}{dt} \end{cases}$$

che ci permettono di mettere in relazione la distanza x e la coordinata z nel riferimento inerziale con la velocità e l'angolo di rampa. Occupiamoci anzitutto della distanza percorsa: tenendo conto che possiamo scrivere

$$dx\tan\gamma = dh \qquad \Rightarrow \qquad dx = -Edh$$

[1] Se prendiamo in considerazione un aliante, date le velocità di discesa molto ridotte, tele ipotesi è del tutto ragionevole.

che possiamo integrare considerando una condizione di volo ad angolo d'attacco costante (e quindi è costante l'efficienza)

$$\int_0^x dx = -E\int_{h_i}^{h_f} dh$$

da cui

$$x = E\left(h_i - h_f\right).$$

Questa è la relazione che ci permette di esprimere lo spazio percorso; il risultato è particolarmente semplice ma ci fa notare come lo spazio percorso rispetto al suolo dall'aeromobile mentre questo scende dalla quota iniziale h_i alla quota finale h_f, dipende esclusivamente dall'efficienza aerodinamica, perlomeno nella situazione di volo in aria calma. Volendo percorrere la massima distanza possibile, che indichiamo con x_{md} (dove *md* sta per maggior distanza, in inglese *best range*), dovremo volare alla massima efficienza aerodinamica

$$x_{md} = E_{max}\left(h_i - h_f\right).$$

Spendiamo qualche parola riguardo alle condizioni in cui venga resa massima l'efficienza, seguendo sia un approccio grafico che un approccio analitico: lo scopo sarà quello di aggiungere qualche ulteriore informazione sul valore che i coefficienti aerodinamici assumono quando voliamo alla massima efficienza. L'approccio grafico è basato sulla polare: abbiamo già visto che l'angolo d'attacco cui corrisponde la massima efficienza aerodinamica si ottenga semplicemente tracciando la tangente per l'origine alla polare: indichiamo (vedi figura 3) con α_E l'angolo d'attacco di massima efficienza, corrispondente al punto di tangenza; a tale valore di α corrispondono un coefficiente di portanza ed un coefficiente di resistenza che indichiamo rispettivamente con C_{L_E} e C_{D_E}.

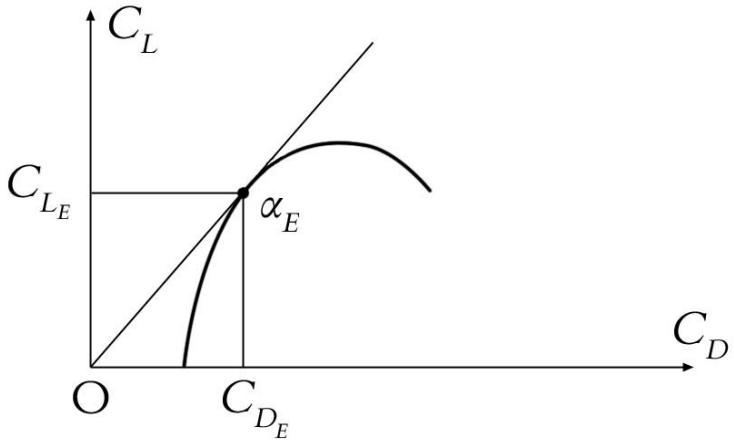


Figura 3

È interessante avere un'espressione analitica di tali coefficienti, partiamo perciò dalla polare parabolica

$$C_D = C_{D_0} + KC_L^2$$

la quale rappresenta un'ottima approssimazione della polare reale, almeno finché voliamo ad angoli d'attacco per i quali sussiste una relazione lineare tra C_L ed α. Se vogliamo trovare il valore del coefficiente di portanza relativo al valore massimo dell'efficienza dobbiamo scrivere la condizione differenziale

$$\frac{d}{dC_L}\left(\frac{1}{E}\right) = \frac{d}{dC_L}\left(\frac{C_D}{C_L}\right) = 0$$

dove per comodità invece che E (definito come C_L/C_D) abbiamo considerato il suo inverso e ne cerchiamo il minimo. Eseguendo la derivata troviamo

$$\frac{dC_D}{dC_L}\frac{1}{C_L} - \frac{C_D}{C_L^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dC_D}{dC_L}C_L - C_D = 0$$

sostituendo in tale relazione l'espressione della polare parabolica, otteniamo

$$2KC_L^2 - C_{D_0} - KC_L^2 = 0$$

da cui

$$C_{L_E} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}$$

che sostituito nella polare fornisce

$$C_{D_E} = 2C_{D_0}$$

e quindi per quanto riguarda il valore esplicito dell'efficienza massima si ha

$$E_{max} = \frac{C_{L_E}}{C_{D_E}} = \frac{1}{2\sqrt{KC_{D_0}}}$$

che, sostituendo a K la sua espressione in funzione del fattore di Oswald, possiamo anche scrivere come

$$E_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi Ae}{C_{D_0}}}\,.$$

Questa relazione è utile perché indica su quali parametri possiamo agire per massimizzare l'efficienza aerodinamica, la quale è un parametro fondamentale soprattutto per gli alianti. L'elemento più importante dunque è costituito proprio dall'allungamento alare: se desideriamo avere una configurazione ad elevata efficienza e che quindi abbia delle buone prestazioni in volo librato, una volta scelta una configurazione aerodinamica a bassa resistenza di attrito[2], cioè con un basso C_{D_0}, è conveniente aumentare l'allungamento alare perché ciò produce certamente un aumento dell'efficienza massima del velivolo. Gli alianti possiedono difatti allungamenti molto elevati (anche fino a 20) proprio per questo scopo; teniamo però presente che non conviene aumentare a dismisura l'allungamento alare poiché, ad un certo punto, intervengono problemi di tipo strutturale od anche di tipo aerodinamico: per quanto riguarda i primi, si tratta essenzialmente di problemi di peso di un'ala molto allungata che, anche parlando di alianti, deve comunque avere certe caratteristiche di rigidezza; per quanto riguarda l'aspetto aerodinamico, supponendo che sia fissato il carico alare, l'aumento di allungamento avverrà a superficie alare costante e ciò implica una riduzione della corda; questo significa che diminuirà il numero di Reynolds del profilo e tale effetto si tradurrà in un aumento della resistenza di attrito sul profilo stesso.

[2] Pensiamo a quanto sia curata la forma aerodinamica degli alianti, la cui fusoliera vista in sezione ricorda molto la forma di un profilo.

Passiamo ora all'altra caratteristica di volo: il tempo di discesa. Partiamo dalla seconda delle due relazioni cinematiche scritte all'inizio, che possiamo riscrivere esplicitando la velocità

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}\cos\gamma}\,\operatorname{sen}\gamma$$

dove $\frac{dh}{dt} = V\operatorname{sen}\gamma$ è la velocità verticale di discesa del velivolo e prende il nome di *velocità variometrica*[3]. Per mettere in evidenza quali siano i parametri che influenzino il tempo di discesa, facciamo una piccola semplificazione: teniamo conto che in genere l'angolo di rampa è piccolo in volo librato, perciò possiamo porre $\sqrt{\cos\gamma} \approx 1$ e $\operatorname{sen}\gamma \approx \tan\gamma$, e introducendo anche il rapporto $\delta = \frac{\varrho}{\varrho_{LM}}$ la precedente diventa

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho_{LM} C_L}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\tan\gamma$$

tenendo conto che $\tan\gamma = -1/E$

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho_{LM} C_L}}\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\frac{1}{E}$$

da cui otteniamo

$$dt = -\frac{E\sqrt{C_L}}{\sqrt{\dfrac{2\,W/S}{\varrho_{LM}}}}\sqrt{\delta}\,dh$$

Se il volo avviene ad incidenza costante, il primo coefficiente della relazione ora ottenuta è costante, perciò integrando si ottiene

$$\int_0^t dt = -\frac{E\sqrt{C_L}}{\sqrt{\dfrac{2\,W/S}{\varrho_{LM}}}}\int_{h_i}^{h_f}\sqrt{\delta}\,dh\,.$$

[3] La misura della velocità variometrica viene effettuata con uno strumento che si chiama *variometro*.

Con la precedente esprimiamo il tempo di discesa del velivolo; notiamo che la variazione di δ con la quota è quella dell'aria standard, ma molto spesso tale variazione viene approssimata con una relazione del tipo $\delta = e^{-\beta h}$, dove β è una costante nota. Comunque, al di là di questi aspetti secondari, notiamo che i parametri caratteristici che determinano il tempo di discesa sono anzitutto il carico alare: bassi carichi alari determinano ridotte velocità lungo la traiettoria e perciò tempi di discesa maggiori; quindi se vogliamo rimanere molto in volo, certamente conviene avere un velivolo con un carico alare basso e difatti negli alianti il carico alare è piuttosto ridotto. L'altro parametro importante è il coefficiente di portanza, che ci indica a quale angolo d'attacco dobbiamo volare per massimizzare il tempo di discesa: se vogliamo rendere massimo il tempo di discesa dobbiamo rendere massimo il prodotto $E\sqrt{C_L}$, che prende il nome di *indice di quota*[4] e questo identifica un altro valore caratteristico dell'angolo d'attacco; per determinare tale valore di α dobbiamo anzitutto scrivere come prima una condizione differenziale di $\left(E\sqrt{C_L}\right)_{max}$, ovverosia di $\left(\frac{C_L^3}{C_D^2}\right)_{max}$, perciò la condizione che dobbiamo scrivere sarà

$$\frac{d}{dC_L}\left(\frac{C_D^2}{C_L^3}\right) = 0$$

risolvendo

$$\frac{dC_D^2}{dC_L}\frac{1}{C_L^3} + \frac{d}{dC_L}\left(\frac{1}{C_L^3}\right)C_D^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{C_D}{C_L^3}\frac{dC_D}{dC_L} - 3\frac{C_D^2}{C_L^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_D}{dC_L} = \frac{3}{2}\frac{C_D}{C_L}$$

e tale relazione torna utile per una soluzione di tipo grafico: tracciamo di nuovo la polare del velivolo

[4] Tale denominazione è dovuta al fatto che, come vedremo studiando le caratteristiche di salita nel caso di volo motorizzato, è qualcosa che caratterizza la capacità dell'aeromobile di mantenere o di aumentare la quota.

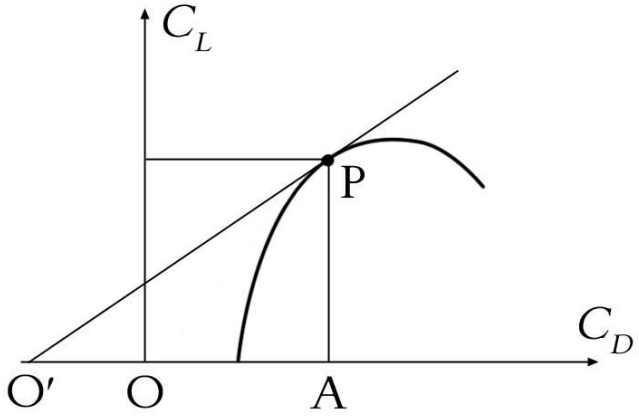


Figura 4

e supponiamo di aver tracciato la tangente alla polare in un certo punto P. Sia O l'origine del sistema di assi, O′ l'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse e A il punto corrispondente al coefficiente di resistenza relativo all'angolo d'attacco individuato dal punto P. Notiamo come la derivata $\frac{dC_D}{dC_L}$ possa essere rappresentata dal rapporto $\frac{\overline{O'A}}{\overline{PA}}$, perciò la $\frac{dC_D}{dC_L} = \frac{3}{2}\frac{C_D}{C_L}$ diventa

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{PA}} = \frac{3}{2}\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}}$$

da cui si ottiene che la condizione di massimo indice di quota è

$$\overline{O'A} = \frac{3}{2}\overline{OA}\,.$$

Quindi se abbiamo a disposizione la polare vera dell'aeromobile, cominciamo a tracciare le tangenti a partire dalle alte incidenze e per ogni punto misuriamo le due quantità $\overline{O'A}$ ed $\overline{OA}$: quando troviamo che tali due segmenti sono legati dalla relazione precedente abbiamo determinato il punto P per il quale l'angolo d'attacco massimizza l'indice di quota. L'informazione interessante che può essere rilevata dal grafico è che l'angolo d'attacco di massimo indice di quota tipicamente non è molto lontano dall'angolo d'attacco cui corrisponde il massimo valore del C_L. Come fatto prima per la massima efficienza, determiniamo le espressioni del C_L e del C_D cui corrisponde il massimo indice di quota: utilizzando la polare parabolica nella $\frac{dC_D}{dC_L} = \frac{3}{2}\frac{C_D}{C_L}$ otteniamo

$$2KC_L = \frac{3}{2}\left(\frac{C_{D_0}}{C_L} + KC_L\right) \qquad \Rightarrow \qquad 4KC_L^2 = 3C_{D_0} + 3KC_L^2$$

da cui ricaviamo immediatamente

$$C_{L_\Pi} = \sqrt{\frac{3C_{D_0}}{K}}$$

che sostituito nella polare parabolica ci da

$$C_{D_\Pi} = 4C_{D_0}$$

e quindi

$$E_\Pi = \frac{C_{L_\Pi}}{C_{D_\Pi}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{1}{KC_{D_0}}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{\pi Ae}{C_{D_0}}}\,.$$

Può avere interesse vedere quanto varino l'angolo di rampa e la velocità, nel caso in cui si voli nelle due situazioni analizzate; in altre parole è interessante determinare quanto perdiamo in termini di angolo di rampa se vogliamo massimizzare la durata del volo, rispetto all'angolo di rampa (minimo) che avremmo se volassimo alla massima efficienza, ed anche quant'è la differenza di velocità tra le due condizioni di volo. Cominciamo con lo stimare il rapporto

$$\frac{\gamma_\Pi - \gamma_E}{\gamma_E}$$

nel quale γ_E è proprio l'angolo di rampa minimo; abbiamo

$$\frac{\gamma_\Pi - \gamma_E}{\gamma_E} = \frac{\gamma_\Pi}{\gamma_E} - 1$$

dove il rapporto $\frac{\gamma_\Pi}{\gamma_E}$, sempre nell'ipotesi di piccoli angoli di rampa e ricordando la $\tan\gamma = -1/E$, può essere espresso come

$$\frac{\gamma_\Pi}{\gamma_E} = \frac{E_{max}}{E_\Pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{KC_{D_0}}}\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{KC_{D_0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$$

perciò

$$\frac{\gamma_{\Pi} - \gamma_E}{\gamma_E} \approx 0{,}15$$

Per quanto riguarda la differenza di velocità, stimiamo il rapporto

$$\frac{V_E - V_{\Pi}}{V_E} = 1 - \frac{V_{\Pi}}{V_E}$$

dove

$$\frac{V_{\Pi}}{V_E} = \sqrt{\frac{C_{L_E}}{C_{L_{\Pi}}}} = \left(\frac{C_{D_0}}{K} \frac{K}{3C_{D_0}} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0{,}76$$

per ciò

$$\frac{V_E - V_{\Pi}}{V_E} \approx 0{,}24\,.$$

Quindi per rendere massima la durata del volo, ci troviamo ad un angolo d'attacco per il quale l'angolo di rampa è maggiore del 15% di quello (minimo) che avremmo volando alla massima efficienza, ma con una velocità che è più bassa (24%) di quella di massima efficienza, per questo motivo restiamo in aria più a lungo.

Per chiarire le idee su quanto sinora detto facciamo un esempio: supponiamo che un Boeing 747 abbia esaurito il combustibile e si trovi quindi in una condizione di volo librato; determiniamo quale sia l'angolo di discesa che gli consenta di percorrere la maggior distanza e quanto tempo impieghi a giungere a terra. Per un aereo di questo tipo possiamo assumere un carico alare di $4{\cdot}800\ \mathrm{N/m^2}$ ed una polare teorica data da $C_D = 0{,}015 + 0{,}06C_L^2$; se applichiamo le espressioni introdotte, troviamo che l'efficienza massima è $E_{max} = 16{,}7$ mentre l'angolo di rampa minimo è $\gamma_E = -3{,}4°$. Partendo da una quota iniziale $h_i = 40{\cdot}000$ ft troviamo che la maggior distanza è data da $x_{md} = 203$ km, mentre le velocità iniziale e finale sono rispettivamente $V_{E_i} = 908$ km/h [5] e $V_{E_f} = 500$ km/h. Quest'ultimo risultato ci riporta al problema relativo all'ipotesi di velocità costante: notiamo come vi sia una variazione rilevante della velocità (e più avanti vedremo come tenerne conto in modo corretto), ma te-

[5] Notiamo come la discesa che massimizzi la distanza inizia a velocità molto elevata.

niamo anche presente che il tempo di discesa per passare da 40˙000 ft al livello del mare calcolato per tale aeroplano nelle condizioni sopraccitate è di circa 18 minuti, perciò la variazione di velocità avviene comunque con una certa lentezza.

5.3 - ODOGRAFA DEL MOTO

La forma grafica di presentazione delle caratteristiche di volo di un aliante prende il nome di *odògrafa*[6] *del moto* o diagramma polare delle velocità; vediamo pertanto come si costruisca l'odògrafa del moto e quali informazioni si deducano da tale grafico. Partiamo dalle equazioni del moto del velivolo nell'ipotesi di velocità costante durante la discesa

$$\begin{cases} D = -W \operatorname{sen} \gamma \\ L = W \cos \gamma \end{cases}$$

e tracciamo (vedi figura 5) il grafico della polare ruotato per comodità di 90°. Disegniamo una generica retta per l'origine, la quale interseca la polare nei punti A e B: restano così individuati un certo angolo di rampa γ ed i due diversi valori di angolo d'attacco (e quindi di velocità) α_A e α_B nonché i relativi coefficienti di portanza e di resistenza, che corrispondono a quel valore di γ[7]; per completezza tracciamo anche la tangente per l'origine alla polare, la quale fornisce come sappiamo il valore minimo dell'angolo di rampa.

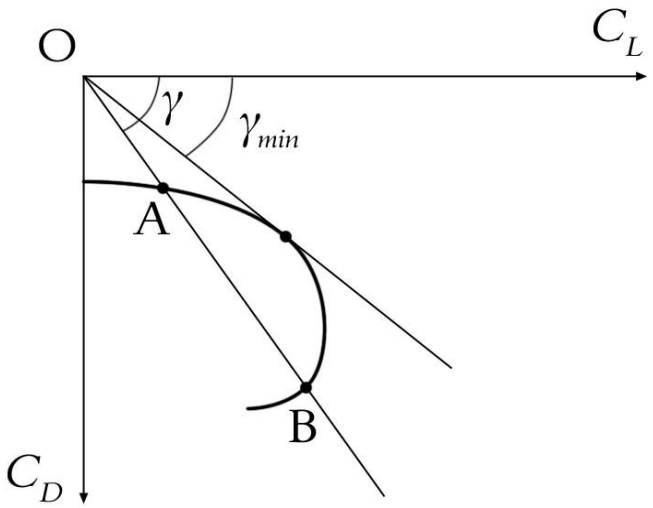


Figura 5

[6] Odògrafo, in meccanica, è detto della curva che si ottiene congiungendo gli estremi di tutti i vettori che rappresentano la velocità del punto. Dal greco οδος, strada.

[7] Abbiamo già sottolineato il fatto che nella maggior parte dei casi ad un certo angolo di rampa corrispondono due diversi valori dell'angolo d'attacco.

Quadrando e sommando membro a membro le equazioni che abbiamo scritto troviamo

$$W^2 = L^2 + D^2$$

relazione che ci permette di ottenere un'espressione della velocità di volo indipendente dall'angolo di rampa: esplicitando difatti portanza e resistenza otteniamo

$$\left(\frac{1}{2}\varrho V^2\right)^2 S^2 \left(C_L^2 + C_D^2\right) = W^2$$

da cui

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho\left(C_L^2 + C_D^2\right)^{\frac{1}{2}}}}$$

espressione nella quale non compare l'angolo di rampa. Definiamo a questo punto un coefficiente di forza aerodinamica

$$C_F = \left(C_L^2 + C_D^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

in modo tale che l'espressione della velocità diventi

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_F}}.$$

Torniamo alla polare e fissiamo l'attenzione sul punto A: osserviamo come il segmento $\overline{\mathrm{OA}}$ rappresenti proprio il coefficiente di forza C_{F_A} della configurazione relativa al punto A; una volta noto tale coefficiente, avendo fissato una certa quota[8] (e quindi un certo valore di densità), determiniamo la velocità V_A corrispondente al punto A). Riportiamo sullo stesso grafico due ulteriori assi, uno rappresentativo delle velocità variometriche w_I ed uno corrispondente alle velocità orizzontali u_I, e tracciamo lungo la retta corrispondente all'angolo di rampa γ un vettore il cui modulo è pari al valore di velocità appena determinato[9]. Analogamente, per quanto riguarda il punto B, una volta misurato il segmento $\overline{\mathrm{OB}}$ abbia-

[8] Il diagramma che otterremo sarà perciò valido per quella determinata quota.

[9] Si tratta di fatto di una rappresentazione polare.

mo il relativo coefficiente di forza aerodinamica C_{F_B}) (osserviamo che l'angolo d'attacco relativo al punto B è maggiore di quello relativo al punto A, perciò $C_{F_B} > C_{F_A}$) e quindi, sempre per quel valore della quota, determiniamo la velocità V_B (che sarà più bassa di V_A) e tracciamo un vettore avente modulo proprio pari a V_B e diretto sempre lungo la retta corrispondente all'angolo di rampa γ. L'estremo libero dei due vettori ora tracciati individua due punti: se ripetiamo la costruzione ora fatta per tutti i possibili valori di angolo di rampa a partire da γ_E (che ricordiamo è il valore minimo), otteniamo un grafico che ha la forma seguente

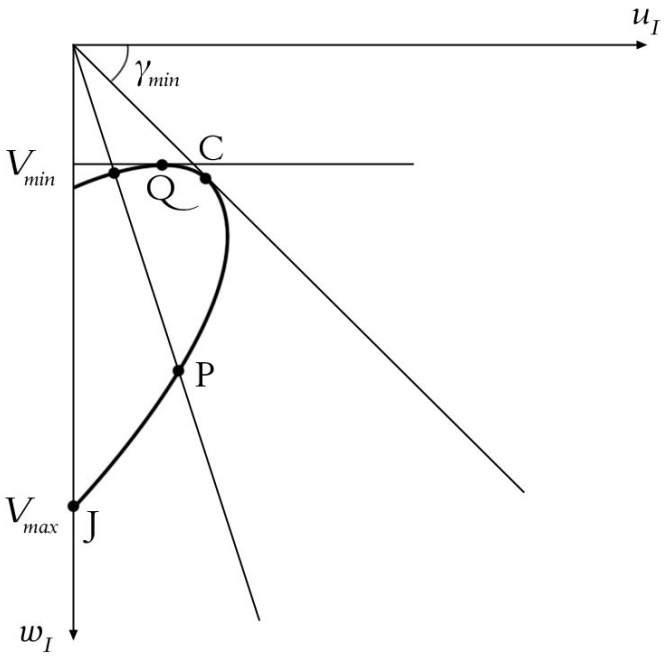


Figura 6

e che prende il nome di odògrafa del moto.

Discutiamo il grafico di figura 6 in modo che si capisca anche che tipo di informazioni ne ricaviamo; se abbiamo a disposizione l'odògrafa del nostro aliante, dato il generico angolo di rampa γ_P, la retta corrispondente interseca l'odògrafa nel punto P: conosciamo allora immediatamente il valore della velocità di volo in equilibrio $V_P = \overline{OP}$, valore delle due componenti di velocità u_{I_P}, (velocità orizzontale) e w_{I_P} (velocità variometrica), e se ci interessa, anche l'efficienza $E_P = \tan \xi_P$.

Osserviamo come l'odògrafa debba essere per forza tangente alla retta corrispondente al valore minimo dell'angolo di rampa[10]: con C indichiamo il punto corrispondente al volo con il minimo angolo di rampa e quindi alla velocità di massima efficienza; tale punto è in rela-

[10] Non possiamo volare in modo stazionario ad angoli di rampa minori di quello minimo.

zione a quello sulla polare in corrispondenza del quale l'angolo d'attacco è di massima efficienza. Abbiamo visto come una condizione di volo molto importante è quella in cui il valore dell'angolo d'attacco fornisce il tempo di discesa massimo; tale situazione corrisponde ad una velocità minima di discesa verticale, quindi il punto rappresentativo sull'odògrafa sarà dato dal punto Q di tangenza dell'odògrafa stessa con una retta orizzontale (vedi figura 6); possiamo poi tracciare la retta per l'origine passante per il punto Q ed otteniamo così l'angolo di rampa che massimizza il tempo di discesa e che, come ci dobbiamo aspettare, sarà leggermente maggiore dell'angolo di rampa minimo[11]; tale retta inoltre interseca la polare nel punto in corrispondenza del quale l'incidenza rende massimo l'indice di quota. L'altra informazione, da considerare poco approssimata (ora vedremo perché) è quella relativa al punto J, cui corrisponde una velocità massima di discesa (detta anche *velocità limite in affondata*) che indichiamo con V_{max}, ed a cui corrisponde una situazione in cui il coefficiente di portanza è pari a zero e l'angolo di rampa è di $-90°$; tale velocità massima corrisponde perciò ad un volo in una cosiddetta *picchiata in candela* (figura 7).

Come detto però il valore di V_{max} così determinato è assolutamente poco approssimato: osserviamo infatti come in una picchiata verticale le forze agenti siano il peso e la resistenza, perciò l'equazione di equilibrio in questo caso è

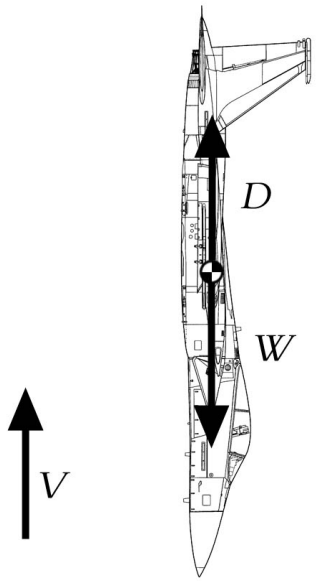
$$W = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D$$

ma essendo nulla la portanza si ha $C_D = C_{D_0}$ e quindi si ricava

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_{D_0}}}$$

che corrisponde al valore che leggeremmo sull'odògrafa. La precedente però ha una validità limitata, poiché teniamo presente che il C_{D_0} è molto ridotto nel caso di un aliante e dunque la V_{max} risultante sarebbe estremamente elevata, arrivando tipicamente in regime transonico: il risultato è che tale velocità non sarà in realtà raggiungibile poiché effetti di compressibilità, legati quindi al numero di Mach, aumentano certamente il valore minimo del C_{D_0}. Dunque se calcoliamo l'odògrafa con la polare teorica non abbiamo problemi sino a che la velocità non diventi elevata; al di sopra di certi valori, ed in particolare per quanto riguarda il calcolo della velocità massima, commettiamo degli errori non più trascurabili in quanto la polare parabolica non tiene conto della dipendenza dal numero di Mach.

[11] Abbiamo visto nel § 2 come tale variazione sia intorno al 15%.



McDonnell Douglas F-15A in candela - Figura 7

5.4 - EFFETTO DEL VENTO

Quanto espresso sinora ha portato a delle considerazioni importanti ed in particolare alla conclusione che, mentre il tempo di volo dipende dal carico alare, la distanza che il velivolo percorre rispetto al terreno non dipende dal carico alare, ma esclusivamente dall'aerodinamica attraverso l'efficienza. Ciò però è vero solo se l'aeromobile si trovi in aria calma, perché in presenza del vento le cose cambiano ed anche la distanza percorsa viene a dipendere dal carico alare. Possiamo dimostrare facilmente quanto detto con un esempio: supponiamo di avere due modelli identici di un velivolo, di cui però uno scarico ed uno a pieno carico, entrambi in volo librato e consideriamo inizialmente cosa accada in assenza del vento. Sappiamo che in questo caso la distanza rispetto al suolo è esattamente la stessa, perché dal punto di vista aerodinamico (l'unico che in questa situazione conti) i due aerei sono uguali, dunque l'angolo di rampa minimo è lo stesso per entrambi i velivoli; la velocità con cui i velivoli percorrono la traiettoria di discesa non è però la stessa: il velivolo scarico scende con una velocità $\vec{V}_1$ ed il velivolo carico scende con una velocità $\vec{V}_2$

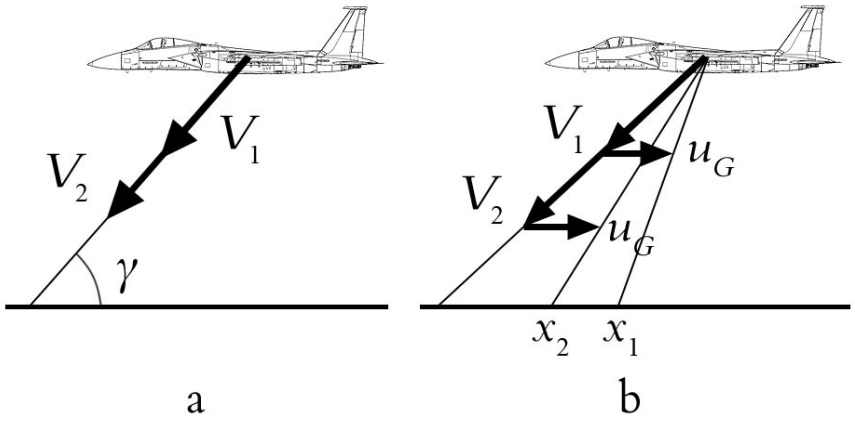


Figura 8

poiché risulta $\frac{W_1}{S} < \frac{W_2}{S}$ allora $V_1 < V_2$.

Consideriamo ora la presenza di un vento orizzontale la cui velocità è indicata con $\vec{u}_G$: tale velocità deve essere composta vettorialmente con $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$, perché la velocità relativa al terreno dei due aerei deve tener conto della velocità del vento; la traiettoria dei due aeromobili si modifica dunque come in figura 8b, dalla quale si evince che $x_2 > x_1$, cioè il velivolo più carico risulta meno penalizzato dalla presenza del vento contrario rispetto al velivolo scarico. Il carico alare diventa perciò un parametro influente sulla distanza percorsa nel caso in cui l'aria non sia calma. Se il vento fosse stato a favore sarebbe accaduto l'opposto e l'aeromobile con il carico alare minore sarebbe stato avvantaggiato rispetto a quello col carico alare maggiore[12].

Un altro effetto del vento, molto importante per gli alianti, è quello riguardante le correnti ascensionali, le quali vanno a comporsi con la velocità dell'aliante stesso e permettono di realizzare traiettorie in salita. Possiamo avere una informazione quantitativa su tali effetti, ed in particolare su come la presenza di certe correnti ascensionali modifichi le caratteristiche di volo di un aliante, ricorrendo all'odògrafa del moto, che può essere modificata molto semplicemente per tener conto del vento verticale; è sufficiente infatti riportare sull'odògrafa i vettori velocità corrispondenti ad una certa velocità verticale del vento, che indichiamo con w_g, e traslarla quindi verso l'alto.

[12] A tal proposito possiamo riportare che gli alianti, durante le competizioni, caricano delle zavorre: in presenza di vento contrario è conveniente che l'aliante pesi quanto più possibile per essere meno influenzato dal vento, mentre in caso di vento a favore per avvantaggiarsi si possono gettare le zavorre.

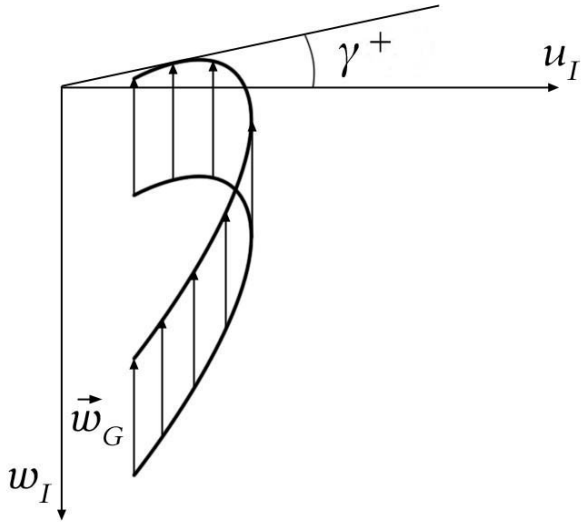
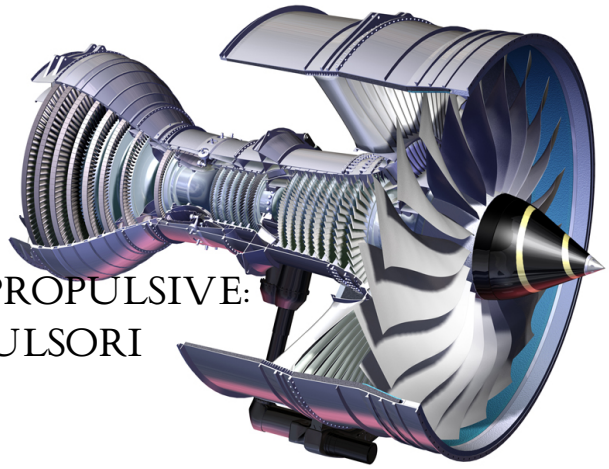


Figura 9

Il risultato più importante che possiamo rilevare è che, in tal modo, sono permesse condizioni di volo ad angoli di rampa positivi, come si evidenzia in figura 9.



Capitolo 6

IL MODELLO DELLE AZIONI PROPULSIVE: CARATTERISTICHE DEI PROPULSORI

6.1 - GENERAZIONE DELLA SPINTA: TIPI DI PROPULSORI

Abbiamo parlato di azioni aerodinamiche e di forza peso, ma non ancora delle forze propulsive; cerchiamo perciò di modellare tali forze, richiamando gli elementi indispensabili per la soluzione dei problemi di analisi delle caratteristiche del volo propulso. Abbiamo visto nel § 4.11 come per tali problemi intervengano i concetti di potenza disponibile, potenza necessaria, spinta disponibile e spinta necessaria: cominciamo col dire che tali grandezze, nell'ambito dello studio delle prestazioni, saranno considerate funzioni della velocità di volo, delle caratteristiche fisiche dell'atmosfera (quindi della quota) e di una variabile di controllo che indichiamo con δ_T, la quale rappresenta la manetta

$$\begin{aligned}
\Pi_d &= \Pi_d(V;h;\delta_T)\\
\Pi_n &= \Pi_n(V;h;\delta_T)\\
T_d &= T_d(V;h;\delta_T)\\
T_n &= T_n(V;h;\delta_T).
\end{aligned}$$

Quello che illustreremo in questo capitolo riguarda la determinazione esplicita di tali relazioni. Parleremo anzitutto della potenza disponibile, che è la quantità che caratterizza le azioni propulsive di motori alternativi, mentre parleremo della spinta disponibile come grandezza naturalmente associata ai motori a getto.

Iniziamo con qualche parola introduttiva sulla generazione di forza propulsiva, semplificando al massimo il fenomeno, possiamo dire che essa è legata alla variazione di una cetra quantità di moto che indichiamo con

$$dm(U-V)$$

dove dm è la massa di fluido che scorre nel motore nell'intervallo di tempo dt, U è la velocità di efflusso dei gas di scarico del motore e V è la velocità di volo (o più genericamente di ingresso nel motore). A tale variazione di quantità di moto nell'intervallo dt associamo una forza che, per il teorema dell'impulso, è data da

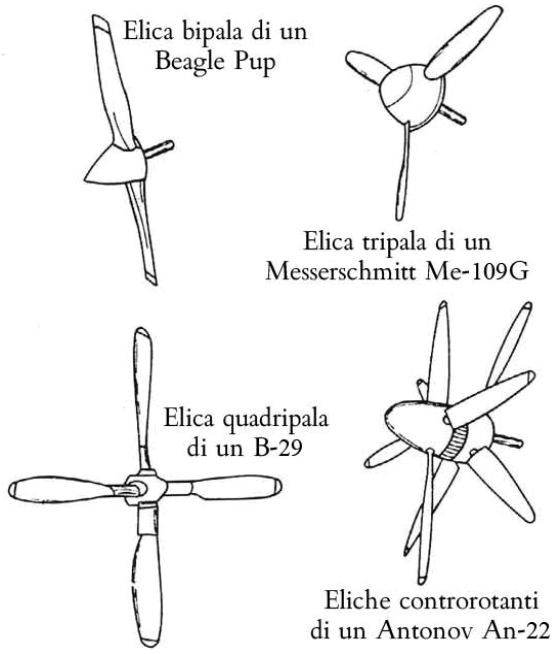
$$Fdt = dm(U - V)$$

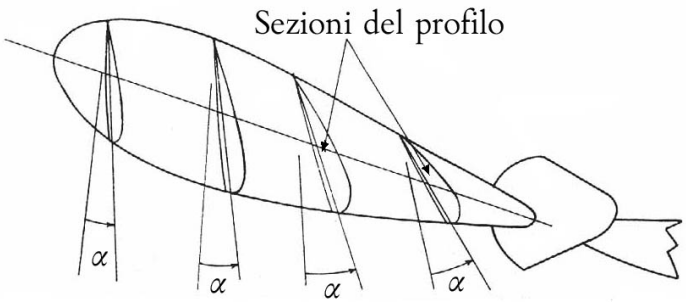
da cui

$$F = \dot{m}(U - V)$$

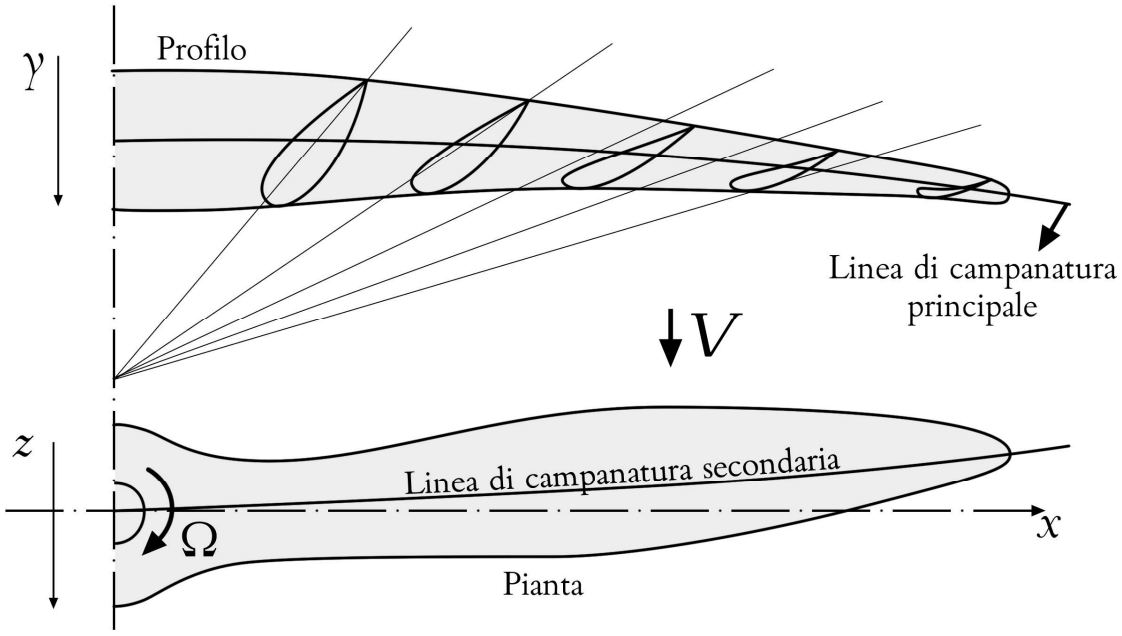
dove $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ rappresenta la portata in massa del fluido interessata dall'azione del motore. Questa è un'espressione molto semplice, che non tiene conto di certi effetti, ma più che sufficiente per i nostri scopi. La forza F rappresenta un'azione esercitata sul fluido e diretta in verso opposto a quello del moto, alla quale corrisponde un'azione uguale, ma di verso opposto, esercitata sul velivolo e che rappresenta proprio la forza propulsiva. Nei nostri studi andremo a considerare due tipi di apparati propulsivi: il primo è quello cosiddetto ad azione diretta, perché la variazione della quantità di moto è ottenuta mediante una trasformazione termodinamica che avviene all'interno del motore, e questo è il caso dei motori a getto; l'altra categoria è quella dei motori ad azione indiretta, nei quali cioè la variazione di quantità di moto è ottenuta mediante un *organo intermediario*, che nel nostro caso è l'elica, il quale è mosso da un motore alternativo. Iniziamo la nostra analisi da questa seconda categoria, nella quale è indispensabile conoscere sia le caratteristiche del motore che le caratteristiche dell'elica.

6.2 - LE ELICHE: CARATTERISTICHE GEOMETRICHE





Se riusciamo a capire come venga rappresentata geometricamente un'elica e quale sia il suo funzionamento, tutto quello che seguirà risulterà molto più chiaro. Un'elica viene tipicamente rappresentata nella forma riportata di seguito, nella quale osserviamo due viste diverse:



Elica destra, profilo e pianta - Figura 1

La prima vista prende il nome di profilo e riporta una proiezione su di un piano individuato dai due assi x ed y (non vanno confusi con gli assi del velivolo) ed in essa sono riportate le sezioni che costituiscono la pala ruotate di 90°; la seconda proiezione, nel piano xz ortogonale all'asse y di rotazione dell'elica, prende il nome di pianta; infine la terza proiezione, che non è stata riportata, è nel piano yz ed è raffigurata perciò come se guardassimo la pala dell'elica dalla direzione dell'asse x. Notiamo nella proiezione in pianta l'indicazione relativa alla velocità angolare di rotazione, Ω, che mette in evidenza il fatto che stiamo trattando lo schema di un'elica destra, cioè un'elica che ruota in senso orario se vista dal pilota. Da tali proiezioni deduciamo che la pala di un'elica, dal punto di vista aerodinamico, corrisponde ad un'ala, la quale presenta una forma in pianta molto allungata ed uno svergolamento lungo l'apertura anche maggiore di quello di un'ala (lo si può evincere dalle sezioni prospettate sul profilo). Il motivo per cui è necessario dare alla pala uno svergolamento così grande è legato al fatto che la pala dell'elica possiede non solo una velocità V di traslazione di tutta l'elica[1], ma anche una componente di velocità legata alla rotazione della pala stessa, che, essendo proporzionale alla distanza della sezione dall'asse di rotazione, varia notevol-

[1] V è la velocità di volo.

mente dalla radice all'estremità della pala[2]; questo comporta una variazione del vettore velocità sulle diverse sezioni e richiede la presenza di angoli di svergolamento notevoli e variabili dalla radice all'estremità. Notiamo poi, sempre sul profilo, come vari notevolmente la forma delle sezioni: abbiamo profili con elevato spessore, molto tozzi, in corrispondenza della radice e profili con spessore percentuale relativamente ridotto in corrispondenza delle estremità.

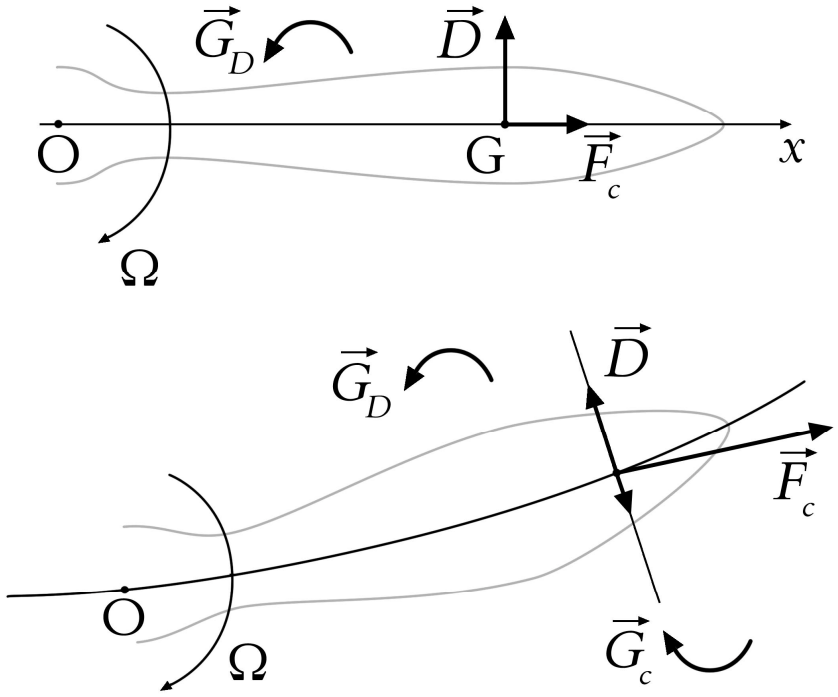
Fatta questa breve introduzione sul modo con cui viene rappresentata graficamente un'elica, iniziamo a vedere quali siano i parametri necessari per definire geometricamente la pala di un'elica o quali siano i parametri necessari per arrivare al tipo di rappresentazione ora vista, la quale contiene tutti gli elementi che servono per realizzare costruttivamente la pala stessa. Occorre perciò definire:

1. Il tipo di profilo, ossia la forma delle varie sezioni al variare del raggio r (cioè della distanza dall'asse di rotazione).
2. Una legge di svergolamento, anche se in realtà si parla di legge di variazione del passo o dell'angolo di calettamento (le due cose sono del tutto equivalenti) che indichiamo con β e che sarà in generale funzione di r.
3. La forma delle cosiddette *linee di campanatura*.

Le linee di campanatura[3] (figura 1) rappresentano il luogo dei baricentri delle singole sezioni che costituiscono la pala dell'elica; osserviamo come tali linee non corrispondano necessariamente a delle rette ortogonali all'asse di rotazione; in altre parole le linee di campanatura non coincidono con l'asse x. Scopriamo per quale motivo i baricentri vengono opportunamente spostati rispetto a tale asse, considerando le due proiezioni di pianta e profilo, ed in particolare poniamo la nostra attenzione su di una singola sezione della pala.

[2] Sarà quindi molto piccola sulle sezioni prossime all'asse di rotazione e molto grande sulle sezioni lontane dall'asse di rotazione.

[3] La linea di campanatura che compare nella pianta della pala è detta *secondaria*, mentre quella che compare nel profilo è detta *principale*.

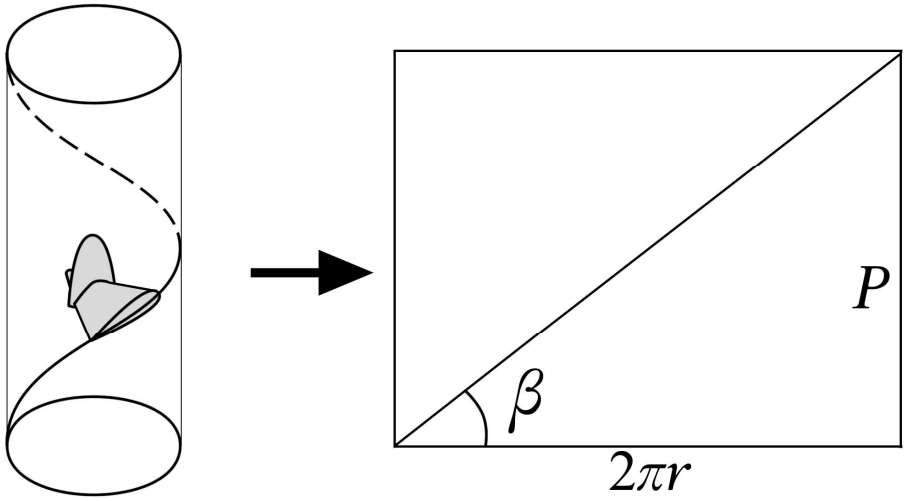


Elica in pianta - Figura 2

Possiamo immaginare che le azioni aerodinamiche agenti su tale sezione siano rappresentate in prima approssimazione da una certa resistenza $\vec{D}$, la quale produce una certa sollecitazione sulla pala, che corrisponde ad una coppia che indichiamo con $\vec{G}_D$. Se il baricentro della sezione considerata è traslato rispetto all'asse *x*, la forza centrifuga $\vec{F}_c$ agente su quella sezione è diretta secondo la congiungente il punto O con il baricentro G e quindi avrà una proiezione diversa da zero sulla sezione della pala e diretta in verso opposto a $\vec{D}$: nasce così una coppia $\vec{G}_c$ che ha segno opposto rispetto alla coppia aerodinamica. Dunque se spostiamo il baricentro delle diverse sezioni dall'asse *x*, sfruttiamo delle azioni di tipo inerziale, legate alla rotazione della pala per ridurre la sollecitazione sulla pala stessa. Possiamo ripetere tale discorso considerando il profilo dell'elica; una certa rappresentazione della forza aerodinamica che indichiamo con $\vec{T}$, poiché costituisce una sorta di spinta, tenendo conto che anche in questo caso avremo una forza centrifuga sulla sezione e tenendo quindi conto del fatto che anche in questo caso avremo una coppia aerodinamica $\vec{G}_T$ in un verso ed una coppia legata ad $\vec{F}_c$ di segno opposto: il risaltato finale, anche in questo caso, sarà quello di ridurre la sollecitazione strutturale sulla pala.

Notevolmente più importante è il discorso relativo alla legge di svergolamento, soprattutto perché ci consente di chiarire certe definizioni, in particolare quelle di passo e di angolo di calettamento, che poi ritroveremo sempre parlando di eliche. Supponiamo di considerare una certa sezione della pala, che si trovi ad una distanza *r* dall'asse di rotazione ed

immaginiamo che tale sezione si avviti in un mezzo solido, comportandosi esattamente come una vite.



Elica cilindrica - Figura 3

Durante una rotazione completa la sezione descrive una traiettoria che prende il nome di elica cilindrica. Il tratto di generatrice del cilindro compreso tra due successive intersezioni di questa curva con la generatrice stessa prende il nome di passo e si indica con *P*. La cosa si può comprendere più chiaramente se immaginiamo di sviluppare la superficie del cilindro su di un piano: l'elica cilindrica in questa rappresentazione diventa una retta ed alla sezione considerata possiamo associare un angolo β che prende il nome di angolo di calettamento; come si vede dalla figura 3 il passo e l'angolo di calettamento sono legati dalla relazione

$$P = 2\pi r \tan\beta$$

e molto spesso si considera la grandezza $\frac{P}{2\pi} = r\tan\beta$. La distinzione delle eliche in base al passo può essere messa in evidenza facendo riferimento alla proiezione, detta profilo, nella quale ricordiamo che le sezioni sono ruotate di 90°. Una pala in cui le sezioni siano svergolate in modo tale che il passo si mantenga costante, fa parte di un'elica detta a *passo uniforme*; quando questo non accada parliamo di eliche con *passo vario*: nel caso di un'elica a passo uniforme chiamiamo con *H* il valore costante del passo, mentre nel caso di un'elica a passo vario chiamiamo con *H* un valore di riferimento del passo, che è quello corrispondente al 70% del raggio della pala. Notiamo come, per passare da una certa elica a passo uniforme e quindi costante, ad un'altra elica ancora a passo uniforme ma diverso dal precedente, dovremmo dare una variazione degli angoli di calettamento delle singole sezioni che non sarà costante; nel caso in cui invece diamo una variazione costante dell'angolo di calettamento,

passiamo da un'elica a passo uniforme ad un'elica a passo vario. Quest'ultima situazione ci porta ad introdurre l'elica a *passo variabile*: la parola variabile indica la possibilità di modificare durante il volo gli angoli di calettamento delle pale di una quantità costante; tale variazione viene realizzata mediante un opportuno sistema meccanico che consente la rotazione della pala attorno all'asse x. Poniamo l'attenzione sul fatto che l'elica a passo variabile e l'elica a passo vario non sono la stessa cosa: la parola *vario* indica semplicemente che l'elica non è a passo costante, mentre la parola *variabile* indica che esiste la possibilità di variare il passo durante il volo.

6.3 - FAMIGLIA DI ELICHE

Il concetto di famiglia di eliche è abbastanza semplice, ma presenta qualche insidia. Occupiamoci anzitutto delle eliche a passo fisso e supponiamo di aver assegnato determinate sezioni ed una certa legge di variazione del passo (costante o vario) e di aver determinato le linee di campanatura: appartengono alla stessa famiglia di quest'elica tutte le eliche che sono con essa in similitudine geometrica, cioè tutte le eliche che differiscono dalla prima per un fattore di scala; la dimensione caratteristica che definisce i diversi elementi della famiglia è il diametro. Esiste però un secondo aspetto: definito il *passo relativo* come $h = \frac{H}{d}$ (dove d è il diametro), appartengono alla stessa *famiglia* tutte le eliche che mantengono la stessa legge di variazione del passo pur avendo un diverso valore del passo relativo; osserviamo la figura sottostante, in cui abbiamo un'elica a passo H uniforme e supponiamo che questa sia l'elica base: appartiene alla stessa famiglia anche l'elica di passo H', che presenta la stessa legge di variazione del passo dell'elica base, ma un valore diverso di passo relativo[4] (sia l'elica base che la seconda elica sono a passo uniforme in quanto il passo resta costante e pari rispettivamente ad H ed H').

[4] Abbiamo dunque due gradi di libertà all'interno di una famiglia di eliche; lo scopo di ciò è che, se dobbiamo scegliere un'elica, faremo tale scelta inizialmente sull'elica base, indipendentemente dalle caratteristiche del nostro aereo; poi una volta scelta l'elica base sceglieremo, nell'ambito della stessa famiglia, a seconda del peso e delle caratteristiche di volo (in particolare la velocità di crociera) dell'aereo, un'elica della dimensione opportuna (cioè di un certo diametro d e con un passo relativo che permetta un funzionamento efficiente (chiariremo poi questo punto) alla velocità di crociera del nostro aeromobile.

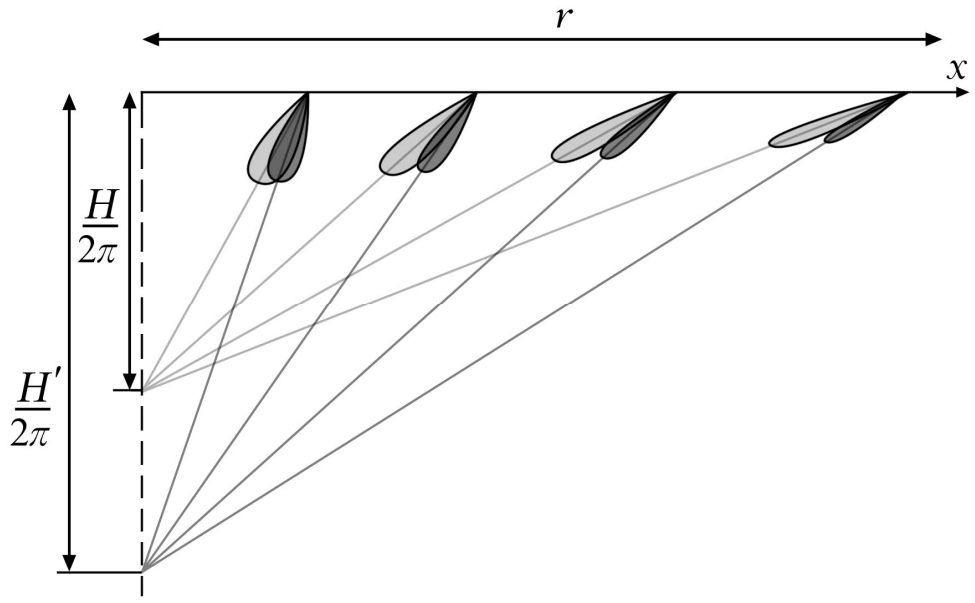


Figura 4

Il discorso è un po' diverso quando parliamo di famiglia di eliche a passo variabile: in questo caso il primo grado di libertà è ancora il diametro, quindi, scelta l'elica base a passo variabile, appartengono alla stessa famiglia tutte le eliche in similitudine geometrica con essa. Per quanto riguarda il secondo grado di libertà, appartengono alla stessa famiglia tutte le eliche che differiscono dall'elica base per una variazione ε costante degli angoli di calettamento di ciascuna delle sezioni che compongono la pala. Ricordiamo che nel caso dell'elica a passo variabile la rotazione di un angolo ε non è ottenuta costruttivamente, ma è ottenuta ruotando la pala. Immaginiamo ad esempio che l'elica base della famiglia di eliche a passo variabile abbia una distribuzione uniforme del passo; ruotando la pala, ciascuna sezione ruota di un angolo ε e, come già visto nel § 6.2, la legge di variazione del passo cambia e da un'elica a passo costante si passa ad un'elica a passo vario.

6.4 - FORZE AERODINAMICHE GENERATE DALL'ELICA: FORMULE DI RENARD E RENDIMENTO PROPULSIVO

Dopo aver visto quali siano i parametri geometrici che descrivono un'elica, dobbiamo cercare di rappresentare le azioni aerodinamiche prodotte dall'elica in rotazione, e per farlo consideriamo una sezione di riferimento, che ricordiamo è una sezione nel piano yz. Abbiamo detto che la generica sezione trasla con velocità $\vec{V}$ di avanzamento del velivolo ed ha poi un secondo moto, legato alla rotazione della pala, al quale è associata una velocità data da $2\pi rn$, dove n rappresenta il numero di rotazioni nell'unità di tempo ed r la distanza della sezione dall'asse di rotazione. Riportiamo la vista della sezione scelta insieme ai due vettori velocità ora considerati.

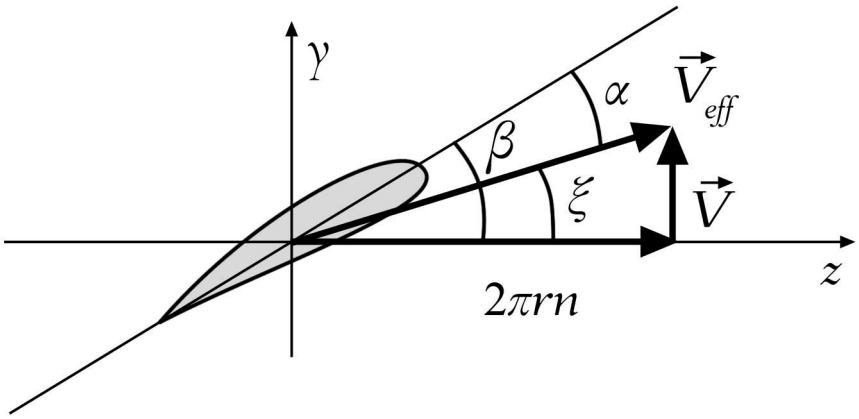


Figura 5

Riportiamo anche l'asse di portanza nulla del profilo che stiamo considerando ed indichiamo con β il cosiddetto angolo di calettamento aerodinamico[5].

Per determinare l'angolo d'attacco[6] cui la sezione lavora, dobbiamo semplicemente tracciare la risultante dei due vettori velocità, i quali danno luogo al vettore velocità effettiva che indichiamo con $\vec{V}_{eff}$; una volta che abbiamo a disposizione la velocità effettiva abbiamo anche l'informazione sull'angolo d'attacco. Notiamo come la pala lavori ad un'incidenza diversa da zero (in particolare positiva) e dunque avremo la generazione di una forza aerodinamica[7] $d\vec{F}$ che possiamo scomporre in una portanza $d\vec{L}$ diretta ortogonalmente a $\vec{V}_{eff}$, ed in una resistenza $d\vec{D}$ diretta come $\vec{V}_{eff}$, ma in verso opposto. Quando però studiamo le caratteristiche di un'elica non interessa tanto considerare portanza e resistenza, quanto piuttosto la *spinta prodotta* e la *coppia assorbita* dall'elica. Per farlo dobbiamo semplicemente proiettare la risultante delle forze aerodinamiche $d\vec{F}$ nella direzione di avanzamento dell'elica e nel piano di rotazione dell'elica, ottenendo così rispettivamente le due componenti $d\vec{T}$ e $d\vec{Q}/r$. Notiamo che questa seconda componente è scritta come una coppia $d\vec{Q}$ divi-

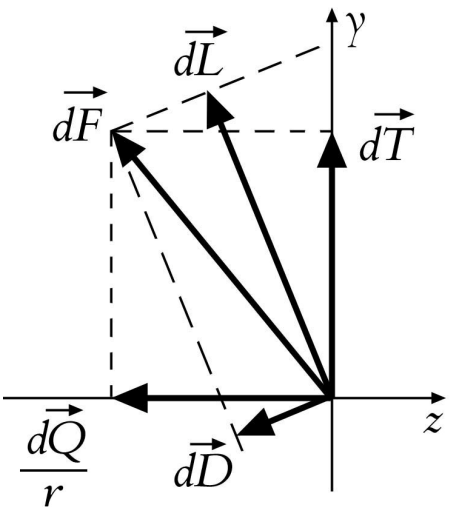


Figura 6

[5] Ci stiamo qui riferendo all'asse di portanza nulla; nel definire l'angolo di calettamento geometrico ci eravamo riferiti alla corda del profilo; senza però scendere nei particolari, diciamo semplicemente che β rappresenta l'angolo di calettamento di quella sezione.

[6] Anche per quanto riguarda l'angolo d'attacco ci riferiremo all'asse di portanza nulla e non alla corda, perciò l'angolo d'attacco di portanza nulla vale zero, ossia la retta di portanza passa per l'origine.

[7] Si noti che stiamo parlando di una sezione della pala perciò la forza aerodinamica da essa sviluppata è una quantità infinitesima.

so un braccio *r*. Con $d\vec{Q}$ dunque indichiamo la coppia (poi capiremo perché assorbita) associata alle azioni aerodinamiche prodotte da quella certa sezione della pala. Cerchiamo di dare un'espressione di tali grandezze ($d\vec{T}$ e $d\vec{Q}$), tenendo però presente che l'interesse non è tanto quello di arrivare a delle espressioni analitiche, quanto piuttosto di vedere da quali parametri tali grandezze dipendano. Possiamo scrivere la generica forza aerodinamica come

$$F_A = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_F$$

dove in genere $C_F = C_F(\alpha; M; Re)$; quello che dobbiamo fare è cercare di esprimere in maniera simile la spinta prodotta e la coppia assorbita dall'elica. Iniziamo anzitutto ad analizzare che tipo di dipendenza abbia l'angolo d'attacco, ossia vediamo da quali parametri della sezione di riferimento dipenda l'angolo d'attacco e tramite esso il coefficiente di forza C_F. Dalla figura 5 abbiamo immediatamente che

$$\alpha = \beta - \xi = \beta - \arctan\frac{V}{2\pi r n}.$$

Introduciamo ora un parametro fondamentale che prende il nome di *rapporto di funzionamento*, il quale è definito come

$$\gamma = \frac{V}{nd}$$

dove *d* indica il diametro dell'elica[8]; se ora moltiplichiamo e dividiamo l'argomento dell'arcotangente nell'espressione di α per *d* e teniamo conto della definizione ora data, otteniamo

$$\alpha = \beta - \arctan\frac{\gamma d}{2\pi r}.$$

L'angolo d'attacco cui lavora la sezione di riferimento è dunque funzione di caratteristiche geometriche (β, *r* e *d*, che in genere sono note) e del rapporto di funzionamento, perciò possiamo scrivere che

$$\alpha = \alpha(\gamma).$$

[8] Serve a rendere adimensionale il parametro.

Notiamo come in γ intervengano sia la velocità di volo che il regime di rotazione dell'elica: quando varia uno di questi parametri, data la funzione di α, varia l'incidenza alla quale la pala lavora; osserviamo in particolare che se il rapporto di funzionamento è piccolo, l'angolo d'attacco della sezione della pala è grande, mentre all'aumentare di γ l'angolo d'attacco decresce. Occupiamoci ora del termine di velocità nell'espressione di F_A: quando parliamo di V^2 nel caso di un'elica dobbiamo esprimerlo in termini della velocità relativa del fluido rispetto alla pala e quindi di quella velocità che abbiamo chiamato velocità effettiva; facendo riferimento alla figura 5 abbiamo

$$V_{eff}^2 = V^2 + (2\pi rn)^2$$

che possiamo anche riscrivere introducendo il rapporto di funzionamento

$$V_{eff}^2 = n^2 d^2 \left[\gamma^2 + \left(\frac{2\pi r}{d} \right)^2 \right].$$

Abbiamo espresso la velocità effettiva come il prodotto *nd* per una funzione nella quale compaiono il rapporto di funzionamento e delle grandezze geometriche. Tenendo presente dal punto di vista funzionale la $F_A = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_F$ e ricordando che $\alpha = \alpha(\gamma)$, possiamo scrivere

$$T = \varrho n^2 d^2 S C_T(\gamma; M; Re) = \varrho n^2 d^4 C_T(\gamma; M; Re)$$

ossia la spinta prodotta dall'elica viene espressa come il prodotto tra una densità, una velocità al quadrato[9], una superficie di riferimento[10] ed un coefficiente adimensionale che abbiamo indicato con C_T e che sarà in generale funzione dell'angolo d'attacco (e dunque del rapporto di funzionamento), del numero di Mach e del numero di Reynolds. Facciamo un paio di osservazioni: notiamo anzitutto come anche la dipendenza della $\vec{V}_{eff}$ dal rapporto di funzionamento sia implicita nel coefficiente C_T, nel quale pertanto si trova tutto ciò che dipende da γ; l'altra dipendenza da notare è quella dal numero di Mach[11], poiché il raggiungimento di alti valori subsonici all'estremità della pala rappresenta un limite per la velocità

[9] Si noti, tenendo presente l'espressione di $\vec{V}_{eff}^2$, che il prodotto $n^2 d^2$ ha le dimensioni di una velocità al quadrato.

[10] Che nel caso di un'elica è convenzionalmente espressa con il quadrato del diametro.

[11] Attenzione al fatto che è indicato il numero di Mach basato sulla velocità effettiva, definito come $M = \frac{V_{eff}}{a}$.

massima ottenibile con un velivolo ad elica, a meno che non si montino delle eliche opportunamente realizzate; raggiungere numeri di Mach transonici all'estremità della pala produce infatti un notevole peggioramento delle prestazioni dell'elica.

Per quanto riguarda la coppia assorbita, in modo del tutto analogo possiamo ottenere

$$Q = \rho n^2 d^5 C_Q(\gamma; M; Re)$$

dove si noti che, trattandosi di una coppia, compare il diametro alla quinta potenza invece che alla quarta. Queste espressioni della spinta e della coppia prendono il nome di *formule di Renard* per le caratteristiche dell'elica.

Una volta introdotte la spinta prodotta e la coppia assorbita, possiamo definire un altro parametro fondamentale che prende il nome di *rendimento effettivo* o *totale* dell'elica

$$\eta_P = \frac{\Pi_{utile}}{\Pi_{assorbita}} = \frac{TV}{Q\Omega}$$

dove $\Omega = 2\pi n$ è la velocità angolare dell'elica espressa in s^{-1}. Esplicitando nell'equazione del rendimento effettivo la spinta e la coppia abbiamo

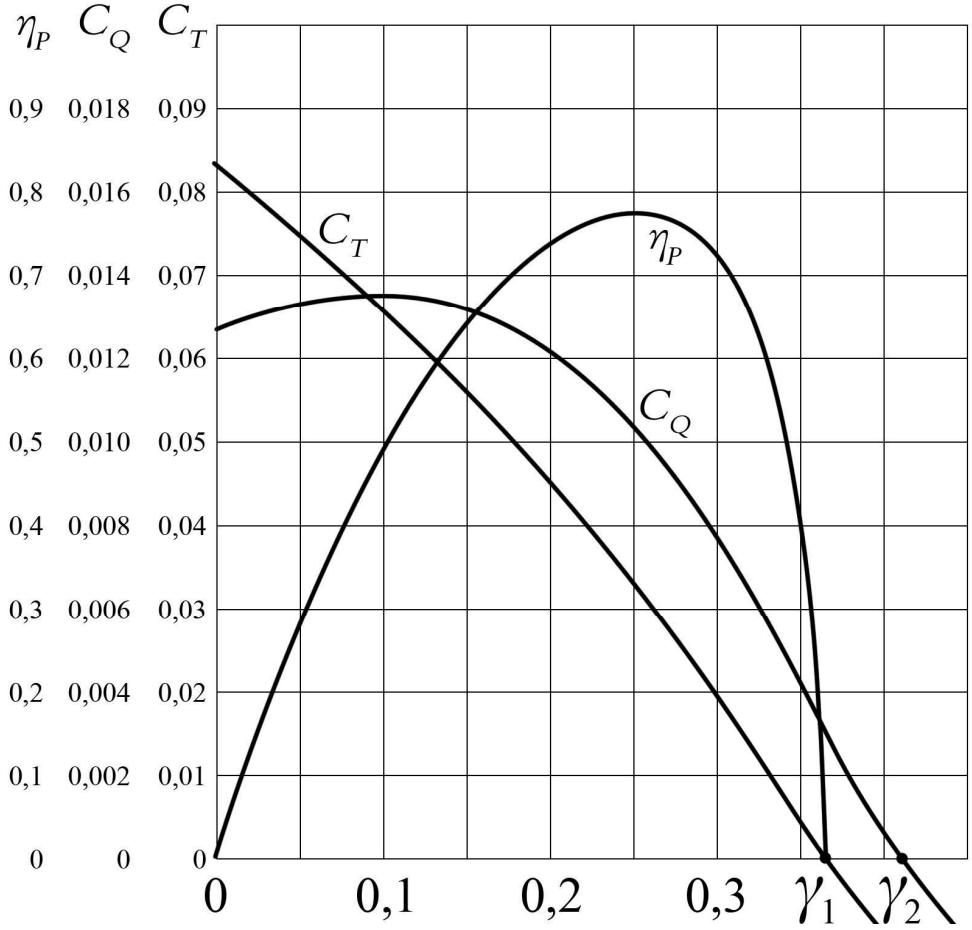
$$\eta_P = \frac{\rho n^2 d^4 C_T V}{\rho n^2 d^5 C_Q 2\pi n} = \frac{C_T}{C_Q}\frac{\gamma}{2\pi}$$

e questa è un'altra espressione importante, poiché ci permette di evidenziare che il rendimento effettivo è nullo quando è nullo il rapporto di funzionamento (il che significa quando è nulla la velocità di traslazione di tutto il velivolo), oppure quando è nullo il coefficiente di spinta.

6.5 - CURVE CARATTERISTICHE DI UN'ELICA: STADI DI FUNZIONAMENTO

I valori del coefficiente di spinta e del coefficiente di coppia (e di conseguenza del rendimento effettivo) vengono determinati mediante modelli analitici, oppure, più spesso, attraverso prove in galleria del vento. Il modo più semplice di rappresentarli invece è a prescindere dalla dipendenza dal numero di Mach e dal numero di Reynolds, il risultato che si ottiene, si veda figura 7, è costituito da grafici che in ascisse riportano il rapporto di funzionamento ed in ordinate, sullo stesso asse, i due coefficienti C_T, C_Q ed il rendimento η_P; tali grafici prendono il nome di *curve caratteristiche dell'elica*. Gli andamenti disegnati rappresentano abbastanza bene ciò che accade di solito. Ricordiamo che quando il rapporto di

funzionamento è nullo (ci troviamo cioè a punto fisso), l'angolo d'attacco medio sulla pala raggiunge il suo valore massimo, e questo corrisponde di solito al massimo valore di C_T, il quale decresce poi all'aumentare di γ con una legge che è quasi lineare. L'andamento del C_Q di solito inizialmente cresce fino ad un certo valore e poi si mantiene pressoché parallelo a quello del C_T. Osserviamo infine la curva relativa al rendimento effettivo: in base alla sua definizione, η_P deve annullarsi quando è nullo γ e quando è nullo C_T, perciò l'andamento presenta tipicamente un massimo, di solito ben definito, in corrispondenza di un certo valore γ^* del rapporto di funzionamento. Tutto quanto detto però riguarda espressamente un'elica a passo fisso; quando consideriamo un'elica a passo variabile dobbiamo tener presente che per quest'elica è ammessa una variazione del passo, ottenuta attraverso una rotazione delle pale durante il volo. Quindi per ciascun valore del passo avremo una curva relativa al coefficiente di spinta, una curva relativa al coefficiente di coppia e una curva relativa al rendimento effettivo. Il risultato (si veda figura 37) è che i grafici delle curve caratteristiche di un'elica a passo variabile riportano tre famiglie di curve, parametrizzate rispetto al valore dell'angolo di calettamento della pala. Possiamo notare dalla figura 37, che a differenza del caso dell'elica a passo fisso (nella quale il massimo valore di η_P si ha in corrispondenza di un valore ben determinato di γ), variando opportunamente il calettamento delle pale, riusciamo ad avere un rendimento quasi costante e pari al valore massimo per un intervallo piuttosto grande di variazione del rapporto di funzionamento.



Curve caratteristiche dell'elica - Figura 7

Questo è sicuramente un grosso vantaggio dell'elica a passo variabile rispetto all'elica a passo fisso ed è anche uno dei motivi per i quali, ogni volta sia possibile, si montano eliche a passo variabile.

Osserviamo come al variare di γ i parametri caratteristici dell'elica subiscono delle variazioni notevoli; analizziamo quello che accade al variare del rapporto di funzionamento e identifichiamo alcune condizioni di funzionamento caratteristiche dell'elica e corrispondenti a diverse situazioni di volo. Dai grafici riportati in figura 7, ricaviamo dei valori caratteristici del rapporto di funzionamento che indichiamo con γ_1 e γ_2, e che sono rispettivamente il rapporto di funzionamento al quale si annulla il coefficiente di spinta ed il rapporto di funzionamento al quale si annulla il coefficiente di coppia; in relazione a tali valori abbiamo:

1. STADIO PROPULSIVO $(0 < \gamma < \gamma_1)$

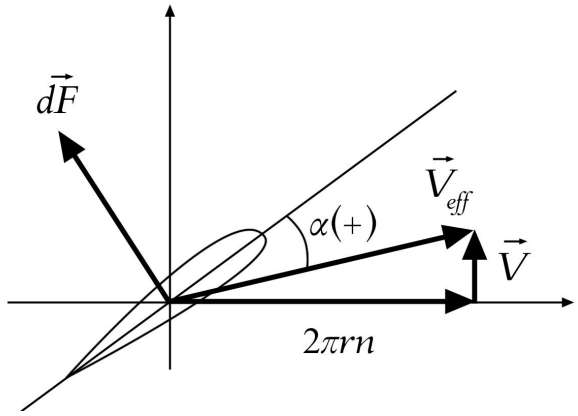


Figura 8

Quando il rapporto di funzionamento è compreso tra zero e γ_1 si parla di stadio propulsivo dell'elica. In questo intervallo di variazione di γ l'elica lavora ad incidenza positiva ed avremo perciò una spinta ed una coppia positive: l'elica cioè produce una forza propulsiva ($C_T > 0$) ed assorbe ($C_Q > 0$) una certa coppia dall'albero motore. Ricordiamo che nella condizione di funzionamento dell'elica la coppia aerodinamica è una coppia resistente che deve essere equilibrata dalla coppia ricevuta dal motore: quando si ottiene questo equilibrio il regime di rotazione è costante; i vari stadi di funzionamento che stiamo analizzando si riferiscono proprio alle condizioni di regime di rotazione costante.

2. ELICA A SPINTA NULLA ($\gamma = \gamma_1$)

Il secondo stadio di funzionamento significativo è quello in cui il rapporto di funzionamento è pari al valore γ_1 per il quale si annulla il coefficiente di spinta; in questa situazione si parla di elica a spinta nulla.

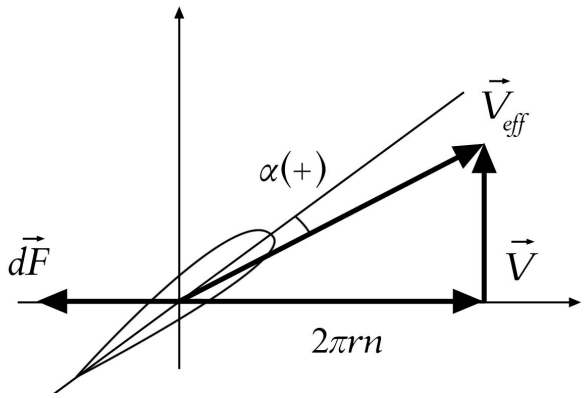


Figura 9

Il rapporto di funzionamento è aumentato rispetto al caso precedente quindi l'incidenza è ancora positiva, ma è più piccola. La risultante dF della forza aerodinamica prodotta dall'elica giace nel piano di rotazione dell'elica stessa, quindi si ha, per ogni profilo, $dT = 0$ e $\frac{dQ}{r} = dF$. L'elica dunque non produce alcuna azione propulsiva, ma assorbe tuttavia una coppia dal motore ($C_Q > 0$) per mantenere un regime di rotazione costante.

3. STADIO FRENANTE INTERMEDIO ($\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$)

Quando il rapporto di funzionamento è compreso tra i due valori caratteristici γ_1 e γ_2 si parla di stadio frenante intermedio.

In questa situazione il valore del rapporto di funzionamento è ancora aumentato rispetto al caso precedente e ciò può corrispondere, dal punto di vista fisico, ad un aumento della velocità di volo. Il valore di γ inoltre può essere tale che l'angolo d'attacco della sezione rappresentativa che stiamo considerando sia negativo; la forza aerodinamica dF può essere scomposta in una coppia ancora positiva ed in una spinta che stavolta è negativa.

In tale condizione di funzionamento perciò l'elica assorbe ($C_Q > 0$) la coppia che il motore eroga per mantenere costante il regime di rotazione, ma produce una spinta negativa ($C_T < 0$), esercitando così una debole azione frenante. Tale situazione si verifica in genere nel caso di picchiate a piccola pendenza di velivoli a motoelica.

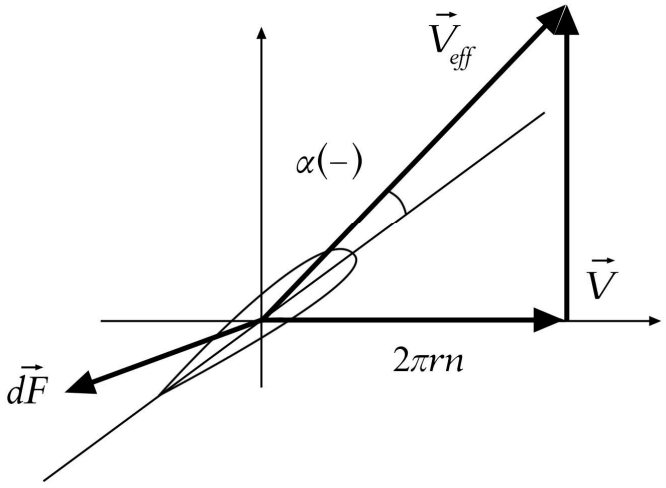


Figura 10

4. ELICA IN AUTOROTAZIONE ($\gamma = \gamma_2$)

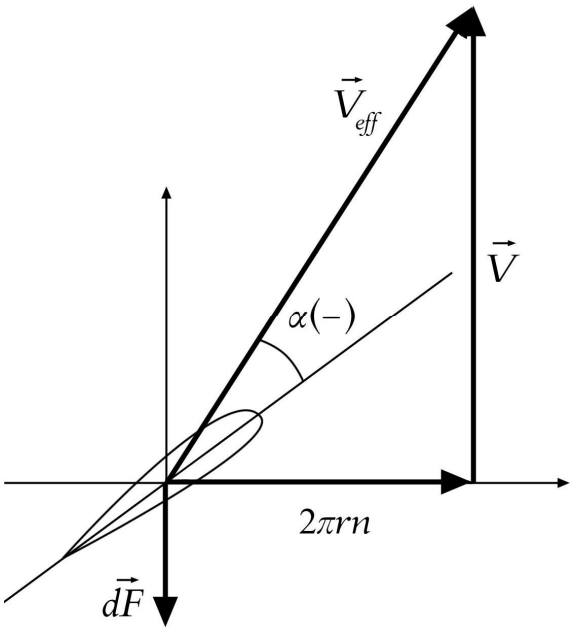


Figura 11

Aumentando ulteriormente il rapporto di funzionamento, il che può corrispondere ad un ulteriore aumento di velocità di volo, raggiungiamo il valore γ_2 per il quale è nullo il coefficiente di coppia. Essendo ulteriormente aumentato il rapporto di funzionamento, l'angolo d'attacco è diventato ancor più negativo di prima; in tale situazione la risultante $d\vec{F}$ della forza aerodinamica è diretta parallelamente alla velocità di volo, ma in verso opposto, per questo si ha $d\vec{Q} = 0$ e $d\vec{T} = d\vec{F} < 0$. Pertanto l'elica si mantiene in rotazione senza che nessuna coppia venga esercitata su di essa dal motore (la coppia assorbita è infatti nulla) ed esercita un'azione frenante in quanto la spinta è negativa. Come dicevamo, tale stadio di funzionamento riveste una notevole importanza nel caso degli elicotteri, poiché costituisce la base di una manovra di emergenza che viene effettuata in caso di avaria del sistema propulsivo: il pilota effettuerà una serie di azioni sui comandi ed in particolare sugli organi di regolazione del passo del rotore, per mettersi nella condizione di *autorotazione*, nella quale senza l'impiego del motore (la coppia assorbita è nulla) ottiene una spinta negativa; il rotore perciò funziona come un freno con il motore in folle.

5. STADIO TURBOMOTORE ($\gamma > \gamma_2$)

L'ultima condizione di funzionamento è quella che corrisponde ad un valore del rapporto di funzionamento maggiore del valore γ_2; è una situazione in cui la velocità di volo è ulteriormente aumentata e quindi l'incidenza è ancor più negativa. La risultante $d\vec{F}$ può essere diretta come in figura 12, con il risultato che sia la coppia assorbita che la spinta prodotta sono negative. Tale situazione si indica in genere con il nome di stadio turbomotore o di elica motrice, perché osserviamo come la coppia abbia cambiato segno diventando negativa: l'elica non assorbe più coppia, ma è lei ad esercitare un'azione sul motore. Dal punto di vista fisico tale situazione corrisponde ad una picchiata a forte pendenza del velivolo, il che produce un aumento del numero di giri dell'elica senza nessun intervento del pilota sulla manetta. Tutto ciò accade insieme ad una notevole azione frenante ($C_T < 0$).

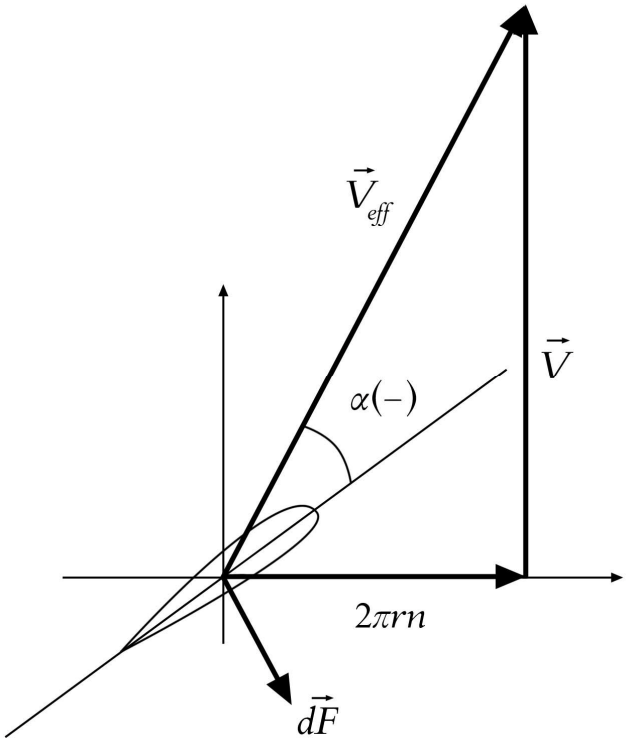


Figura 12

Esistono infine due ulteriori condizioni di funzionamento interessanti, che sono però sempre e solo associate ad eliche a passo variabile.

6. ELICA BLOCCATA O IN BANDIERA

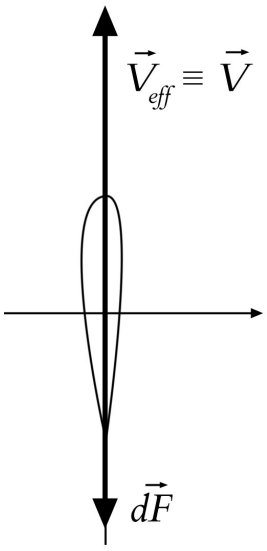


Figura 13

È una situazione in cui le pale dell'elica sono state ruotate in modo che l'asse medio di portanza nulla sia disposto secondo la direzione della velocità.

In questo caso la risultante $d\vec{F}$ è pari alla spinta $d\vec{T}$ ed in particolare avremo che tale risultante è negativa (vedi figura 13). In questo stadio di funzionamento l'elica è bloccata e quindi la velocità di rotazione è nulla ($n = 0$); ciò corrisponde ad una situazione in cui si manifesta un'avaria del motore, dovuta tipicamente al grippaggio del motore stesso, e la procedura di emergenza prevede appunto la messa in bandiera dell'elica: nel caso di elica a passo variabile il pilota ha una manopola di comando del passo, nella quale c'è una posizione caratteristica. Lo scopo di tale stadio di funzionamento è quello di avere la minima resistenza offerta dall'elica e questo è necessario soprattutto sui bimotori, nei quali la messa in bandiera

dell'elica è una manovra necessaria per permettere di mantenere in assetto l'aeroplano.

7. ELICA INVERSA (in *reverse*)

L'ultima condizione di funzionamento interessante è ancora una condizione che esiste solo su eliche a passo variabile; in questo caso la pala viene ruotata di un angolo piuttosto grande

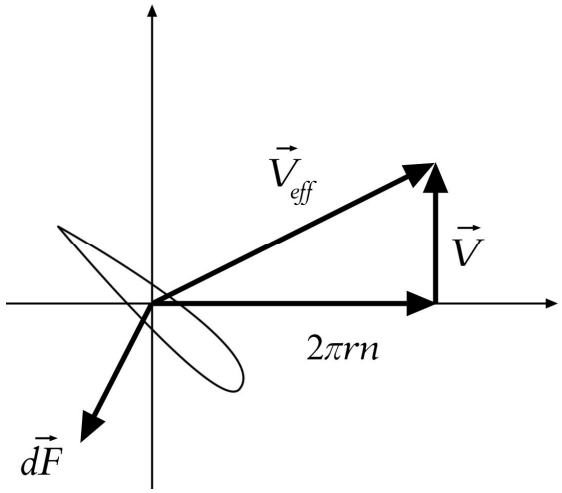


Figura 14

La forza aerodinamica sarà più o meno ortogonale alla corda della sezione e perciò, come si vede dalla figura abbiamo $C_T < 0$ e $C_Q > 0$, quindi l'elica esercita una consistente azione frenante ed assorbe coppia dal motore; in questa situazione si parla di elica inversa. Negli istanti successivi al momento in cui il velivolo tocca terra durante l'atterraggio, il pilota comanda la messa in *reverse* delle pale dell'elica e dà di nuovo manetta ai motori; l'elica, esercitando un'azione frenante, contribuisce a ridurre la distanza di pista impegnata nella fase di atterraggio. La condizione di elica inversa può anche essere usata per manovrare l'aereo in retromarcia.

6.6 - RENDIMENTO PROPULSIVO EFFETTIVO E TEORICO

Prima di passare ad analizzare l'interazione tra elica e velivolo vale la pena di fare qualche altra osservazione sull'espressione del rendimento effettivo introdotto nel § 4. Notiamo come, fino al momento in cui il coefficiente di spinta è maggiore di zero, il rendimento effettivo cresce al crescere del rapporto di funzionamento e raggiunge un certo valore massimo (in genere intorno a 0,8 - 0,85) e poi decresce sino ad annullarsi per $\gamma = \gamma_1$, quando cioè

il coefficiente di spinta diventa nullo; cerchiamo ora di capire cosa accada ad η_P per valori del rapporto di funzionamento maggiori di γ_1. Quando arriviamo a rapporti di funzionamento maggiori di γ_2 possiamo definire un rendimento come l'inverso di η_P, poiché per $\gamma > \gamma_2$ l'elica prende energia dal fluido e compie un lavoro utile sul motore attraverso una certa coppia che produce un aumento del numero di giri del motore stesso.

Parlando di rendimenti è utile introdurre la definizione di *rendimento propulsivo*, di tipo teorico, la quale ci permette di trarre alcune informazioni che poi utilizzeremo più avanti. Indichiamo il rendimento propulsivo con η, definito come il rapporto tra la potenza utile prodotta dal sistema e la potenza necessaria ad impartire alla massa di fluido agente sul motore nell'unità di tempo la variazione di quantità di moto che produce la spinta

$$\eta = \frac{TV}{W_S} = \frac{TV}{TV + \frac{1}{2}\dot{m}(U-V)^2}$$

dove abbiamo indicato con W_S la potenza necessaria che, come vediamo, è data dalla somma della potenza utile (TV) e di un termine che rappresenta l'energia cinetica residua della corrente a valle dell'elica, la quale è un'energia dissipata. Mettiamo in evidenza le differenze tra η_P ed η: il rendimento η_P in genere è minore di η poiché tiene conto di effetti di dissipazione di energia[12] che invece non sono considerati in η. Quindi η_P rappresenta una grandezza pratica, o comunque più pratica di η; nonostante questo però il rendimento η ci permette di mettere in evidenza certi effetti. Esplicitando la spinta T nella espressione di η secondo l'espressione scritta nel § 1 (vale a dire $T = \dot{m}(U-V)$) si ha

$$\eta = \frac{\dot{m}(U-V)V}{\dot{m}(U-V)V + \frac{1}{2}\dot{m}(U-V)^2}$$

e semplificando otteniamo

$$\eta = \frac{2V}{U+V} = \frac{2}{\frac{U}{V}+1} = \frac{2}{\frac{\Delta V}{V}+2}$$

[12] Effetti di tipo viscoso, perdite legate alla compressibilità, perdite dette di ventilazione (da intendersi come energia cinetica legata a componenti di velocità tangenziali: l'elica durante la rotazione non produce solo variazioni di velocità in senso assiale, ma anche in senso tangenziale e a queste possiamo associare un'energia cinetica che sarà necessariamente un'energia dissipata).

avendo introdotto la differenza $\Delta V = U - V$, che nel caso dell'elica è la differenza tra la velocità del fluido a valle dell'elica stessa e la velocità del velivolo. La precedente è un'espressione di notevole interesse, poiché ci mostra qual è l'effetto della differenza di velocità ΔV: per avere un rendimento elevato occorre far sì che la variazione di velocità sia bassa; tanto maggiore è invece la ΔV prodotta dall'elica e tanto minore sarà il rendimento propulsivo perché maggiori saranno le perdite di energia di cui parlavamo nella nota precedente. Dunque se vogliamo un motore efficiente dobbiamo considerare un sistema nel quale la variazione di velocità risulti bassa, ma se è piccolo ΔV, sarà piccolo anche come uno dei termini che compaiono nella spinta

$$T = \dot{m}\Delta V$$

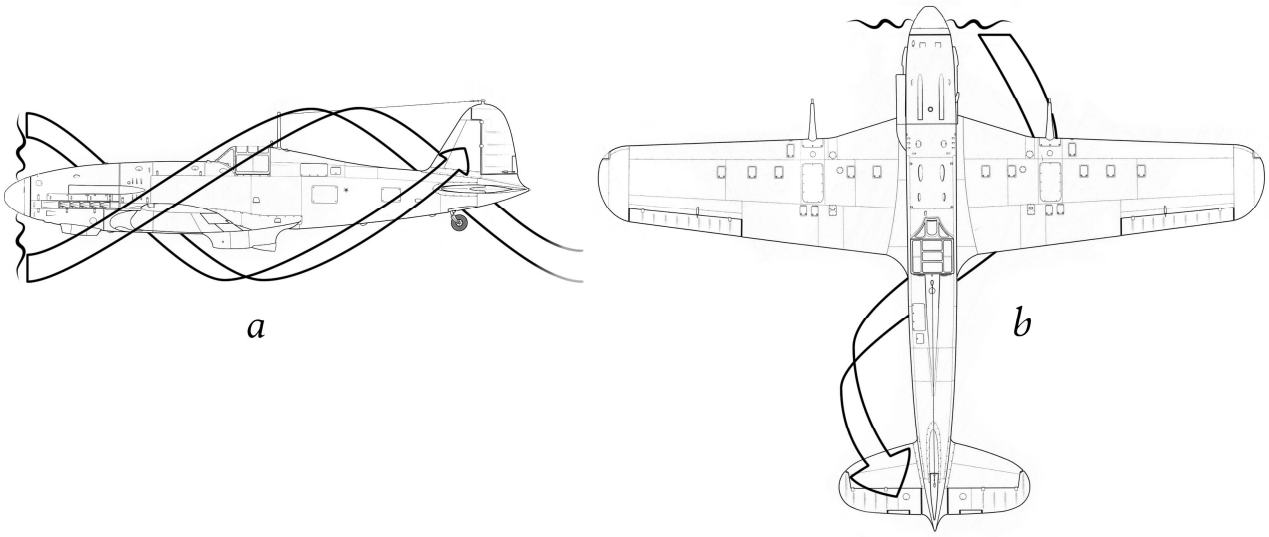
per questo motivo, se riduciamo la differenza di velocità per aumentare il rendimento, produciamo necessariamente una diminuzione della spinta; dobbiamo perciò aumentare il termine di portata d'aria elaborata dall'elica. Quanto detto ci porta ad un risultato importante: se desideriamo che il motore funzioni con un buon rendimento η dobbiamo accelerare grandi masse d'aria, producendo al contempo piccole variazioni di velocità e quindi, dal punto di vista teorico, converrebbe avere delle eliche il più grandi possibile.

6.7 - INTERAZIONE TRA ELICA E VELIVOLO

Esistono tre tipi di effetti dovuti all'accoppiamento tra elica e velivolo: effetti aerodinamici, coppia di reazione ed effetti giroscopici; analizziamo pertanto uno per uno tali effetti mettendone in evidenza gli aspetti fondamentali

1. EFFETTI AERODINAMICI

In figura 15*a* abbiamo un andamento qualitativo delle linee di corrente a valle di un'elica in rotazione.



FIAT G-55A - Figura 15

La figura mostra come la presenza di un'elica in rotazione produca delle perturbazioni sul campo di velocità attorno al velivolo; tali perturbazioni interessano sia le componenti assiali, sia quelle tangenziali e radiali della velocità. Ciò naturalmente provoca delle variazioni del campo aerodinamico sulle superfici aerodinamiche del velivolo stesso: notiamo (figura 15*b*) come l'effetto forse più rilevante sia quello che interessa gli impennaggi di coda, verticale ed orizzontali, dell'aereo. Se consideriamo una sezione dell'impennaggio verticale ed indichiamo con $\vec{V}$ la velocità indisturbata del velivolo, a causa della presenza dell'elica in rotazione, avremo delle componenti di velocità di perturbazione dirette come in figura 16 e che indichiamo con $\vec{v}$.

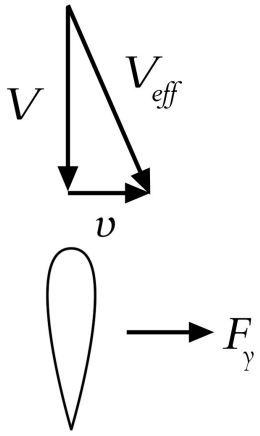


Figura 16

La conseguenza è che la corrente risulta deviata di un angolo β e l'impennaggio verticale si trova perciò a lavorare ad una certa incidenza, producendo di fatto una forza laterale, che indichiamo con F_y, la quale a sua volta genera un momento di imbardata negativo che dovrà essere compensato da un'opportuna azione del pilota sui comandi.

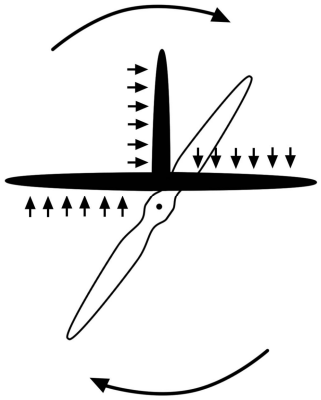


Figura 17

In figura 17 abbiamo invece l'effetto delle velocità di perturbazione sugli impennaggi orizzontali; l'elica considerata è sempre un'elica destra. Osserviamo come il campo di velocità di perturbazione produca un aumento di incidenza, e quindi di forza aerodinamica, sull'impennaggio orizzontale di coda sinistro ed una diminuzione di incidenza, e quindi di forza aerodinamica, sull'impennaggio orizzontale di coda destro: il risultato è quello di un momento di rollio positivo.

Si potrebbe pensare di eliminare a priori tali effetti utilizzando velivoli bimotori con eliche rotanti in versi opposti, ma è interessante notare (si veda figura 18) come in realtà ciò non elimini completamente il problema: notiamo come le velocità di perturbazione siano simmetriche, quindi si eliminano senz'altro i momenti di rollio e di imbardata (al più avremo delle sollecitazioni strutturali), ma osserviamo al contempo che vi sono delle velocità di perturbazione con lo stesso segno sugli impennaggi orizzontali e ciò causa la nascita di momenti di beccheggio; nel caso di eliche convergenti avremo una riduzione di incidenza sugli impennaggi orizzontali e quindi il momento di beccheggio risultante sarà positivo (cabrante), mentre nel caso di eliche divergenti l'incidenza sugli impennaggi aumenta e dunque il momento risultante è negativo (picchiante). Comunque, al di là di quanto ora detto, utilizzare velivoli plurimotori con eliche che ruotano in verso opposto è una scelta che nella pratica non viene fatta molto spesso, perché dovremmo avere motori con gruppi di riduzione diversi o addirittura motori con alberi che ruotano in verso opposto, e questo non è certamente una opzione conveniente dal punto di vista economico: si pensi solo alla gestione ed alla manutenzione dei motori su ciascun velivolo.

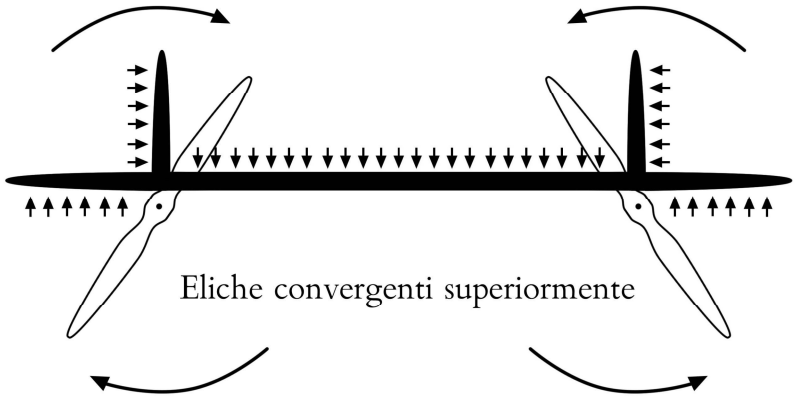
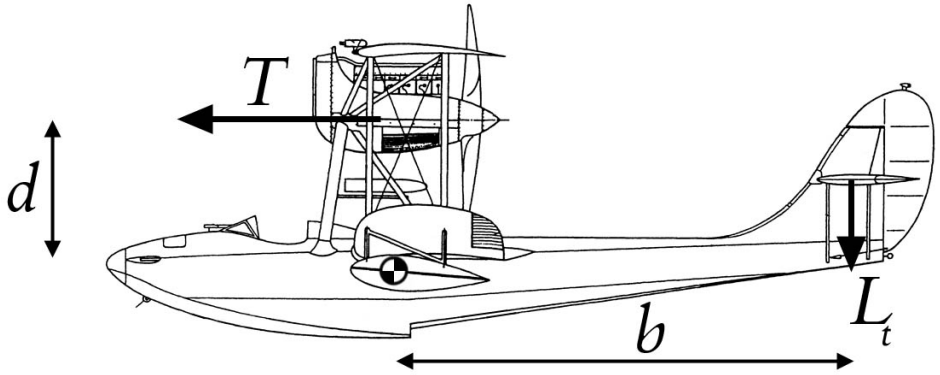


Figura 18

Un altro effetto aerodinamico importante è legato alla variazione della pressione dinamica in corrispondenza delle superfici aerodinamiche interessate dalla scia dell'elica. In corrispondenza delle superfici aerodinamiche poste nella scia avremo certamente una maggior pressione dinamica, poiché l'elica produce degli aumenti di velocità a valle del disco dell'elica stessa, e quindi una maggior efficienza aerodinamica di queste superfici, nonché una minor tendenza alla separazione; in genere cioè una superficie posta nella scia dell'elica tenderà a stallare ad angoli d'attacco maggiori rispetto al caso in cui l'elica è assente. Questo fatto può essere sia positivo che negativo e lo possiamo verificare con due esempi. Un esempio tipico in cui tali effetti sono positivi ci porta piuttosto indietro negli anni[13], quando venivano usate configurazioni tipo quella in figura 19, la quale rappresenta un idrovolante; osserviamo come il piano di coda orizzontale vada a trovarsi proprio in linea con la scia dell'elica.

Tale posizione non è casuale, perché l'asse di spinta si trova ad una certa distanza *d* dal baricentro e quindi occorreva equilibrare una coppia $\vec{M}_T = \vec{T} \times \vec{d}$ (legata al motore) di beccheggio; tale equilibrio viene naturalmente realizzato attraverso l'impennaggio orizzontale, il quale è quasi sempre calettato ad angoli negativi (e lo vedremo meglio quando parleremo di stabilità statica) ed è perciò deportante: la forza deportante $\vec{L}_t$, trovandosi ad una distanza *b* dal baricentro, genera un momento cabrante che si oppone al momento $\vec{M}_T$. La spinta, e perciò anche il momento $\vec{M}_T$, dipendono però dalle condizioni di funzionamento del gruppo elica-motore e quindi non sono costanti durante il volo; collocando l'impennaggio orizzontale nella scia dell'elica, anche il momento cabrante generato dall'impennaggio di coda non sarà costante, poiché al variare del regime di funzionamento del motore, varia la pressione dinamica che investe l'impennaggio e quindi varia la forza deportante $\vec{L}_t$.

[13] Possiamo far riferimento agli anni '30 quando la Regia Aeronautica era all'avanguardia nel mondo e si esibiva in crociere transoceaniche usando velivoli idrovolanti con motore posto su un'incastellatura ad di sopra della fusoliera.



Macchi M-41bis - Figura 19

Se ad esempio la spinta del motore aumenta, aumenterà (in modulo) la coppia $\vec{M}_T$ che dovrà essere equilibrata, ma aumenterà anche la pressione dinamica che investe l'impennaggio di coda orizzontale e dunque aumenta la sua deportanza ed il momento cabrante da essa generato; in questo modo si realizza perciò una sorta di compensazione automatica degli effetti che, in una certa misura, semplificava il controllo del velivolo. Il secondo esempio (vedi figura 20) è relativo ad un velivolo a configurazione Canard e chiarisce come la tendenza a stallare ad angoli d'attacco maggiori da parte di superfici aerodinamiche poste nella scia di un'elica possa essere negativo.

In genere, nella configurazione Canard, le superfici portanti anteriori[14] sono calettate sulla fusoliera ad un angolo maggiore rispetto a quello di calettamento dell'ala (vedi figura 21, nella quale abbiamo esagerato tale differenza per metterla meglio in evidenza) e questo garantisce un comportamento favorevole del velivolo in condizioni di alta incidenza o di stallo incipiente. Si tenga infatti presente che per "comportamento favorevole ad alti angoli d'attacco" si intende che il velivolo, nel momento in cui, per qualche motivo, raggiunge l'incidenza di stallo, è in grado di reagire producendo dei momenti picchianti, che tendano cioè a riportarlo a valori minori dell'angolo d'attacco: la configurazione con alette Canard calettate ad un angolo maggiore rispetto a quello dell'ala, fa sì che nel momento in cui aumenti l'angolo d'attacco, le prime a stallare saranno proprio le alette Canard; se stallano le alette Canard veniamo a perdere un contributo di portanza posto davanti al baricentro e perciò si genera un momento di beccheggio negativo che fa abbassare il muso del velivolo, riportando l'angolo d'attacco a valori più bassi. In fase di progetto però non era stato considerato con sufficiente attenzione l'effetto legato alla presenza dell'elica, la cui scia investe in pieno le alette anteriori; quando perciò il proto-

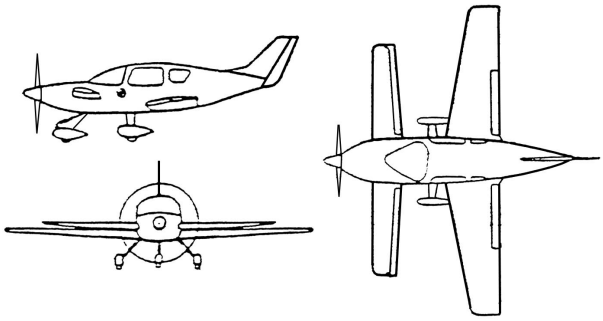
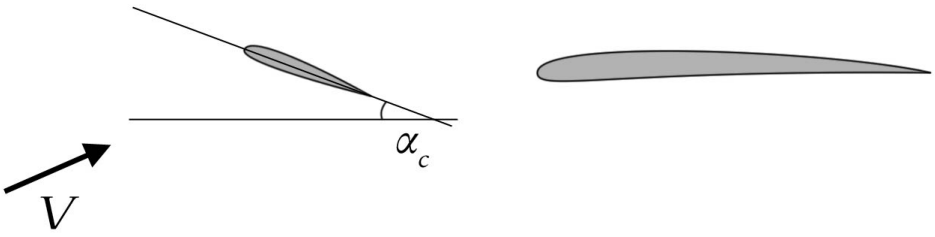


Figura 20

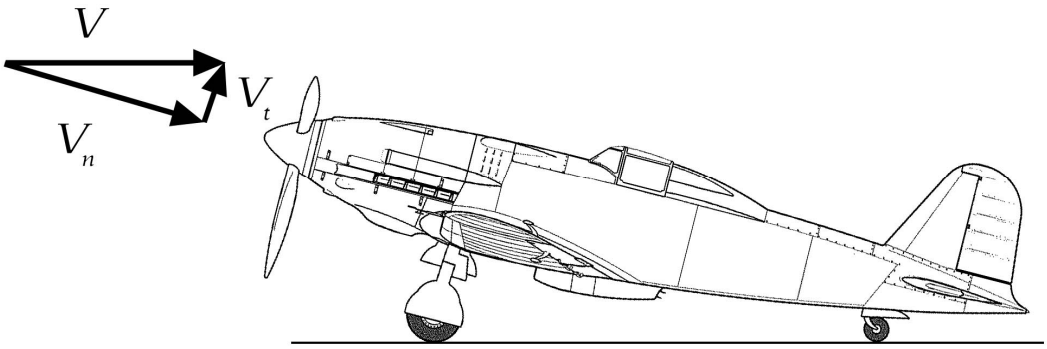
[14] Le alette Canard sono in genere portanti.

tipo effettuò delle prove di stallo[15], le superfici Canard, trovandosi immediatamente dietro l'elica, non manifestarono la separazione prima dell'ala e perciò non si verificò quel effetto di momento picchiante che avrebbe dovuto riportare il velivolo in una condizione normale.



Configurazione Canard - Figura 21

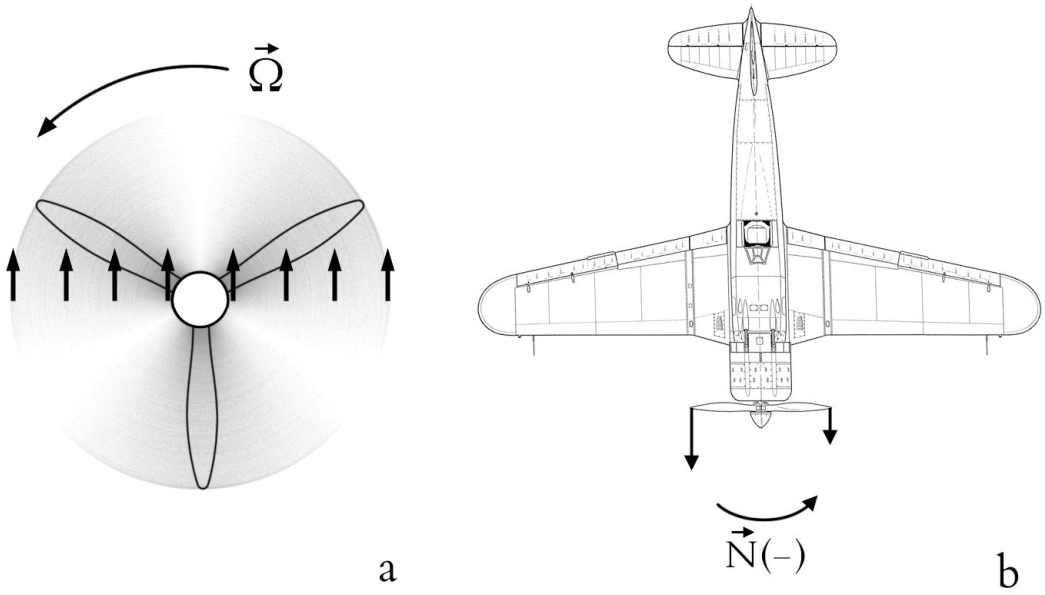
L'ultimo effetto aerodinamico che consideriamo è presente in genere nelle fasi di decollo di certi velivoli ad elica e durante le fasi di salita a grande angolo di rampa (e quindi ad alti angoli di incidenza) e prende il nome di *effetto P*, dove P sta per *propeller*, elica. Per esempio, gli aerei con carrello triciclo inverso iniziano la corsa di decollo con un'elevata incidenza rispetto alla direzione della corrente.



FIAT G-50V con motore DB-601 - Figura 22

Possiamo scomporre il vettore velocità del fluido rispetto al velivolo in due componenti che indichiamo con $\vec{V}_n$ e $\vec{V}_t$, rispettivamente normale e parallela al disco dell'elica ed osserviamo come la componente tangenziale sia diretta verso l'alto. Consideriamo ora (vedi figura 23a) una vista frontale all'elica, che supponiamo destrorsa (perciò gira in verso antiorario se vista frontalmente) e componiamo la velocità delle pale dell'elica con la componente $\vec{V}_t$.

[15] Prove di volo ad angoli di incidenza corrispondenti allo stallo sono imposte dalle norme per questo tipo di velivoli.



FIAT G-50bis - Figura 23

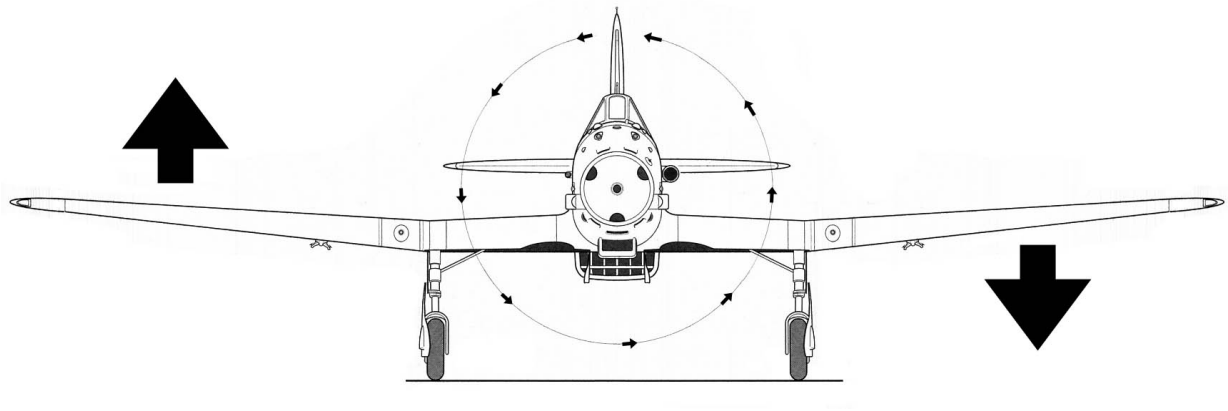
Notiamo come nella parte destra del disco dell'elica la velocità $\vec{V}_t$ è concorde con la velocità della pala, mentre nella parte sinistra le due velocità sono opposte; il risultato è che nella parte destra del disco dell'elica le velocità relative sono minori e quindi è minore l'azione propulsiva mentre nella parte sinistra sono maggiori e dunque è maggiore anche l'azione propulsiva. Quindi l'asimmetria nel campo di velocità tangenziali porta ad una asimmetria nelle azioni sviluppate dall'elica (vedi figura 23b) e l'effetto di ciò è la nascita di un momento di imbardata negativo che il pilota deve contrastare attraverso un'opportuna azione sul timone.

2. COPPIA DI REAZIONE

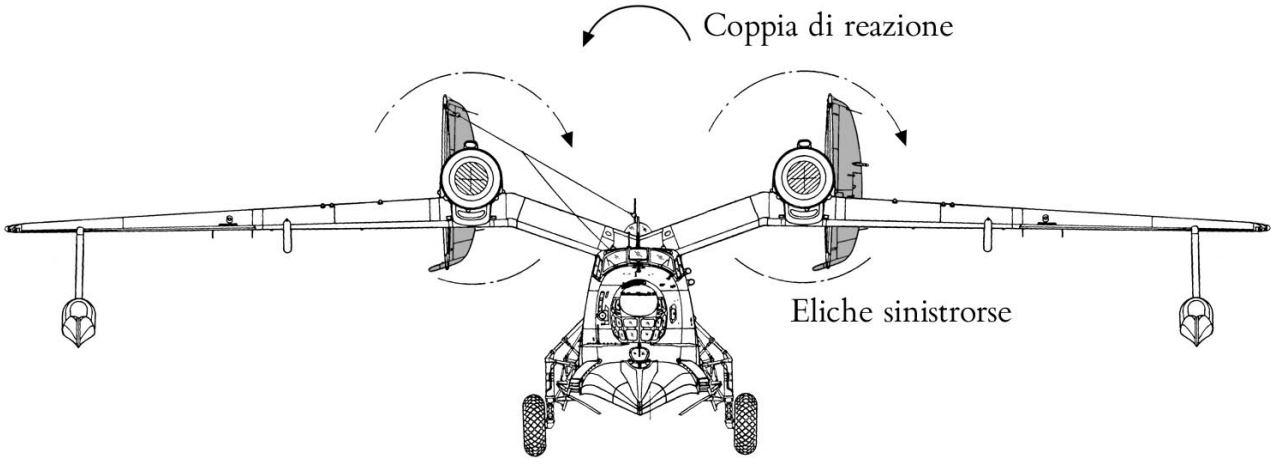
La genesi di questi effetti è abbastanza intuitiva: il motore esercita sull'elica, attraverso l'albero di trasmissione, una certa coppia e per il 3° principio della dinamica l'elica trasmetterà una coppia di reazione sul velivolo uguale ed opposta che tenderebbe a far ruotare il velivolo in verso opposto a quello di rotazione dell'elica. L'effetto più evidente di questo fenomeno è riscontrabile sugli elicotteri, sui quali appunto, per evitare che il velivolo si metta a ruotare per effetto della coppia di reazione del rotore, viene installato nella parte posteriore della fusoliera un piccolo rotore detto proprio rotore anticoppia. Questi effetti risultano più pronunciati nelle fasi in cui è maggiore la potenza erogata dal motore e quindi principalmente nella fase di decollo con il velivolo a terra, ma che naturalmente si manifestano anche in volo. Nella fase di decollo, quando cioè il velivolo è ancora con il carrello a terra, l'effetto più importante è quello di un carico non simmetrico sul carrello stesso: se ad esempio consi-

deriamo un'elica destrorsa (vedi figura 24), la coppia di reazione tenderebbe a far ruotare il velivolo in verso opposto, determinando così un maggior carico sulla ruota sinistra del carrello principale; ciò produrrà tipicamente una maggior resistenza di attrito su tale ruota e dunque si avrà la tendenza del velivolo ad imbardare a sinistra.

Per contrastare tale tendenza, il pilota può agire sul timone oppure sugli alettoni: agendo sul timone genera una coppia di imbardata opposta a quella dovuta al carico asimmetrico sul carrello, mentre agendo sugli alettoni va a contrastare direttamente la causa che provoca il carico asimmetrico sul carrello e cioè la coppia di reazione. Quando invece siamo in volo non esiste più alcun problema di carico non simmetrico sul carrello e dunque non esiste nessuna coppia di imbardata da equilibrare, ma abbiamo comunque il problema di dover contrastare la coppia di reazione, che si presenta come una coppia di rollio. Esistono diversi sistemi per equilibrare il momento di rollio di controcoppia; una prima possibilità prevede che le due semiali non siano perfettamente uguali.



FIAT G-55 - Figura 24



Beriev Be-12 *Chajka* (gabbiano) - Figura 25

Nell'esempio un idrovolante bimotore con eliche sinistrorse equirotanti, quindi la coppia di reazione è positiva (tende cioè a far abbassare la semiala destra); se perciò aumentiamo

la superficie della semiala destra, quest'ultima sarà più portante della semiala sinistra e si avrà così un momento aerodinamico che si oppone a quello legato alla coppia di reazione. Una seconda possibilità è quella di calettare le due semiali, o gli alettoni, con angoli diversi, in modo tale che una semiala (che nel nostro esempio sarà la semiala destra) lavori ad un incidenza leggermente maggiore dell'altra, così da produrre maggior portanza e dunque un momento aerodinamico di rollio che si oppone alla coppia di reazione.

Un'ultima possibilità è quella di calettare in modo non simmetrico l'impennaggio di coda verticale. Questo produce una asimmetria nel comportamento del velivolo, generando in particolare una coppia di rollio che si oppone a quella di reazione. Quest'ultima soluzione, insieme alla possibilità di orientare l'asse di spinta opportunamente (quindi ruotato di qualche grado nel piano alare), risulta in genere preferibile rispetto a quella di semiali calettate diversamente o addirittura di semiali di lunghezza diversa, ciò è facilmente comprensibile se pensiamo a quanto detto poco fa a proposito dell'idrovolante: la coppia di reazione è un altro effetto di accoppiamento tra motore e velivolo e quindi dipende dalle condizioni di funzionamento dell'elica ed in generale del motore; nel momento in cui perciò dobbiamo compensare questi effetti è preferibile utilizzare delle soluzioni la cui efficacia dipenda dalle condizioni di funzionamento del motore. Così se adottiamo la soluzione che prevede il calettamento non simmetrico del gruppo deriva-timone, dato che tali superfici si trovano più o meno nella scia dell'elica, gli effetti aerodinamici ad esse associati saranno influenzati dalla scia stessa, con la conclusione che l'effetto di compensazione che stiamo cercando risulterà più o meno intenso a seconda che sia maggiore o minore la potenza erogata dal motore, il che è esattamente ciò che desideriamo.

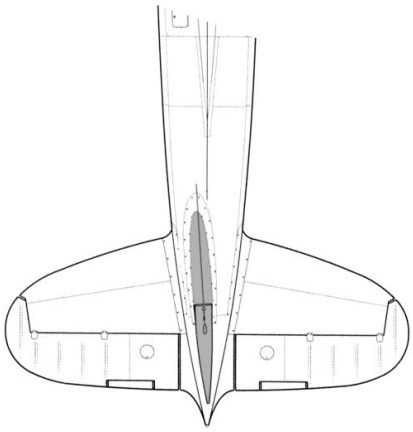


Figura 26

Eliche controrotanti dei motori Kuznetsov NK-12M di un Tupolev Tu-142, primato mondiale di velocità, 876,47 km/h - Figura 27

La soluzione che eliminerebbe il problema della coppia di reazione sarebbe quella di usare, nel caso di un bimotore, eliche ruotanti in senso opposto: in questo caso patiremmo delle sollecitazioni strutturali, ma non delle coppie agenti sul velivolo; abbiamo però già accennato al fatto che in genere si preferisce l'uso di motori o gruppi di riduzione uguali, perciò tale tipo di soluzione si può adottare con dei motori ad eliche in serie *controrotanti*, cioè dei motori con un gruppo di riduzione che comanda due alberi (su ognuno dei quali è montata un'elica) controrotanti. In questo caso effettivamente la soluzione di eliche controrotanti è una delle migliori.

3. EFFETTI GIROSCOPICI

L'ultima forma di accoppiamento tra elica e velivolo di cui dobbiamo tener conto è quella legata ai cosiddetti effetti giroscopici, di cui abbiamo già parlato quando abbiamo espresso il termine relativo nelle equazioni del moto del velivolo (vedi § 4.9). Sappiamo che,

se ad un sistema giroscopico[16] applichiamo delle coppie esterne, il sistema reagisce sviluppando certe velocità angolari dette di *precessione*. Lo stesso tipo di fenomeno è presente anche

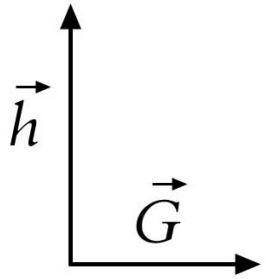


Figura 28

sul velivolo, sia nel caso di eliche in rotazione, sia nel caso di motori a getto[17], dove il momento angolare legato alle masse in rotazione risulta piuttosto consistente. Prima però di occuparci di ciò che accade sul velivolo, facciamo un discorso del tutto generale: consideriamo un certo sistema in rotazione a cui è associato un certo valore del momento della quantità di moto che indichiamo con $\vec{h}$ (vedi figura 28) e supponiamo di applicare a questo sistema una coppia esterna $\vec{G}$ ortogonale ad $\vec{h}$.

Fra le tante regole che ci permettono di definire come ruoti il sistema una volta soggetto alla coppia esterna, possiamo utilizzare l'equazione fondamentale che governa la variazione del momento della quantità di moto, la quale nel sistema di riferimento inerziale si scrive

$$\left.\frac{d\vec{h}}{dt}\right|_I = \vec{G}_I$$

supponendo per semplicità che $\vec{G}$ sia costante per un certo intervallo di tempo Δt, avremo

$$\Delta\vec{h} = \vec{G}\Delta t.$$

Dunque avendo scelto $\vec{G}$ ortogonale ad $\vec{h}$, la variazione del vettore momento della quantità di moto $\vec{h}$ sarà perpendicolare ad $\vec{h}$ stesso, perciò la nuova giacitura di $\vec{h}$ dopo l'intervallo di tempo Δt sarà ruotata in verso orario.

[16] Un sistema giroscopico è un sistema costituito da una massa in rotazione cui è associato un certo valore del momento della quantità di moto.

[17] E questo è vero sia per aerei monomotore come ad esempio l'F-16, che per aerei plurimotore quando comunque i propulsori hanno gli elementi rotorici che ruotano tutti nello stesso verso.

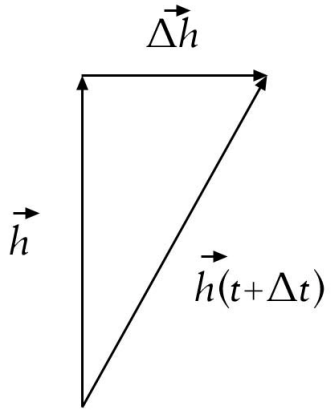


Figura 29

Occupiamoci ora dell'aeromobile e supponiamo di aver a che fare con un velivolo monorotore ad elica destrorsa

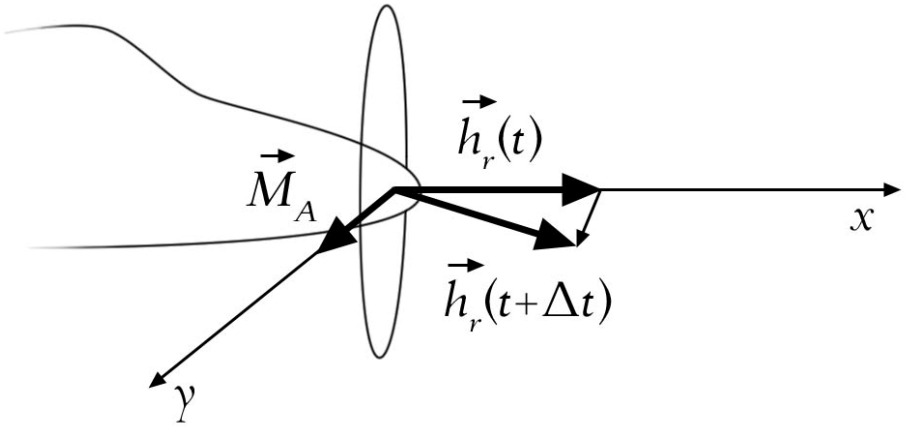


Figura 30

il momento angolare $\vec{h}_r$ è dato da

$$\vec{h}_r = \underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r$$

e sarà diretto secondo l'asse longitudinale del velivolo; supponiamo ora che il pilota comandi una cabrata e quindi realizzi, mediante una rotazione dell'equilibratore, un momento di beccheggio positivo (diretto cioè nel verso positivo dell'asse y) che indichiamo con $\vec{M}_A$. In base a quanto detto, la variazione del vettore momento angolare, nell'ipotesi che $\vec{M}_A$ sia costante nell'intervallo di tempo Δt e che tale intervallo di tempo sia breve, è data da

$$\Delta\vec{h}_r = \vec{M}_A \Delta t.$$

Tale variazione sarà perciò parallela al vettore $\vec{M}_A$ e quindi sarà allineata con l'asse y del velivolo. La nuova giacitura del vettore $\vec{h}_r$ è rappresentata in figura 30 e si può immediatamente notare che l'effetto è quello di una rotazione di imbardata positiva del sistema. Se dunque il pilota comanda una cabrata, deve tener conto del fatto che, se gli effetti giroscopici dell'elica sono rilevanti, il velivolo tenderà ad imbardare a destra. Mettiamo meglio a fuoco tale aspetto del problema utilizzando le equazioni del moto. Immaginiamo di considerare l'elemento rotorico separatamente dal velivolo, cioè supponiamo di poter trattare la dinamica della massa rotorica prescindendo dalla presenza della dinamica del velivolo: questo perché vogliamo semplicemente determinare che tipi di velocità saranno indotte sotto l'azione di coppie esterne. L'equazione che governa il fenomeno che stiamo discutendo è (nel riferimento inerziale)

$$\left.\frac{d\vec{h}}{dt}\right|_I = \vec{G}_I .$$

Nel sistema di riferimento solidale al velivolo, cioè nel sistema di riferimento mobile[18] tale equazione diventa

$$\left(\dot{\vec{h}}_r\right)_B + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_B \left(\vec{h}_r\right)_B = \vec{G}_B$$

dove al solito col pedice B si intende che le grandezze sono riferite al sistema di riferimento corpo e dove il vettore $\left(\vec{h}_r\right)_B$ è dato da

$$\left(\vec{h}_r\right)_B = \underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r = \begin{bmatrix} \left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\underline{\underline{I}}_r$ momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse longitudinale del velivolo ed $\vec{\omega}_r$ velocità angolare dell'elica. Il prodotto $\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_B \left(\vec{h}_r\right)_B$ è quindi dato da

[18] Si faccia attenzione che, pur se stiamo prescindendo dalla dinamica del velivolo, il rotore è comunque solidale al velivolo stesso e perciò si muove rispetto al riferimento inerziale.

$$\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_B\left(\vec{h}_r\right)_B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| \\ -q\left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| \end{bmatrix}.$$

Le equazioni scalari corrispondenti alla $\left(\dot{\vec{h}}_r\right)_B + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}_B\left(\vec{h}_r\right)_B = \vec{G}_B$ sono

$$\begin{cases} \left|\underline{\underline{I}}_r \dot{\vec{\omega}}_r\right| = L \\ r\left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| = M \\ -q\left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right| = N. \end{cases}$$

Quando parliamo di coppie giroscopiche le equazioni più importanti sono la seconda e la terza; in particolare dalla seconda si ha

$$r = \frac{M}{\left|\underline{\underline{I}}_r \vec{\omega}_r\right|}$$

dalla quale osserviamo che a prescindere dalla dinamica del velivolo, un momento di beccheggio positivo produce una velocità di imbardata di precessione positiva. Ricordiamo che r rappresenta una rotazione positiva attorno all'asse z_B ed M un momento positivo parallelo all'asse y_B.

Gli effetti giroscopici possono manifestarsi sia durante la corsa di rullaggio che durante il volo; la fase di decollo per velivoli con carrello triciclo prevede infatti che ad un certo punto della corsa di rullaggio il pilota comandi, attraverso l'equilibratore, un momento di beccheggio negativo che tende a far staccare il ruotino posteriore dal suolo, mettendo cosi il velivolo all'incidenza corrispondente alla fase successiva di distacco completo da terra; occorre perciò tener conto che, per effetti giroscopici, tale manovra genera l'insorgere di una rotazione che in questo caso, essendo il momento di beccheggio negativo, è verso sinistra (il velivolo cioè tende ad imbardare a sinistra).

Lo stesso effetto lo abbiamo anche in volo: se il pilota, volendo effettuare una picchiata, comanda una rotazione dell'equilibratore verso il basso e dunque comanda un momento di beccheggio negativo (picchiante appunto), il velivolo tende immediatamente a ruotare verso sinistra.

6.8 - POTENZA ALL'ALBERO DEL MOTORE ALTERNATIVO: CURVE DI CALIBRATURA

Nei §§ precedenti abbiamo descritto in dettaglio l'elica, che costituisce uno degli elementi del motoelica, ovverosia il gruppo formato da un motore a pistoni che comanda un'elica attraverso un riduttore di giri; per completare il discorso su tale tipo di propulsore ed arrivare così alla determinazione della potenza disponibile del motoelica (sia a passo fisso che a passo variabile) occorre analizzare le caratteristiche del motore alternativo cui l'elica è collegata. La grandezza fondamentale è in questo caso la potenza Π_a erogata all'albero dal motore alternativo; ancora una volta ci limiteremo a dare un'espressione che serve più che altro a mettere in evidenza i parametri da cui dipende Π_a. La forma più semplice possibile che possiamo utilizzare per esprimere la potenza all'albero è la seguente

$$\Pi_a = \delta_T \; n \; \psi(h).$$

Notiamo quindi una dipendenza lineare sia dalla variabile δ_T di controllo del pilota (la manetta) che dal numero n di giri del motore[19] (il che significa un regime di coppia costante), mentre la dipendenza dalla quota è rappresentata attraverso la funzione $\psi(h)$: come primo risultato osserviamo dunque che la potenza all'albero del motore alternativo non dipende dalla velocità di volo. Le caratteristiche di un motore alternativo vengono di solito espresse attraverso dei grafici che prendono il nome di curve di calibratura: un primo tipo di grafico (vedi figura 31) è relativo alle condizioni di funzionamento *al livello del mare in aria tipo* ed è rappresentato da una famiglia di curve, molto prossime a delle rette, che fornisce la potenza all'albero in funzione della pressione di alimentazione, avendo come parametro il numero di giri.

[19] Tale dipendenza è plausibile nel regime di utilizzo di questi motori.

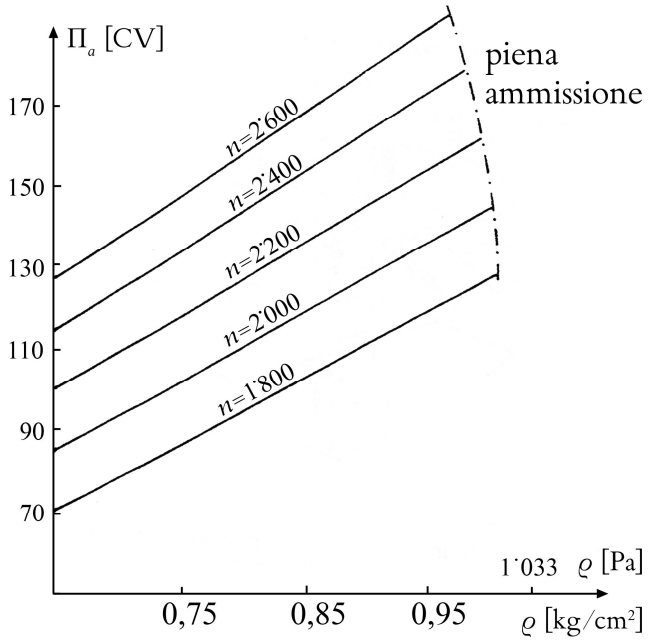


Figura 31

È spontaneo chiedersi come vengano selezionati il numero di giri e la pressione di alimentazione: il numero di giri, facendo riferimento ad eliche a passo fisso[20], è determinato dall'equilibrio tra la potenza erogata dal motore e la potenza assorbita dall'elica, tenendo conto che la coppia assorbita dall'elica dipende dalle condizioni di funzionamento del sistema (in particolare dalla velocità di volo); la pressione di alimentazione viene invece variata attraverso una valvola a farfalla situata in genere a valle del carburatore, che è controllata dalla manetta, la quale regola la quantità in volume di miscela aria-combustibile che entra nei cilindri del motore: quando la valvola a farfalla è tutta aperta, la pressione di alimentazione è massima (si dice che siamo in *piena ammissione*), mentre man mano che la valvola a farfalla si chiude, la pressione di alimentazione si riduce e di conseguenza è minore il volume di miscela che entra nel motore riducendosi così anche la potenza erogata.

Il motore alternativo inoltre risente notevolmente dell'effetto della quota; le curve che riportano tale effetto, senza voler assolutamente entrare nei dettagli, sono curve del tipo in figura 32, nelle quali per diversi valori della pressione di alimentazione, che è a parametro e che diminuisce all'aumentare della quota, e per diversi valori del numero di giri, troviamo la potenza erogata da quel tipo di motore al variare della quota.

[20] Per le eliche a passo variabile il discorso è notevolmente diverso, come vedremo più avanti.

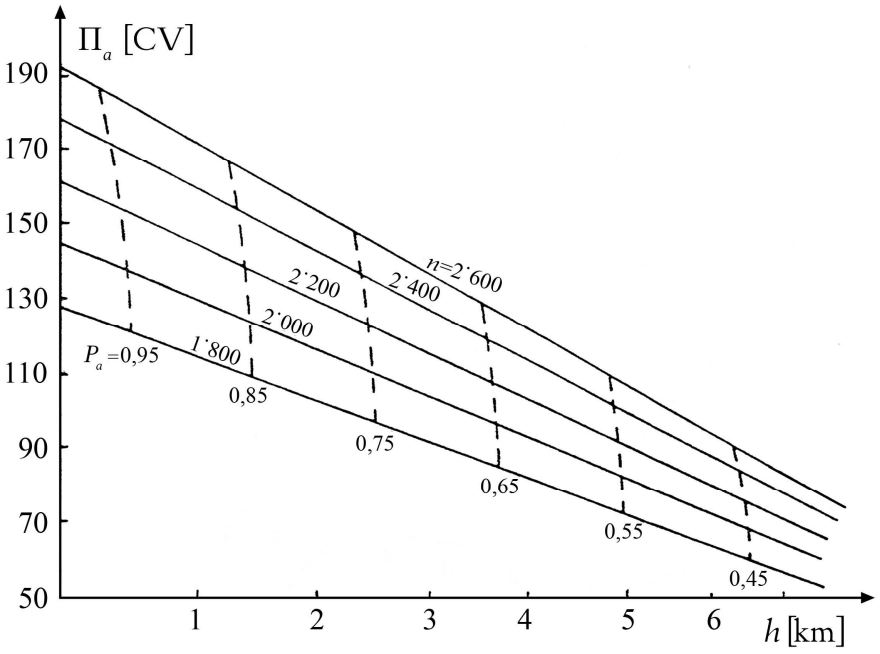


Figura 32

Notiamo come la potenza all'albero diminuisca all'aumentare della quota per effetto della diminuzione della densità dell'aria; in realtà però la potenza all'albero non varia in modo proporzionale alla densità, ma diminuisce un po' più di quanto diminuisce la densità all'aumentare della quota. Se vogliamo rappresentare quanto detto per via analitica, possiamo scrivere

$$\frac{\Pi_a}{\Pi_{a_{LM}}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{LM}} \right)^x$$

dove $x = 1{,}1 - 1{,}2$ circa. È intuitivo che per un motore aeronautico sia difficile accettare, soprattutto se il velivolo ha dimensioni non piccolissime, una variazione così consistente della potenza erogata all'aumentare della quota; fin dagli albori dell'aeronautica dunque sono stati sviluppati dei sistemi che permettono di ridurre notevolmente questo problema; tali sistemi consistono essenzialmente in sistemi di compressori accoppiati al motore. Originariamente si utilizzavano dei compressori meccanici, i quali sono vincolati meccanicamente al motore e perciò sono costituiti da un insieme di ingranaggi e da un gruppo di trasmissione che assorbono (e quindi sottraggono) potenza dal motore stesso per aumentare la pressione di alimentazione; il motore in questa situazione è progettato in modo da erogare una potenza nominale di progetto in corrispondenza di una certa quota, ad esempio il grafico di figura 33 ci mostra i dati relativi ad un motore che eroga la potenza massima ad una quota di circa 10'500 ft.

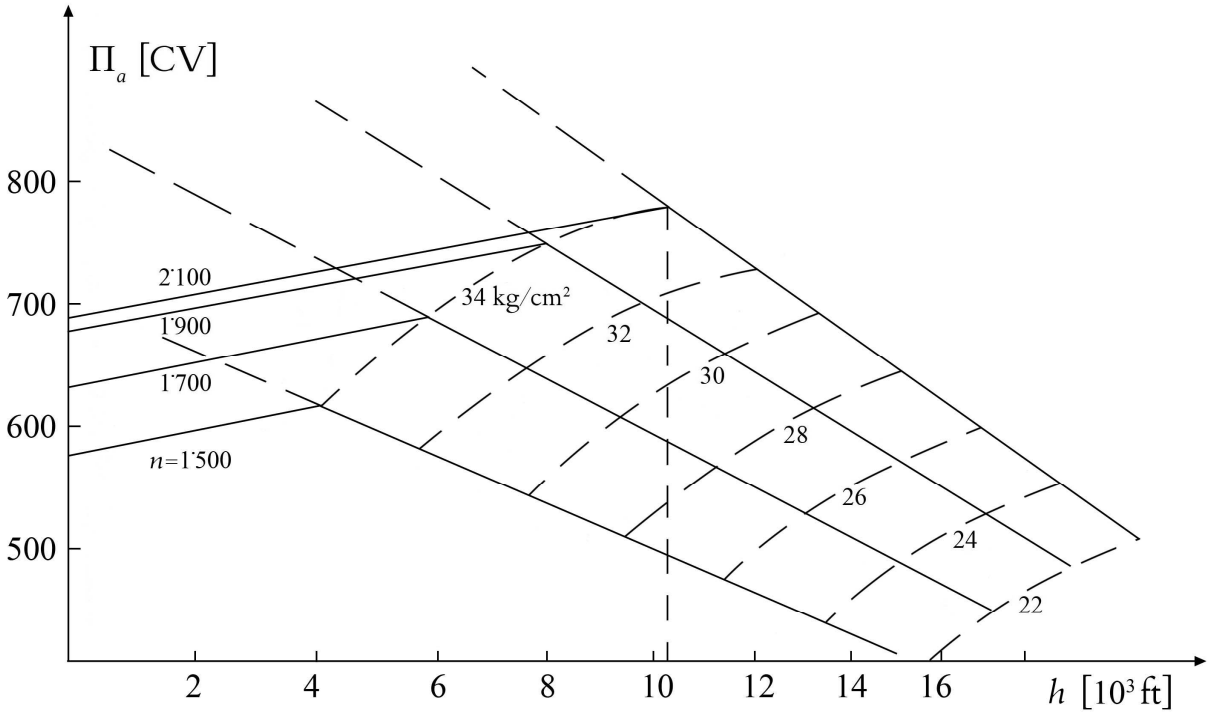


Figura 33

La quota a cui il motore eroga la potenza nominale prende il nome di *quota di ristabilimento*[21]; al di sopra di tale quota, Π_a decresce con la legge scritta prima. Notiamo però come la potenza erogata da un motore con un compressore meccanico presenta una tendenza a diminuire anche per quote inferiori a quella di ristabilimento: tale fatto si spiega tenendo presente che dobbiamo evitare che la pressione di alimentazione raggiunga valori superiori a quelli massimi previsti, perché se il compressore continuasse a funzionare allo stesso modo a quote più basse di quella di ristabilimento, il motore lavorerebbe a pressioni troppo gravose (andamento tratteggiato delle curve di figura 33) di quelle per le quali sia stato progettato; per ovviare a questo problema occorre intervenire con sistemi opportuni che limitino la pressione massima di alimentazione del motore, in genere viene strozzata la mandata dell'aria al motore, oppure viene strozzata l'aspirazione del compressore. Lo strozzamento all'ammissione è realizzato per mezzo di un *alimentatore di pressione* che agisce indipendentemente dalla volontà del pilota ed è comandato dalla pressione di alimentazione stessa. Il problema è che non si riesce a mantenere costante la potenza erogata all'albero al di sotto della quota di ristabilimento, sia perché, a parità di pressione di alimentazione, al diminuire della quota aumenta la temperatura e quindi diminuisce la densità delle cariche nel motore, sia perché il compressore è vincolato meccanicamente al motore e, al diminuire della quota, assorbe sempre più frazioni di potenza, mantenendosi costante la pressione di alimentazione;

[21] Il compressore è quindi progettato per garantire una certa pressione di alimentazione a quella particolare quota.

il risultato è che al diminuire della quota aumenta il lavoro di compressione e quindi aumenta la quantità di potenza sottratta al motore.

Il problema è stato quasi completamente eliminato quando si è iniziato ad installare i motori turbocompressi.

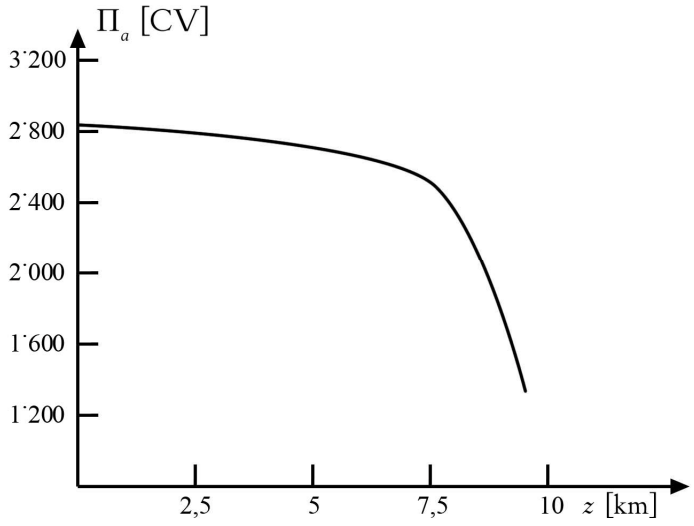


Figura 34

In questo caso il motore è accoppiato ad un gruppo turbina-compressore nel quale si sfrutta l'espansione dei gas di scarico del motore stesso. Il vantaggio di questi sistemi è anzitutto che il gruppo turbina-compressore non sottrae direttamente potenza al motore, poiché lavora sfruttando i gas di scarico; inoltre in tal modo si disaccoppia il funzionamento del gruppo di compressione dal funzionamento del motore e quindi tutto il sistema ha un'elasticità maggiore. Il risultato è che con motori turbocompressi riusciamo ad ottenere (vedi figura 34) una potenza erogata praticamente costante al variare della quota, fino di nuovo alla quota di ristabilimento. Una volta che abbiamo a disposizione le curve di calibratura siamo in grado di esprimere nel modo più opportuno l'espressione della potenza, mettendo ancora in evidenza che la potenza erogata all'albero dal motore alternativo non dipende dalla velocità di volo.

6.9 - POTENZA DISPONIBILE PER UN MOTOELICA A PASSO FISSO

Abbiamo ora tutti gli elementi per poter finalmente esplicitare la relazione

$$\Pi_d = \Pi_d\left(\delta_T; h; V\right)$$

e la relazione fondamentale che ci permetterà di farlo è quella del rendimento effettivo: per definizione infatti

$$TV = \Pi_d$$
$$\Omega Q = \Pi_a$$

perciò

$$\Pi_d = \eta_P \Pi_a$$

Per ricavare la potenza disponibile (e con ciò intendiamo esprimere la Π_d in funzione della velocità di volo, in corrispondenza di una certa quota e di un certo valore della variabile di controllo del pilota) occorre dunque mettere insieme le informazioni che abbiamo sull'elica e le informazioni che abbiamo sul motore; occupiamoci anzitutto di ciò che accade nel caso di un motore accoppiato ad un'elica a passo fisso. Supponiamo perciò di aver fissato un valore della quota $\bar{h}$ ed un valore dalla variabile di controllo $\bar{\delta}_T$ (quindi tutto quello che diremo vale per valori noti ed assegnati di tali due parametri) e scegliamo poi un valore $n^\star$ del numero di giri; ricordando la $\Pi_a = \delta_T \; n \; \psi(h)$ possiamo calcolare immediatamente la potenza erogata all'albero

$$\Pi_a^\star = \bar{\delta}_T \; \psi\left(\bar{h}\right) \; n^\star$$

Tenendo presente che $\Omega Q = \Pi_a$, abbiamo anche che

$$\Pi_a^\star = \bar{\delta}_T \; \psi\left(\bar{h}\right) \; n^\star = 2\pi \; n^\star \; Q$$

da cui, in base alle formule di Renard

$$\bar{\delta}_T \psi\left(\bar{h}\right) = 2\pi \bar{\varrho} n^{\star 2} d^5 C_Q .$$

Notiamo immediatamente che l'unica incognita della precedente è il coefficiente di coppia C_Q, poiché la densità è nota, avendo fissato la quota ed anche il diametro dell'elica; dalla precedente ricaviamo dunque

$$C_Q^\star = \frac{\bar{\delta}_T \psi\left(\bar{h}\right)}{2\pi \bar{\varrho} n^{\star 2} d^5} .$$

Una volta determinato il coefficiente di coppia $C_Q^\star$ possiamo fare il passo successivo e cioè utilizzare le curve caratteristiche dell'elica, nelle quali è riportato proprio l'andamento di C_Q, di C_T e di η_P in funzione del rapporto di funzionamento, e ricavare il valore $\gamma^\star$ del rapporto di funzionamento ed il valore del rendimento η_P, corrispondenti al $C_Q^\star$ appena trovato

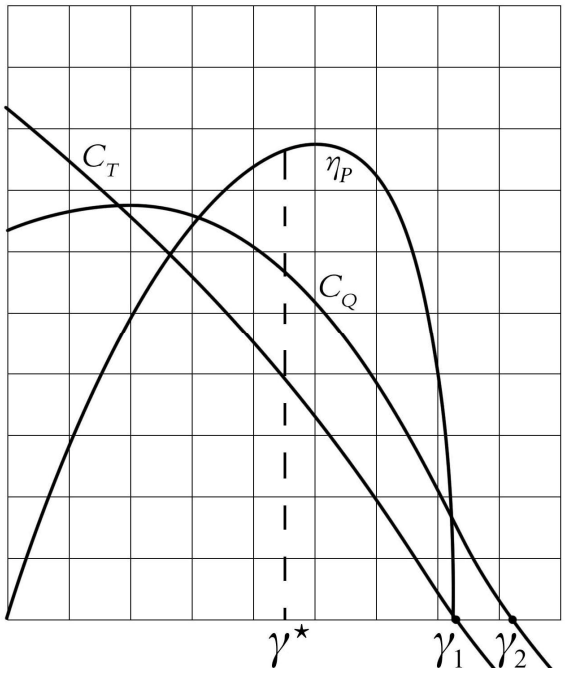


Figura 35

Tenendo conto quindi della $\Pi_d = \eta_P \Pi_a$ abbiamo anche la potenza disponibile corrispondente a quella condizione di funzionamento

$$\Pi_d^\star = \eta_P^\star \Pi_a^\star$$

ed inoltre, dalla definizione stessa di rapporto di funzionamento, la velocità di volo corrispondente a quella condizione di funzionamento è

$$V^\star = \gamma^\star \; n^\star \; d$$

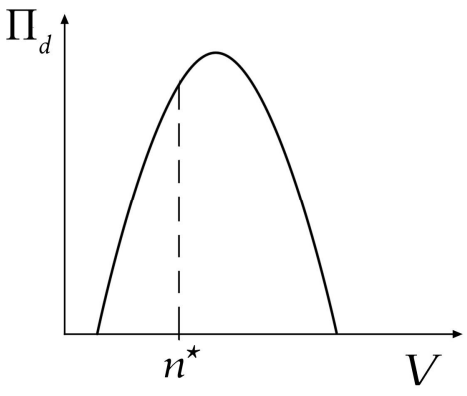


Figura 36

Le precedenti equazioni individuano pertanto un punto nel piano $\Pi_d V$ corrispondente al valore $n^\star$ scelto del numero di giri. Ripetendo il procedimento per un numero sufficientemente elevato di valori plausibili del numero di giri otteniamo l'andamento della potenza disponibile al variare della velocità di volo che è quello che stavamo cercando.

Notiamo come l'andamento della potenza disponibile in funzione della velocità di volo per un motoelica a passo fisso segua molto (come forma) la curva del rendimento: la Π_d presenterà perciò una variazione molto sensibile in funzione della velocità di volo, il che, come vedremo, non è per niente un fatto positivo.

6.10 - POTENZA DISPONIBILE PER UN MOTOELICA A PASSO VARIABILE

Affrontiamo ora il problema della determinazione della relazione tra potenza disponibile e velocità di volo per un motore accoppiato ad un'elica a passo variabile. Nella maggior parte dei velivoli viene data al pilota la possibilità di agire sul passo dell'elica, ciò è molto utile per sfruttare certe condizioni di funzionamento tipo elica in bandiera o elica inversa (vedi § 5), ma durante le normali condizioni di funzionamento in genere la regolazione del passo non viene lasciata al pilota, poiché ciò costituirebbe un aggravio di lavoro notevolissimo. Esiste pertanto un organo detto regolatore automatico di giri, il quale mantiene costante il regime di rotazione dell'elica attraverso una variazione automatica del passo: se ad esempio l'elica sta girando ad un certo numero di giri e per un qualche motivo aumenta la velocità di volo, tale aumento provoca un aumento del rapporto di funzionamento ed una diminuzione dell'angolo d'attacco medio a cui lavorano le pale dell'elica e quindi l'elica stessa tenderebbe ad incrementare la propria velocità angolare[22]; il regolatore automatico di giri interviene aumentando il passo dell'elica, cioè ruotando le pale in modo che l'angolo di calettamento aumenti, riportando così l'elica al regime di rotazione iniziale. Lo stesso tipo di intervento si produce quando la velocità di volo diminuisce: ciò infatti porterebbe ad un aumento della coppia assorbita dall'elica poiché diminuisce il rapporto di funzionamento e quindi il regolatore di giri interviene riducendo il passo e mantenendo così costante il coefficiente di coppia assorbita. Una prima conclusione è dunque che il funzionamento di un'e-

[22] Se diminuisce l'angolo d'attacco, diminuisce anche la coppia assorbita e quindi l'elica tende a girare più velocemente.

lica a passo variabile è, nelle maggior parte delle condizioni, a giri costanti, ossia a coppia assorbita costante. Fatta questa osservazione procediamo alla determinazione della relazione tra Π_d e V; anche in questo caso fissiamo un valore $\bar{h}$ della quota ed un valore $\bar{\delta}_T$ della variabile di controllo del pilota; supponiamo poi che il numero di giri sia quello nominale $\bar{n}$, cioè per esempio quello in cui il motore eroga la potenza prevista per la crociera. Come nel caso dell'elica a passo fisso troviamo perciò immediatamente il valore della potenza erogata, data da

$$\Pi_a = \bar{\delta}_T \, \bar{n} \, \psi\left(\bar{h}\right)$$

ed inoltre, tenendo conto che $\Omega Q = \Pi_a$ abbiamo

$$C_Q = \bar{C}_Q = \frac{\bar{\delta}_T \psi\left(\bar{h}\right)}{2\pi \bar{n}^2 \bar{\varrho} d^5}.$$

Notiamo però che, a differenza di quanto accada per il motoelica a passo fisso, il coefficiente di coppia così ottenuto è costante, poiché, come detto, il regolatore automatico di giri mantiene costante il regime di rotazione (ossia $\bar{n}$) qualunque sia la velocità di volo. Col valore costante C_Q che ricaviamo dalla precedente, utilizzando le curve caratteristiche dell'elica a passo variabile determiniamo le intersezioni della retta $C_Q = \bar{C}_Q$ con le curve relative ai diversi valori di ε, identificando diversi valori $(\gamma'; \gamma''; \gamma'''...)$ del rapporto di funzionamento, a ciascuno dei quali poi corrisponderà un certo valore del rendimento η_P $(\eta'_P; \eta''_P; \eta'''_P...)$ (vedi figura 37). Per ogni valore di η_P, possiamo quindi calcolare la velocità di volo e la potenza disponibile, esattamente come abbiamo fatto nel caso dell'elica a passo fisso.

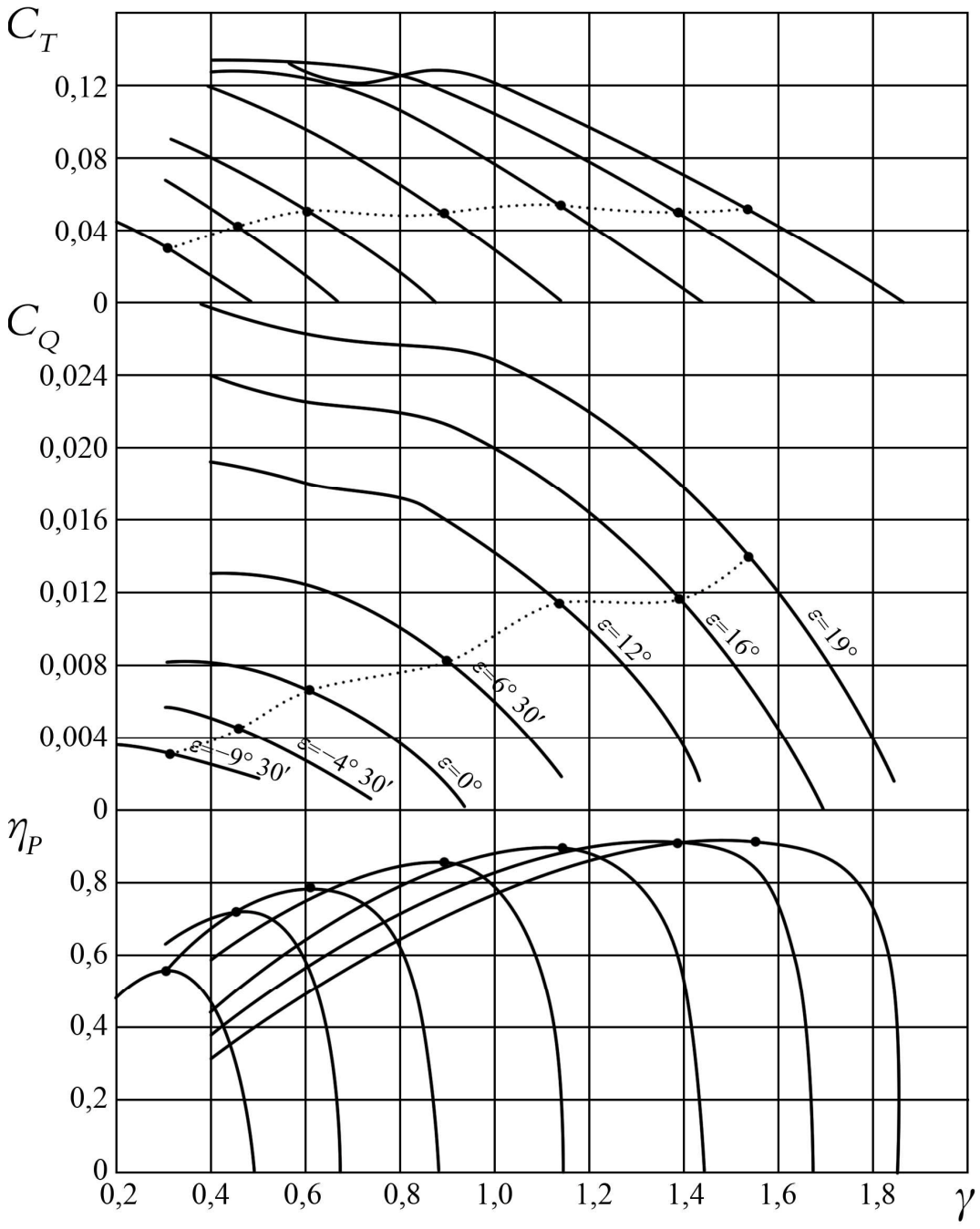


Figura 37

Restano così individuate una serie di coppie di valori $((\Pi'_d; V');(\Pi''_d; V'');(\Pi'''_d; V''');...)$ con le quali possiamo costruire il grafico cercato.

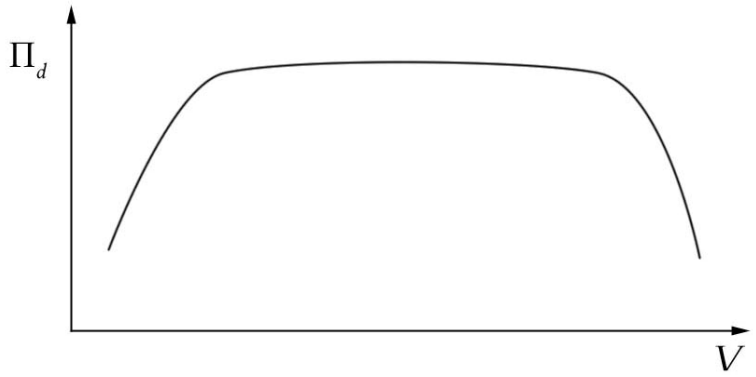


Figura 38

La curva che otteniamo ci mostra un andamento praticamente costante di Π_d al variare della velocità, con una diminuzione solo a basse velocità e ad alte velocità: la diminuzione della potenza disponibile ad alte velocità di volo è dovuta al fatto che inizieranno a farsi sentire effetti di compressibilità del fluido sulla pala (effetti di cui peraltro non abbiamo parlato), mentre dovremo aspettarci una diminuzione di Π_d anche a bassi valori della velocità per effetto del ridotto rendimento dell'elica.

6.11 - CONFRONTO TRA MOTOELICA A PASSO FISSO E MOTOELICA A PASSO VARIABILE: CARATTERISTICHE OPERATIVE

Nel fare un confronto tra motoelica a passo fisso e motoelica a passo variabile dobbiamo mettere ancora in evidenza il fatto che l'elica a passo variabile è un'elica a giri costanti e quindi la curva di figura 38 è tutta ottenuta per lo stesso valore del numero di giri, cosa che invece non accade nel caso dell'elica a passo fisso; c'è quindi una sostanziale differenza nel modo in cui i due diagrammi vengono determinati, proprio perché c'è una sostanziale differenza di comportamento tra i due tipi di eliche: mettendo a confronto i grafici di figura 36 e figura 38 si possono immediatamente notare i vantaggi dell'elica a passo variabile rispetto all'elica a passo fisso.

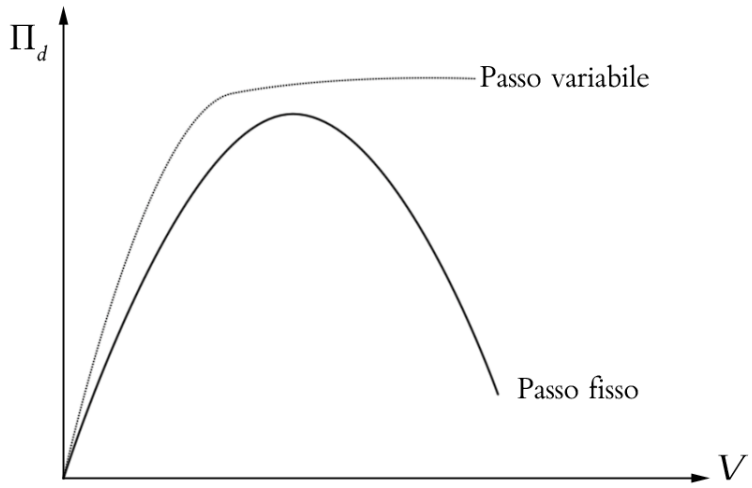


Figura 39

Osserviamo infatti come per l'elica a passo variabile, nella maggior parte dell'intervallo di utilizzo del velivolo, si abbia un andamento praticamente costante di Π_d al variare della velocità, tanto che quando studieremo le prestazioni del motoelica[23] faremo quasi sempre l'ipotesi di variazione nulla della potenza disponibile con la velocità di volo, cioè

$$\frac{d\Pi_d}{dV} = 0$$

Oltre al vantaggio ora citato però, ne esistono diversi altri, alcuni dei quali fondamentali; notiamo anzitutto che l'elica a passo fisso non riesce a far operare il motore alla potenza di progetto se non in corrispondenza di una determinata velocità di volo, mentre, come ci si discosta da tale velocità, la potenza disponibile non è più quella nominale. Supponiamo infatti di trovarci alla velocità di progetto di un dato velivolo con elica a passo fisso e supponiamo che una qualunque causa perturbatrice produca un aumento della velocità: se la velocità aumenta, la coppia assorbita decresce poiché aumenta il rapporto di funzionamento, e ciò comporta che la velocità angolare del motore e quindi dell'elica tenda ad aumentare; il pilota dovrà di conseguenza contrastare tale effetto, dato che il motore non deve funzionare ad un regime di rotazione maggiore di quello previsto e perciò agirà sulla manetta per diminuire la potenza erogata, ristabilendo così l'equilibrio: in questo modo però il motore eroga una potenza minore di quella nominale. Se invece la velocità di volo è minore di quella prevista, il rapporto di funzionamento diminuisce, la coppia assorbita aumenta e quindi la velocità di rotazione decresce: la potenza erogata risulta perciò ancora una volta minore di quella prevista; esiste dunque una sola velocità di volo nella quale l'elica a passo fisso permette di far funzionare il motore alla potenza nominale. Questo non accade nel caso dell'e-

[23] Quasi tutti i velivoli ad elica montano eliche a passo variabile.

lica a passo variabile, poiché al variare della velocità di volo interviene il regolatore automatico di giri che mantiene costante il regime di rotazione e quindi il motore lavorando sempre al numero di giri nominale, non risente di variazioni di velocità di volo. Un altro vantaggio dell'elica a giri costanti è riscontrabile in condizioni di avaria ad un motore, perché è possibile mettere in bandiera l'elica; questo costituisce un notevole vantaggio non tanto per i velivoli monomotore (per i quali comunque la diminuzione di resistenza che si ottiene permette di scendere con un angolo di rampa minore) quanto per i velivoli plurimotori: supponiamo infatti di trovarci su di un velivolo plurimotore con uno dei motori in avaria (ad esempio per grippaggio) ed immaginiamo che le eliche siano a passo fisso; l'elica montata sul motore in avaria è bloccata, ma non possiamo metterla in bandiera, perciò la resistenza di tutta la configurazione aumenta ed inoltre abbiamo perso una parte della spinta. La conseguenza è che la velocità di volo decresce e ciò produce una diminuzione della velocità di rotazione delle eliche funzionanti, poiché diminuisce il rapporto di funzionamento, col risultato che la potenza erogata da tutto il sistema si riduce ulteriormente[24]. Se invece abbiamo eliche a giri costanti non soltanto possiamo mettere in bandiera l'elica bloccata, minimizzando così la resistenza, ma se anche la velocità diminuisce (la spinta è infatti comunque minore dato che un motore è in avaria), ciò non produce particolari problemi, poiché il calettamento delle pale sulle eliche funzionanti varia in modo che si possa mantenere costante il regime di rotazione e quindi la potenza erogata non risente della variazione di velocità. Abbiamo però un vantaggio ulteriore: se il pilota comanda una riduzione del passo delle pale, causando così una riduzione della coppia assorbita dalle eliche funzionanti, l'angolo d'attacco a cui mediamente lavorano le pale stesse diminuisce e quindi si ha un aumento del regime di rotazione delle eliche e dei motori; il risultato è che la potenza di ciascuno dei motori funzionanti aumenta e si riesce così a compensare, almeno in parte, la perdita di potenza totale causata dall'avaria.

Notiamo a questo punto come nel caso dell'elica a passo variabile esista sia il regolatore automatico di giri che la possibilità da parte del pilota di poter variare manualmente il calettamento delle pale; se c'è da ridurre la potenza del motore[25] dobbiamo ridurre la potenza erogata e per farlo abbiamo diverse possibilità: possiamo anzitutto agire sulla manetta per ridurre la coppia erogata dal motore, mentre il regolatore automatico di giri manterrà costante il regime di rotazione di tutto il sistema riducendo il passo dell'elica; in genere si preferisce però, quando possibile, non sollecitare la struttura dell'elica: la seconda possibilità per diminuire la potenza è dunque ridurre il numero di giri[26] attraverso una riduzione manuale (agendo sulle opportune leve) del passo dell'elica.

---

[24] I motori funzionanti sono infatti equilibrati ad un regime di rotazione minore e quindi erogano una minor potenza.

[25] Supponiamo ad esempio di voler andare più piano, oppure in discesa alla stessa velocità.

[26] Oltre che dal punto di vista strutturale, può essere conveniente anche dal punto di vista dei consumi.

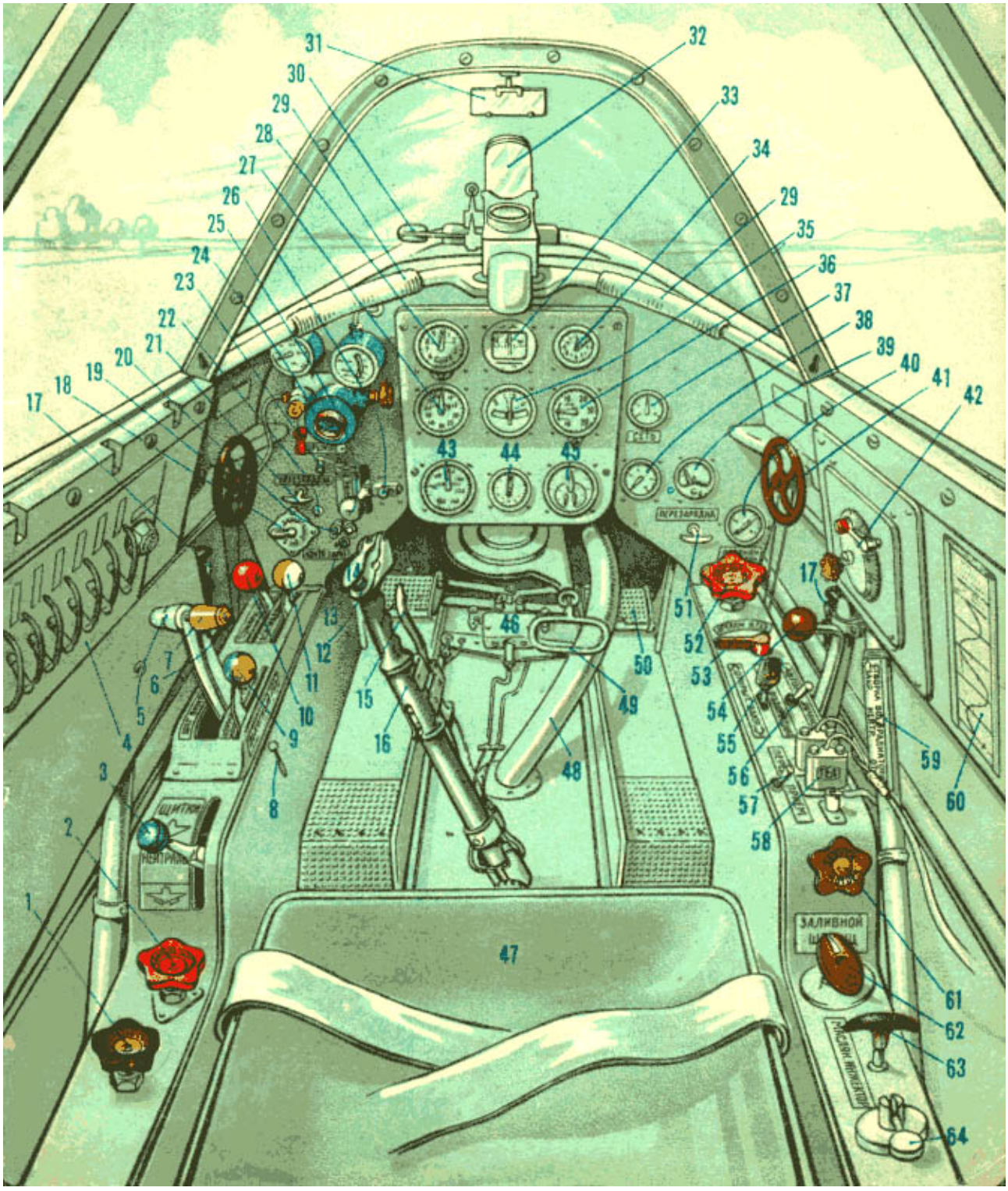
6.12 - SCHEMA DELLA CABINA DI UN CACCIA AD ELICA

Nel § precedente abbiamo accennato alla possibilità che ha il pilota di poter variare manualmente il passo dell'elica (se ovviamente l'elica è a passo variabile), nonché di poter agire sulla manetta per regolare la potenza erogata dal motore; è perciò opportuno rendersi conto di ciò che un pilota si trovi davanti quando salga a bordo di un velivolo ad elica e perciò osserviamo lo schema tipico della cabina (*cockpit*) di un velivolo ad elica.

Per quanto riguarda il controllo dei motori osserviamo come nella posizione alla sinistra del pilota ci siano tre manette: la prima (5) è quella che controlla l'angolo di calettamento delle pale[27]; la successiva leva (7), detta manetta, è invece relativa al controllo dell'apertura della valvola a farfalla sui due motori. Infine la terza manetta (9) controlla la miscela e l'effetto è quello di regolare la quantità di combustibile che viene miscelato con l'aria nel carburatore. L'uso di questo terzo tipo di controllo è un po' più complesso di quello che si trova sui vecchi modelli di auto, nei quali era presente un congegno che serviva per avere una miscela più ricca nella fase di avviamento; il pilota invece usa questo comando per arricchire la miscela quando sia necessario che il motore eroghi una potenza particolarmente elevata[28], oppure durante il volo in crociera per far funzionare il motore nel modo più opportuno, ai diversi valori della quota.

[27] Su questo tipo di velivoli si installano sempre eliche a passo variabile, le quali tipicamente operano ad un numero di giri costante, ma è comunque lasciata al pilota la possibilità di agire direttamente sul passo.

[28] Nella corsa di decollo o per effettuare alcune manovre ad esempio, è ammessa da parte del motore, per un tempo non superiore a qualche minuto, l'erogazione di una potenza che può essere superiore del 10% - 15% della potenza massima nominale, attraverso l'immissione nei cilindri di acqua, alcol, metanolo od altro.



Cabina di un caccia Yakovlev Yak-3 - Figura 40

1. Rubinetto del circuito pneumatico
2. Rubinetto di riempimento del serbatoio di emergenza
3. Leva di comando ipersostentatori;
4. Pannello elettrico;
5. Comando del passo dell'elica;
6. Bottone di trasmissione
7. Manetta
8. Leva del blocco della manetta
9. Leva della miscela
10. Leva del rubinetto tagliafuoco

11. Leva di sovralimentazione
12. Grilletto delle mitragliatrici
13. Bottone di prova delle luci di atterraggio
14. Grilletto del cannone
15. Grilletto del freno
16. Barra di comando
17. Luci della cabina
18. Commutatore dei magneti
19. Volano del trim di profondità
20. Spia delle luci di navigazione
21. Maniglia di riarmo pneumatico della mitragliatrice sinistra
22. Bottone della messa in rotta
23. Contatto ausiliario di armamento
24. Indicatore d'ossigeno KPA-3bis;
25. Leva di azionamento dei carrelli
26. Sicura della leva di azionamento dei carrelli
27. Anemometro
28. Altimetro
29. Maniglia principale per uscire dalla cabina
30. Comando di ventilazione della cabina
31. Retrovisore
32. Collimatore
33. Bussola
34. Orologio
35. Virosbandometro (indicatore di virata e derapata)
36. Variometro
37. Manometro del circuito pneumatico principale
38. Termometro dell'acqua
39. Voltamperometro
40. Manometro del circuito pneumatico secondario
41. Volantino di controllo apertura dei flabelli di aerazione del motore
42. Pannello comandi radio
43. Manometro d'ammissione
44. Tachimetro elettrico
45. Indicatore triplo (temperatura dell'acqua, pressione dell'olio pressione del combustibile)
46. Differenziale dei freni
47. Seggiolino del pilota
48. Condotto di eiezione dei bossoli del cannone
49. Maniglia di riarmo meccanico del cannone
50. Pedaliera
51. Maniglia di riarmo pneumatico della mitragliatrice destra
52. Volantino di apertura d'emergenza carrelli
53. Rubinetto del sistema del gas inerte
54. Leva di apertura d'emergenza dei portelli del carrello
55. Commutatore NP-3 (comando manuale del volano del radiatore d'acqua)
56. Commutatore di regime del regolatore automatico ART-41
57. Contatto della radio
58. Presa del laringofono
59. Indicatore di posizione del volano del radiatore d'acqua
60. Tabella di deviazione della bussola
61. Volano di avviamento del motore
62. Cartuccia di iniezione del motore e carburatore
63. Manettino dell'afflusso dell'olio
64. Rubinetto di riscaldamento dell'olio con la benzina

Una coppia di Yak-3 – Figura 41

In particolare la ricchezza della miscela viene regolata controllando lo strumento relativo alla temperatura dei gas di scarico del motore (*exhaust gas temperature gauge*): se la temperatura è troppo elevata significa che stiamo volando con una miscela troppo magra e pertanto dobbiamo arricchirla per far scendere la temperatura. Quest'ultimo aspetto è molto importante, perché volare troppo a lungo con una miscela magra può portare ad un surriscaldamento del motore e successivamente al grippaggio.

6.13 - CONSUMO SPECIFICO PER IL MOTORE ALTERNATIVO

Un'altra grandezza fondamentale che caratterizza il comportamento del motore è il *consumo specifico*, che indichiamo con C_S; il consumo specifico è definito come il combustibile consumato per unità di potenza erogata e per unità di tempo

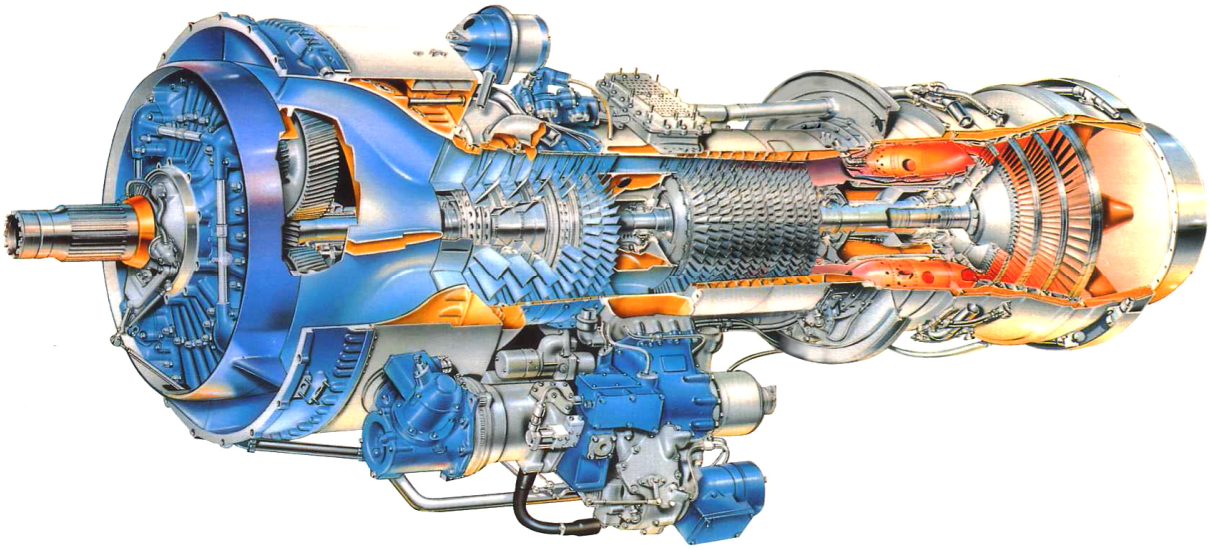
$$C_S = \frac{C}{\Pi_d} = -\frac{dW}{dt} \qquad [C_S] = \left[\frac{\mathrm{kg_{combustibile}}/\mathrm{h}}{\mathrm{CV}}\right].$$

Utilizzando queste unità di misura, l'ordine di grandezza del consumo specifico per un motore a scoppio aeronautico è 0,21 - 0,23.

6.14 - POTENZA DISPONIBILE PER IL TURBOELICA

Un'elica non è sempre accoppiata ad un motore alternativo; per applicazioni che richiedano una certa potenza, l'elica viene montata su un gruppo compressore-turbina, dando così origine al turboelica (in inglese *turbo propeller* o *turboprop*). In figura 42 possiamo vedere lo schema relativo a questa tipologia di propulsore.

Nella configurazione monoalbero una sola turbina si occupa di far girare sia il compressore che l'elica, mentre nella configurazione bialbero (gli alberi sono coassiali) c'è una turbina che fornisce energia al compressore ed una turbina che mantiene in rotazione l'elica.



Spaccato di un turboelica Rolls-Royce Tyne - Figura 42

Questa seconda soluzione è la più diffusa nella pratica, perché si impiegano due gruppi: il gruppo compressore-turbina di alta pressione ed il gruppo elica-turbina di bassa pressione e

ciò consente una maggior versatilità di impiego; in entrambi i casi comunque l'elica è sempre a passo variabile ed inoltre è presente un riduttore di giri[29]. In questo tipo di motori una parte (15% - 20%) dell'energia prodotta dal generatore di gas viene spesa, attraverso un ugello posto a valle della turbina, per produrre una certa spinta, mentre il resto è a disposizione dell'elica. In un turboelica si parla di potenza equivalente, la quale è definita come

$$\Pi_{ae} = \Pi_a + \frac{TV}{\eta_P}$$

in modo tale che la potenza disponibile sia

$$\Pi_d = \eta_P \Pi_{ae} = \eta_P \Pi_a + TV$$

dove Π_a rappresenta la potenza all'albero dell'elica ed è analoga a quella del motore alternativo. È interessante considerare ciò che accade ai due termini a secondo membro dell'espressione di Π_{ae} al variare della quota e della velocità; per quanto riguarda l'effetto della velocità di volo, il termine Π_a aumenta all'aumentare di V, perché aumenta la portata di fluido che agisce sul motore e perché aumenta la pressione all'imbocco del motore stesso. Il termine di spinta invece, tenendo presente la $Fdt = dm(U - V)$ (vedi § 1), tenderà a diminuire all'aumentare della velocità (chiariremo comunque ciò tra breve); in definitiva la potenza equivalente tende ad aumentare al crescere della velocità di volo.

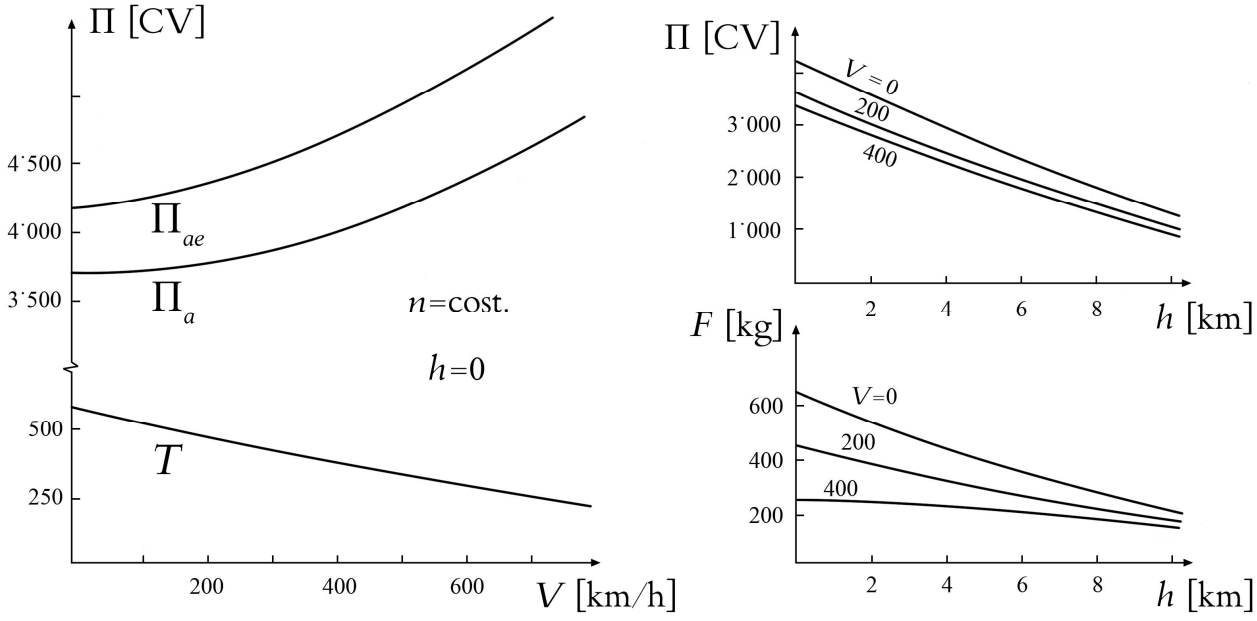


Figura 43

[29] Il regime di rotazione del gruppo compressore-turbina è sempre molto elevato ed occorre dunque inserire un organo meccanico che permetta di avere un numero di giri del mozzo dell'elica minore di quello del gruppo compressore-turbina.

L'altro effetto che prendiamo in considerazione è quello relativo alla quota: la portata d'aria che entra nel motore diminuisce all'aumentare della quota, perché diminuisce la densità, perciò decrescono sia Π_a che T.

Anche per il turboelica infine possiamo definire un consumo specifico, in maniera del tutto analoga a quanto fatto per il motoelica; i valori sono in questo caso mediamente più alti (siamo intorno a 0,25 - 0,3).

Per concludere accenniamo al fato che il turboelica è installato quando le potenze richieste superano valori dell'ordine di 600 cv, poiché a tali potenze il motore alternativo comincia a diventare troppo pesante; questo fa sì che velivoli a motoeliche raggiungeranno al massimo velocità intorno ai 600 km/h, mentre con velivoli turboelica possiamo arrivare sino a $M = 0{,}8$ (ma già a tali valori le eliche dovranno avere angoli di freccia abbastanza elevati per tener conto degli effetti di compressibilità). Se si desidera superare questi valori di deve adottare un altro tipo di propulsore, il turbogetto.

6.15 - SPINTA DISPONIBILE PER IL TURBOGETTO

Altro motore, che fu di larghissimo impiego, è il turbogetto. Per questo tipo di motore il parametro da considerare è la spinta disponibile. Nello schema di figura 44 possiamo notare un compressore accoppiato ad una turbina, e tra compressore e turbina troviamo la camera di combustione. Ci interessa discutere la variazione delle prestazioni di questo motore al variare della velocità di volo e della quota; iniziamo calcolando la variazione della spinta totale con la velocità:

$$T = T_S G = \dot{m}(U - V) = \frac{G}{g}(U - V)$$

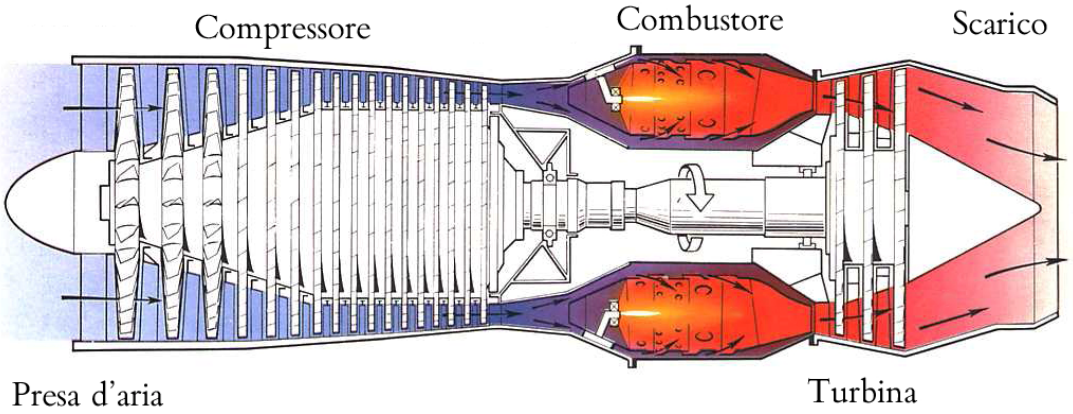
dove

$$T_S = \frac{T}{G} = \frac{1}{g}(U - V)$$

è la *spinta specifica* (cioè per unità di portata in peso),

$$G = \dot{m} g$$

rappresenta la portata in peso dell'aria che agisce nel motore ed infine U è la velocità di efflusso dei gas di scarico.



Schema di un turbogetto - Figura 44

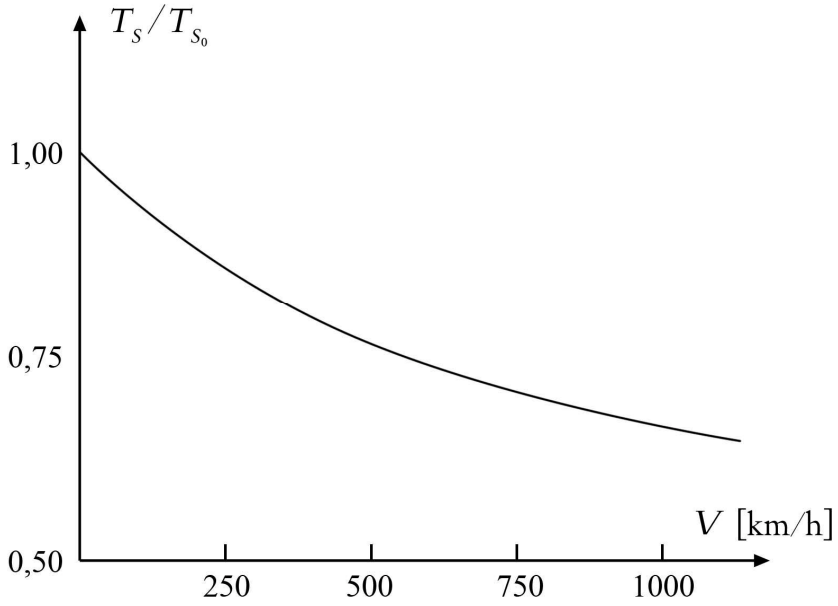


Figura 45

Osserviamo dalla definizione di spinta specifica come all'aumentare di V la spinta specifica diminuisca, anche se in realtà (vedi figura 45) la diminuzione non è totalmente da attribuire alla velocità (si noti infatti che la diminuzione non è lineare come ci si potrebbe aspettare dall'espressione di T_S). In tale curva la T_{S0} rappresenta la spinta specifica a punto fisso. Possiamo poi considerare, in prima approssimazione, che G vari in modo proporzionale al quadrato della velocità di volo (legge all'incirca parabolica).

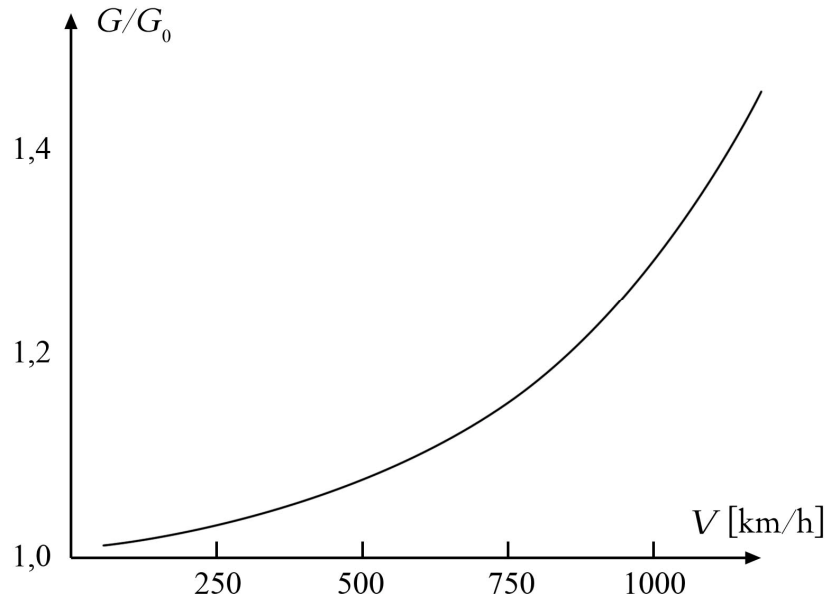


Figura 46

Tenendo conto della espressione della spinta, la variazione della medesima con la velocità risulterà dunque dal prodotto dei due contributi ora visti ed il risultato che si ottiene è che nell'intervallo di applicazione di questi motori (alte velocità subsoniche) inizialmente prevale la diminuzione di T_S e quindi la spinta T diminuisce, per poi tendere ad aumentare, in quanto prevale l'aumento di G.

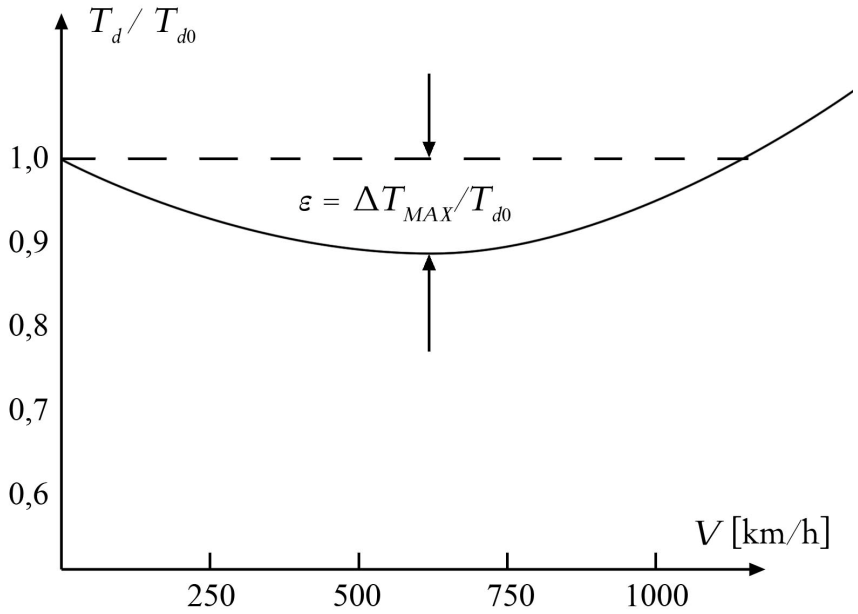


Figura 47

La variazione ε raggiunge al massimo il 15% rispetto al valore a punto fisso e tale quantità è per noi relativamente piccola, tanto che tutte le volte che parleremo di turbogetti faremo l'ipotesi fondamentale[30] che la spinta disponibile resti costante al variare di V

$$\frac{dT_d}{dV} = 0 .$$

L'altro aspetto di cui dobbiamo parlare riguarda la variazione della spinta disponibile con la quota di volo ed anche in questo caso analizziamo separatamente cosa accada alla spinta specifica T_S ed alla portata G. La portata certamente diminuisce all'aumentare della quota (ed a velocità costante), poiché diminuisce la densità; per quanto riguarda invece la spinta specifica è presente un effetto legato alla diminuzione di temperatura con l'aumentare della quota che provoca un aumento di T_S[31].

Tale discorso è valido sino alla tropopausa, perché nella stratosfera la temperatura nel modello di aria tipo resta costante al variare della quota, quindi ne deriva che sopra gli 11'000 m si mantiene costante anche T_S. Nella troposfera (al di sotto cioè degli 11'000 m) prevale certamente la diminuzione della portata rispetto all'aumento della spinta specifica, però il fatto che T_S aumenti con la quota fa sì che la spinta effettiva T erogata dal motore non vari in modo proporzionale al rapporto tra le densità, ma vari un poco meno, mentre nella troposfera (cioè al di sopra degli 11'000 m), essendo T_S costante, la spinta T erogata dal motore varia come la portata G.

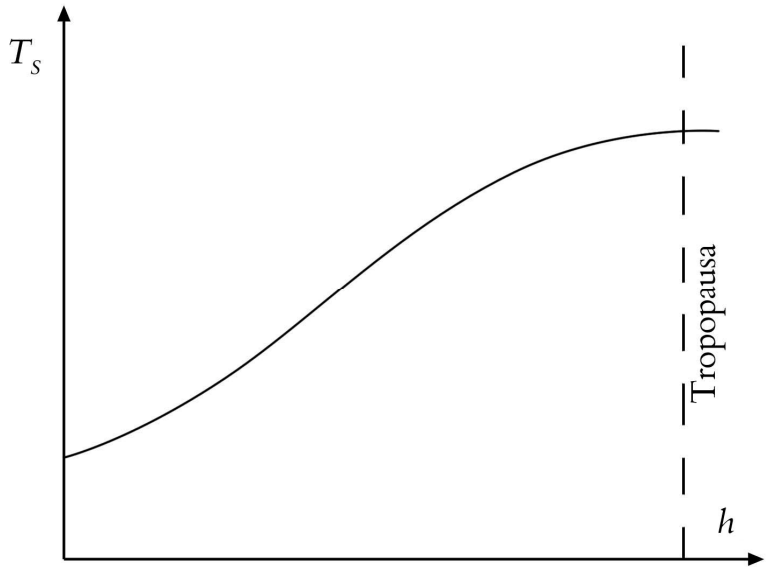


Figura 48

[30] Valida solo in calcoli di prima approssimazione.

[31] La diminuzione della temperatura provoca un aumento del salto entalpico a disposizione dell'ugello, perché se la temperatura di ingresso diminuisce, il lavoro del compressore decresce (a parità di rapporto di compressione) e quindi decresce anche il lavoro speso nella turbina che deve trascinare il compressore stesso.

Possiamo dunque esprimere il rapporto tra la spinta erogata in quota e la spinta erogata al livello del mare come

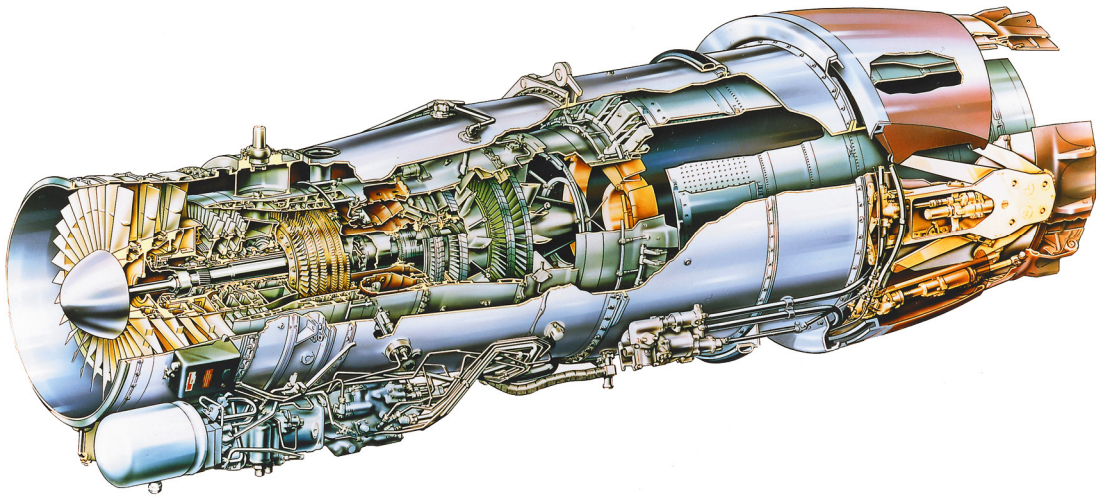
$$\frac{T}{T_{LM}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{LM}} \right)^x$$

dove l'esponente x sarà sicuramente minore di uno nella troposfera (valori caratteristici sono intorno a 0,7), mentre sarà molto vicino ad uno nella stratosfera.

Anche per un turbogetto possiamo introdurre il consumo specific0, definito però come la quantità di combustibile utilizzato per unità di spinta e nell'unità di tempo

$$C_S = \frac{C}{T_d} = -\frac{dW}{dt} \qquad [C_S] = \left[\frac{\mathrm{kg_{combustibile}} / \mathrm{h}}{\mathrm{kg_{spinta}}} \right]$$

ed un valore del tutto indicativo è $C_S \approx 1$[32]. L'aspetto pratico di tali motori è nella relazione che esprime la potenza disponibile in funzione del numero di giri: in figura 43 è riportato anche l'effetto della quota. È importante notare come, passando per esempio dal 100% del numero di giri allo 85%, la spinta erogata passi da circa 9'000 - 10'000 libre a circa 4'000 libre; si perde cioè più del 50% di spinta per una riduzione del 15% del numero di giri, quindi, per erogare una spinta prossima ai valori massimi, occorre non essere lontani dal regime di rotazione massimo.



Turboventola Rolls-Royce RB199 - Figura 49

[32] Tale valore non è chiaramente confrontabile con i valori di consumo specifico relativi ai motoelica; un possibile termine di paragone si può avere se per il motoelica si fa riferimento ad una velocità di progetto del velivolo e per quella velocità ci si riporta dalla potenza all'asse alla spinta, così da avere grandezze omogenee.

Ciò costituisce una caratteristica molto peculiare di questo tipo di motori, dei quali si parla spesso come di *motori pigri*, e di questa caratteristica occorre tener conto in certe fasi di volo come ad esempio l'atterraggio: se è necessario effettuare una manovra di riattaccata prima di aver toccato terra, bisogna passare da una potenza erogata prossima a quella minima alla potenza di riattaccata, o comunque alla massima potenza di risalita; prima che il motore eroghi la spinta massima però il numero di giri deve raggiungere un valore che è dell'ordine del 90% e questo richiede tempo poiché occorre accelerare masse rotanti notevoli. Per avere un'idea si pensi che nel caso di motori di dimensione elevata il tempo che viene impiegato per raggiungere la massima spinta da quando il pilota sposta la manetta nella posizione avanzata è intorno alla decina di secondi.

Su tutti gli aeromobili a getto oggi in uso, sono installati dei motori chiamati turboventola (*torbofan*), i quali impiegano due flussi, caldo e freddo, anziché uno solo. Il flusso detto caldo attraversa tutto il motore: ventola, compressore pluristadio, camera di combustione, turbina pluristadio ed ugello. Il flusso cosiddetto freddo invece attraversa solo ventola e ugello, nel caso di turboventola a flussi associati, oppure solo la ventola nel caso di turboventola a flussi separati. Per capire il motivo per il quale siano stati introdotti i turboventola, richiamiamo l'espressione del rendimento propulsivo

$$\eta = \frac{2}{2 + \frac{\Delta V}{V}}$$

la quale rende esplicito il fatto che, se vogliamo generare spinta in modo efficiente, risulta conveniente impartire una variazione di velocità relativamente ridotta ad una grande massa d'aria. Il turboventola è un motore che presenta, lo ripetiamo, un flusso caldo che percorre un ciclo termodinamico del tutto analogo ad un turbogetto, e un flusso freddo accelerato da un sistema rotorico (simile ad un'elica intubata) che non passa attraverso la camera di combustione e la turbina. Il parametro caratteristico di questi motori è il rapporto di diluizione (BPR, *bypass ratio*), definito come il rapporto tra la portata del flusso freddo e la portata del flusso caldo; valori tipici possono andare da 3 a 20. Rispetto al turbogetto ed a parità di spinta il consumo è più basso. Ricordiamo ancora che se abbiamo un ΔV piccolo cresce il rendimento, ma diminuisce la spinta prodotta dal motore, poiché questa è proporzionale alla variazione di velocità. Se quindi vogliamo spinte elevate dobbiamo aspettarci grosse dimensioni della sezione trasversale del motore, perché la massa d'aria che il motore deve elaborare è più grande di quella di un turbogetto semplice. Perciò un aspetto negativo è che questi motori hanno un ingombro trasversale maggiore rispetto ad un turbogetto, il quale aumenta la resistenza del velivolo[33]. Teniamo presente che sia nel turbogetto che nel

[33] Pensiamo per esempio al Boeing 777, un bimotore a fusoliera larga: il diametro dei motori è dell'ordine dei 3 metri; per aumentare la spinta tali motori sfruttano anche i notevoli progressi nel campo della resistenza alle alte temperature dei materiali utilizzati per le palette delle turbine e ciò ha consentito di realizzare motori da 40˙000 kg di spinta ciascuno.

turboventola solo il 25% dell'aria aspirata dal motore partecipa alla combustione, mentre la restante parte viene adoperata per mantenere la temperatura delle palette della turbina a valori non superiori ai 1˙000 - 1˙500 °C[34].

6.16 - SPINTA E POTENZA NECESSARIA

Prima di terminare il capitolo, dobbiamo parlare di spinta necessaria (associata ai motori a getto) e di potenza necessaria (associata ai motori ad elica) con riferimento a condizioni di volo a quota costante (in queste condizioni studieremo gran parte dei problemi di prestazioni). La spinta necessaria è per definizione data da

$$T_n = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D .$$

Nel caso di volo a quota costante, le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}\dot{V} = T - D - W \operatorname{sen}\gamma \\ -\dfrac{W}{g}\dot{\gamma} V = -L + W\cos\gamma \end{cases}$$

diventano

$$\begin{cases} T = D \qquad \Rightarrow \qquad T_d = T_n \\ L = W = \dfrac{1}{2}\varrho V^2 S C_L \end{cases}$$

Il nostro problema è quello di esprimere la spinta necessaria e soprattutto comprendere come essa vari in funzione della velocità di volo; ricordando l'espressione della polare parabolica, l'espressione della spinta necessaria diventa

$$T_n = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right)$$

ricavando il coefficiente di portanza dall'equazione di sostentamento e sostituendo si ha

[34] Esistono motori con postbruciatori, caratteristici dei velivoli militari, che sfruttano proprio il fatto che l'aria uscente dal motore abbia ancora un contenuto di ossigeno tale da realizzare un'ulteriore combustione, che viene effettuata in una regione opportuna a valle della turbina. Ciò permette di raddoppiare la spinta nelle fasi di volo critiche come il decollo, la salita e nella accelerazione da velocità subsoniche a velocità supersoniche. L'utilizzo del postbruciatore aumenta notevolmente i consumi, ad esempio per una spinta doppia otterremo un consumo quattro volte maggiore.

$$T_n = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2}\varrho V^2 S K \frac{W^2}{\left(\frac{1}{2}\varrho V^2 S\right)^2}$$

e semplificando

$$T_n = \left(\frac{1}{2}\varrho S C_{D0}\right) V^2 + \left(\frac{2KW^2}{\varrho S}\right)\frac{1}{V^2}$$

che possiamo anche scrivere come

$$T_n = A V^2 + \frac{B}{V^2}$$

con

$$A = \frac{1}{2}\varrho S C_{D0} \qquad\qquad B = \frac{2KW^2}{\varrho S}.$$

Prima di discutere l'espressione di T_n così trovata, la quale è indispensabile, citiamo solo il fatto che spesso T_n è espressa in relazione al peso

$$\frac{T_n}{W} = a V^2 + \frac{b}{V^2}$$

dove

$$a = \frac{1}{2}\frac{S}{W}\varrho C_{D0} \qquad\qquad b = \frac{2KW}{\varrho S}$$

e quindi nei coefficienti *a* e *b* appare esplicitamente il carico alare, che è un parametro caratteristico fondamentale del velivolo.

A parità di A e di B osserviamo che T_n risulterà dalla somma di due contributi: il primo è proporzionale a V^2 il secondo a V^{-2}.

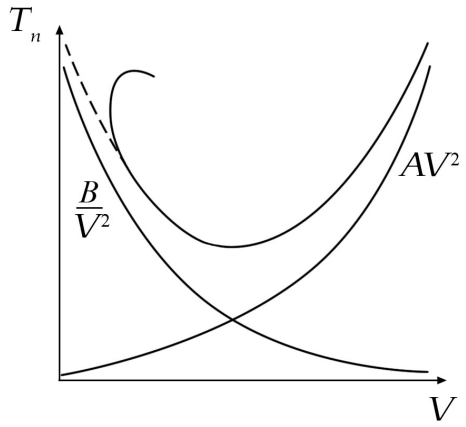


Figura 50

Osserviamo come, a basse velocità di volo, T_n risulti elevata, decresca all'aumentare di V sino ad un minimo che corrisponde alla situazione in cui il contributo dei due termini è il medesimo, ed infine all'aumentare della velocità di volo, la spinta necessaria aumenti di nuovo. Dal punto di vista fisico, l'andamento della T_n è spiegabile osservando i due termini della espressione; in particolare notiamo che la spinta necessaria altro non sia che una resistenza, quindi il ramo che aumenta in modo proporzionale a V^2 è dipendente dalla resistenza di attrito (quindi è legato al C_{D0}) , mentre il termine proporzionale ad $\frac{1}{V^2}$ è associato alla resistenza indotta.

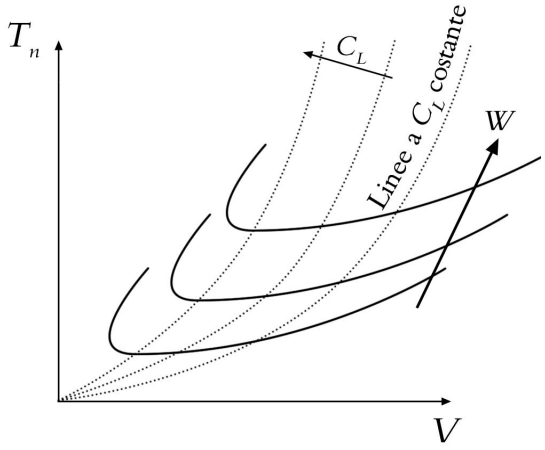


Figura 51

Alle basse velocità prevale l'effetto della resistenza indotta, la quale varia come C_L^2 (e quindi come W^2), mentre alle alte velocità la resistenza del velivolo è di fatto tutta resistenza di attrito[35]. Apparentemente dal grafico risulta che tanto più si riduce la velocità, tanto più aumenta la spinta necessaria; per velocità prossime a zero T_n tende ad infinito, ciò non rispecchia la reale evoluzione della spinta ed infatti abbiamo trascurato qualche informa-

[35] Alle alte velocità infatti il coefficiente di portanza è molto basso e di conseguenza è bassa la resistenza indotta.

zione che è relativa al comportamento del velivolo alle alte incidenze: la polare teorica, usata per costruire il grafico di figura 50, non tiene conto dell'esistenza di un valore massimo del coefficiente di portanza oltre il quale non è possibile andare. Stiamo parlando di ciò che accade quando la polare teorica si discosta da quella reale, cioè di quella zona in cui l'andamento del coefficiente di portanza in funzione dell'angolo d'attacco non è lineare. Questo, nella curva della spinta necessaria, si traduce con un caratteristico andamento "a ricciolo" in corrispondenza delle alte incidenze (analogamente a quanto accade sia per la polare che per la retta di portanza). Osserviamo come in tale regione, per un'assegnata velocità si abbiano due valori di T_n e questo corrisponde al fatto che sulla polare, per un certo valore di C_L abbiamo due valori del C_D.

Vediamo ora come varia la T_n con il peso del velivolo; consideriamo anzitutto $\alpha = \text{cost.}$. In questo caso la via più semplice da seguire è quella di utilizzare la relazione che proviene dall'equazione di equilibrio e che permette di esprimere la spinta come

$$\begin{cases} T = D \\ L = W \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{T}{W} = \frac{D}{L} = \frac{1}{E} \quad \Rightarrow \quad T_n = \frac{W}{E}$$

A parità di angolo d'attacco (e quindi di efficienza), tale relazione mostra che T_n è proporzionale al peso del velivolo. Per costruire tale grafico, dobbiamo tener presente la proporzionalità tra T_n e W lungo le curve a $C_L = \text{cost.}$[36], le quali sono delle parabole passanti per l'origine[37].

---

[36] Se il coefficiente di portanza è costante, è costante anche l'efficienza; dunque dalla $T_n = \frac{W}{E}$ scritta nei due punti generici A e B di una qualunque curva a $C_L = C_L' = \text{cost.}$ ricaviamo

$$\left(\frac{T_n}{W}\right)_A = \left(\frac{T_n}{W}\right)_B = \frac{1}{E'}$$

da cui si ottiene il grafico cercato.

[37] La $T_n = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D$, tenendo conto del fatto che il coefficiente di resistenza e la densità sono costanti (in quanto lo sono C_L ed h), rappresenta una parabola.

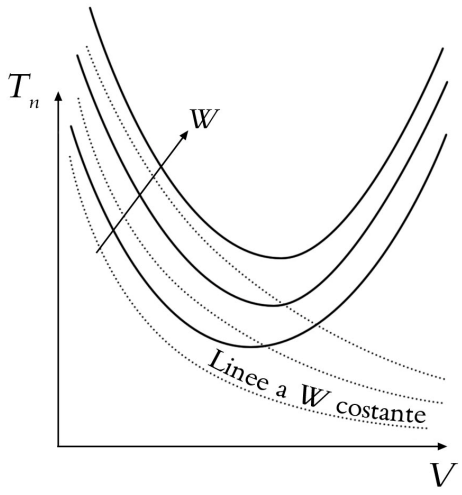


Figura 52

Possiamo fare lo stesso tipo di ragionamento utilizzando le curve a $V = \text{cost.}$. Ricordiamo che $T_n = A V^2 + \frac{B}{V^2}$, dove il coefficiente A non dipende dal peso, mentre B è proporzionale a W^2.

Il termine $A V^2$ non risente dunque della variazione del peso, mentre il termine $\frac{B}{V^2}$ è influenzato da una variazione di W (e questo è comprensibile, poiché è la resistenza indotta che dipende fortemente dal peso, varia come C_L^2 ossia come W^2). Il risultato sarà una variazione di T_n che, a parità di V, si manifesta molto più alle basse velocità rispetto che alle alte velocità.

Resta da determinare come si modifichi la curva della spinta necessaria quando gli ipersostentatori siano estesi; per capire come vadano le cose dobbiamo ricordare che l'estensione degli ipersostentatori (si veda § 2.21, figura 2.60) produce un aumento del $C_{L_{MAX}}$, ma anche un aumento del C_D e complessivamente una diminuzione dell'efficienza massima della configurazione. In termini della curva T_n / V, un aumentato valore del $C_{L_{MAX}}$ si traduce in minori velocità minime, cioè in più basse velocità di stallo (che nella configurazione a $\delta_F = 0$ indichiamo con V_S); l'altro effetto è un aumento della resistenza e quindi della spinta necessaria, perciò il risultato è il seguente:

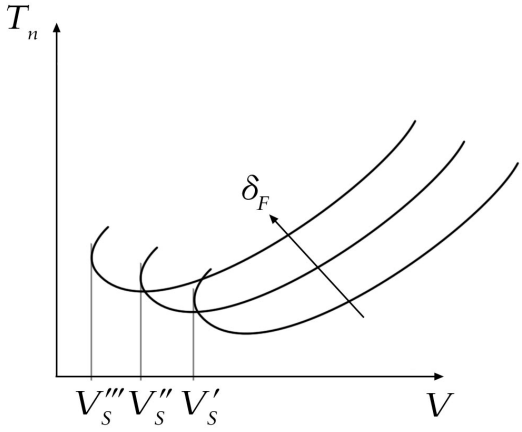


Figura 53

Ripetiamo le stesse considerazioni parlando della potenza necessaria Π_n (dal punto di vista concettuale non cambia quasi nulla). Per definizione abbiamo

$$\Pi_n = T_n V = DV = \frac{1}{2}\varrho V^3 S C_D = A V^3 + \frac{B}{V}$$

dove A e B rappresentano le stesse quantità definite prima. Anche in questo caso dunque dobbiamo considerare due rami

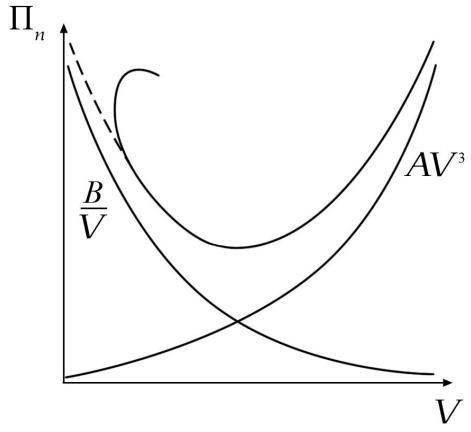


Figura 54

il primo ramo varia come $A V^3$ e rappresenta gli effetti legati alla resistenza d'attrito; l'altro ramo presenta una variazione iperbolica e dal punto di vista fisico rappresenta principalmente gli effetti legati alla resistenza indotta: il risultato è un andamento decrescente con V fino ad un valore minimo e poi un aumento piuttosto ripido con l'aumentare di V. Il grafico si completa con il tipico andamento "a ricciolo" che tiene conto dell'andamento della polare reale agli alti angoli di incidenza. Useremo spesso una rappresentazione della Π_n per unità di peso che, in modo del tutto analogo a quanto già visto per T_n, si scrive come

$$\frac{\Pi_n}{W} = a V^3 + \frac{b}{V}$$

dove a e b rappresentano le stesse quantità definite più sopra. Anche per la potenza necessaria analizziamo l'influenza del peso; per quanto riguarda l'effetto a V = cost. non c'è niente da aggiungere a quanto già esposto nel caso di T_n, poiché i coefficienti A e B sono gli stessi. Se invece consideriamo l'angolo d'attacco costante, ricordando che $T_n = \frac{W}{E}$, abbiamo

$$\Pi_n = T_n V = V \frac{W}{E}$$

dove

$$V = \sqrt{\frac{2\, W/S}{\varrho\, C_L}}$$

da cui si mette in evidenza che lungo le linee a C_L = cost.[38], la potenza necessaria risulta proporzionale a $W^{3/2}$. Dal punto di vista grafico si ottiene un andamento come in figura 55, dalla quale osserviamo come le variazioni a bassa velocità siano grandi, mentre ad alta velocità siano più piccole. Per quanto riguarda infine l'effetto della configurazione vale quanto detto a proposito della spinta necessaria: quando estendiamo gli ipersostentatori la parte delle curve relative alle basse velocità risulta deformata, mostrando un aumento della potenza necessaria ed una riduzione della velocità di stallo.

[38] Dalla definizione di potenza necessaria abbiamo

$$\Pi_n = T_n V = DV = \frac{1}{2} \varrho V^3 S C_D = K V^3$$

perciò le curve a C_L = cost. sono delle cubiche.

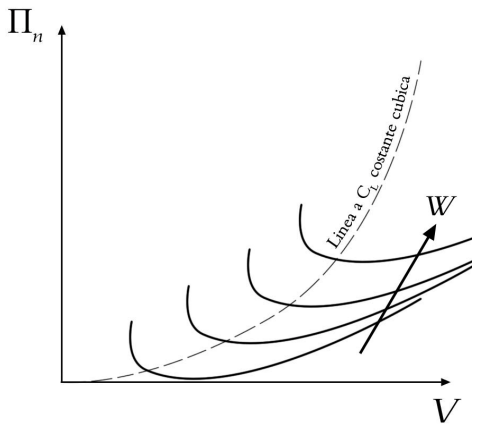


Figura 55

Capitolo 7

CARATTERISTICHE IN VOLO LIVELLATO DEL MOTOELICA

7.1 - INFLUENZA DELLA QUOTA DI VOLO SULLA POTENZA NECESSARIA

Prima di studiare le caratteristiche di volo a livello del motoelica, occorre discutere in modo più approfondito l'andamento di Π_n in funzione della velocità di volo. Infatti ciò che abbiamo illustrato in proposito della potenza necessaria nel § 6.16 riguarda condizioni di volo a livello del mare, perciò resta da determinare il comportamento di Π_n al variare della quota di volo. Partiamo dalla definizione di Π_n

$$\Pi_n = DV = \frac{1}{2}\varrho V^3 S C_D$$

e facciamo riferimento a condizioni di volo ad angolo d'attacco costante (e quindi $C_L = \text{cost.} \Rightarrow C_D = \text{cost.}$). Con tali ipotesi il rapporto tra potenza necessaria in quota e potenza necessaria al livello del mare è

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_{n_{LM}}} = \frac{\varrho V^3}{\varrho_{LM} V_{LM}^3}.$$

Tenendo presente che si fa riferimento a condizioni di volo sostentato, perciò la portanza, essendo costante il C_L, dovrà equilibrare il peso qualunque sia la quota, il che significa

$$L = W = \frac{1}{2}\varrho_{LM} V_{LM}^2 S C_L = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_L$$

da cui

$$\varrho_{LM} V_{LM}^2 = \varrho V^2$$

quindi, mantenendo costante α, per restare in condizioni di volo sostentato la pressione dinamica di volo deve rimanere costante

$$\frac{V}{V_{LM}} = \sqrt{\frac{\varrho_{LM}}{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

con $\delta = \dfrac{\varrho}{\varrho_{LM}}$. Sostituendo nella $\dfrac{\Pi_n}{\Pi_{n_{LM}}} = \dfrac{\varrho V^3}{\varrho_{LM} V_{LM}^3}$ otteniamo

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_{n_{LM}}} = \frac{\varrho V^2 V}{\varrho_{LM} V_{LM}^2 V_{LM}} = \frac{V}{V_{LM}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Quindi, per quanto riguarda l'effetto della quota sulla potenza necessaria, osserviamo come, mantenendo costante α, sia Π_n che V varino come $\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$. Questo rende particolarmente semplice disegnare sul grafico l'effetto della variazione della quota

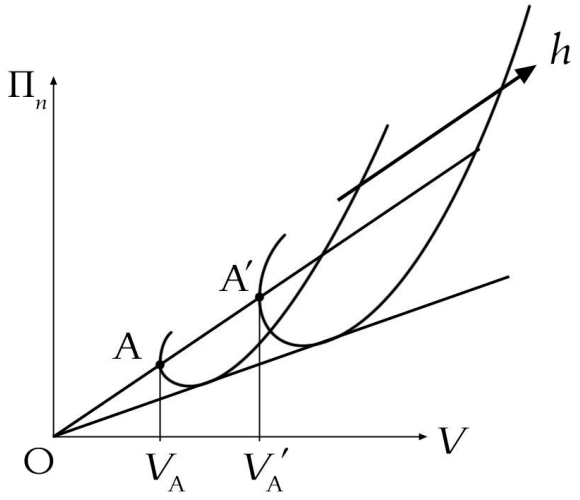


Figura 1

in questo caso si parla di trasformazione di similitudine che prende il nome di trasformazione omotetica con centro l'origine e di caratteristica $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Consideriamo per esempio il punto A, corrispondente ad un certo valore di α, sulla curva $(\Pi_n; V)_{LM}$: a tale punto è associato il punto A' che si trova sulla retta passante per l'origine e per A ed in particolare il segmento $\overline{OA'}$ è dato da

$$\overline{OA'} = \overline{OA}\frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

avendo indicato con V_A la velocità corrispondente al punto A e con V'_A la velocità corrispondente al punto A', abbiamo che

$$V'_A = V_A \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Risulta conveniente perciò ridisegnare il grafico in termini di $\Pi_n\sqrt{\delta}$ e di $V\sqrt{\delta}$.

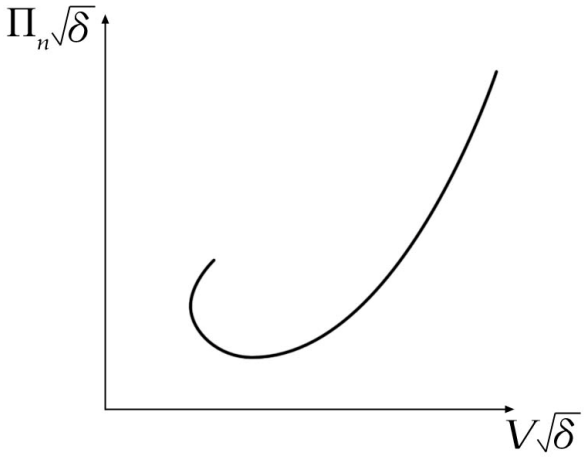


Figura 2

Se consideriamo $\Pi_n\sqrt{\delta}$ tale grandezza dipende esclusivamente dall'angolo d'attacco e non dalla quota e la stessa cosa vale per la velocità; abbiamo quindi un'unica curva rappresentativa della potenza necessaria al variare della quota.

Tale rappresentazione è utile perché $V\sqrt{\delta} = V_{EAS}$, quindi nota la V_{EAS} e la quota di volo, volendo conoscere la corrispondente Π_n, determiniamo sul grafico il valore di $\Pi_n\sqrt{\delta}$ e dunque di Π_n.

7.2 - VELOCITÀ CARATTERISTICHE

Torniamo a considerare un aeromobile al livello del mare e identifichiamo sul grafico alcune velocità caratteristiche (figura 3). La prima di queste è V_S, la velocità di stallo ovvero la velocità minima di volo sostentato (corrispondente al $C_{L_{max}}$).

Tracciando una tangente orizzontale possiamo identificare il valore minimo della Π_n e la velocità ad essa associata, che indichiamo con V_Π. Il valore dell'angolo d'attacco che corrisponde alla minima potenza necessaria è un valore particolare: dalla definizione di Π_n si ha infatti

$$(\Pi_n)_{min} = \left(\frac{WV}{E}\right)_{min}$$

ma essendo W costante si ha

$$(\Pi_n)_{min} = W\left(\frac{V}{E}\right)_{min} \qquad \Rightarrow \qquad W\left(\frac{1}{E\sqrt{C_L}}\right)_{min}$$

dunque la minima potenza necessaria nel volo rettilineo orizzontale si ottiene in corrispondenza del valore massimo di $E\sqrt{C_L}$, cioè dell'angolo d'attacco cui corrisponde il massimo indice di quota (si veda il § 5.2).

Tracciando ora una tangente per l'origine osserviamo che l'angolo sotteso dalla tangente è

$$\xi = \arctan\left(\frac{\Pi_n}{V}\right)_{min}$$

quindi nel punto P il rapporto tra potenza necessaria e velocità assume il suo valore minimo e tale rapporto, tenendo presente la $\Pi_n = T_n V = V\frac{W}{E}$ (si veda § 6.16), è proprio

$$\left(\frac{\Pi_n}{V}\right)_{min} = \left(\frac{W}{E}\right)_{min}$$

e quindi, considerando costante il peso del velivolo, l'angolo ξ (e dunque il punto P) corrisponde all'angolo d'attacco per il quale l'efficienza è massima. La velocità V_E corrispondente è quella di massima efficienza (già introdotta nel capitolo 5).

Riassumendo abbiamo tre velocità caratteristiche

$V_S = \sqrt{\dfrac{2W/S}{\varrho C_{L_{max}}}}$ velocità di stallo: minima velocità di volo sostentato

$V_\Pi = \sqrt{\dfrac{2W/S}{\varrho C_{L_\Pi}}}$ velocità di minima potenza necessaria: massimo indice di quota

$V_E = \sqrt{\dfrac{2W/S}{\varrho C_{L_E}}}$ velocità di massima efficienza

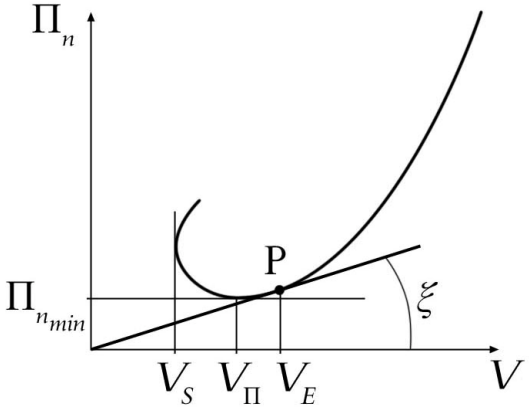


Figura 3

Un'ultima velocità caratteristica è la velocità massima; possiamo ottenere una prima stima di tale velocità partendo dall'equazione di bilancio energetico per il volo a velocità e quota costanti

$$\frac{\Delta \Pi}{W} = 0$$

da cui

$$\Pi_d = \Pi_n = \frac{1}{2}\varrho V^3 S C_D \approx \frac{1}{2}\varrho V^3 S C_{D_0}$$

avendo tenuto presente che quando $V = V_{max}$ si ha che $C_L \approx 0$ e quindi $C_D \approx C_{D_0}$; tuttavia il coefficiente di portanza, per quanto piccolo, non può mai annullarsi poiché l'equazione di sostentamento del velivolo deve essere sempre verificata. Sotto tali ipotesi abbiamo

$$V_{max} \approx \sqrt[3]{\frac{2\Pi_n/S}{\varrho C_{D_0}}}.$$

È utile identificare sulla polare i punti corrispondenti alle velocità ora introdotte (figura 4): la V_S corrisponde al $C_{L_{max}}$; la V_Π si può determinare per via grafica sulla polare ricordando (vedi § 5.2) che $\overline{O'A} = \frac{3}{2}\overline{OA}$; la V_E è identificata tracciando la tangente per l'origine alla polare; la V_{max} infine è molto prossima al C_{D_0}.

Ricordiamo che la velocità massima è stata calcolata con una formula approssimata non soltanto per i motivi detti, ma anche perché non abbiamo tenuto conto degli effetti del numero di Mach che, soprattutto per un velivolo ad elica, cominciano a non potersi più trascurare a $M = 0{,}4 \div 0{,}5$.

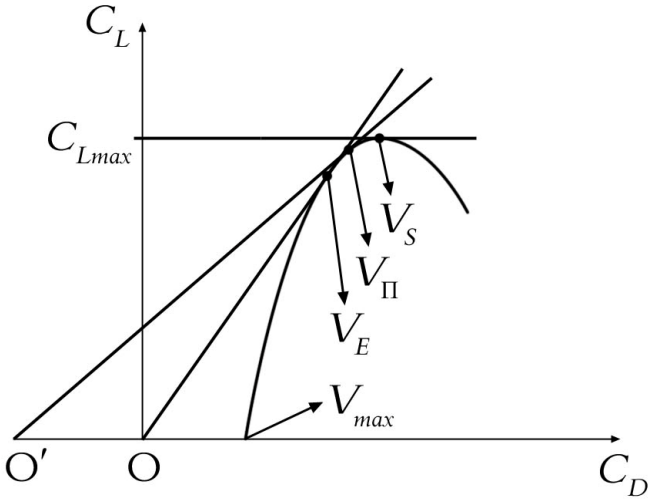


Figura 4

Se vogliamo tener conto degli effetti della compressibilità dovremmo considerare una polare funzione del numero di Mach, ma ciò porterebbe ad avere una famiglia di curve Π_n / V parametrizzate col numero di Mach, con complicazioni notevoli. Nel limite del possibile dunque si preferisce introdurre un fattore di correzione alla equazione di V_{max}: in condizioni di volo a livello si deve avere

$$\Pi_d = \Pi_n = \frac{1}{2}\varrho V_{inc}^3 S C_{D_{inc}} \approx \frac{1}{2}\varrho V_{com}^3 S C_{D_{com}}$$

da cui

$$V_{com} = V_{inc}\sqrt[3]{\frac{C_{D_{inc}}}{C_{D_{com}}}} \qquad \text{con } V_{com} < V_{inc}.$$

Quindi stimiamo una maggiorazione del coefficiente di resistenza legata agli effetti del numero di Mach e correggiamo opportunamente, in base a tale relazione, le velocità che abbiamo calcolato. Sempre nell'ambito di studi di prima approssimazione, possiamo ottenere una stima di tale correzione mediante grafici del tipo in figura.

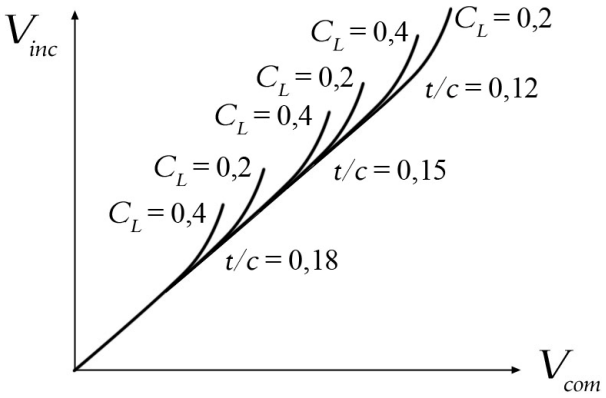


Figura 5

Osserviamo come in questo caso, note le velocità approssimate o comunque in campo incompressibile, ottenute con una polare indipendente dal numero di Mach, e conoscendo il rapporto degli spessori massimi dell'ala (c/t) e sul valore del C_L corrispondente a quel valore di velocità, grafici di questo tipo ci aiutano a trovare rapidamente la corrispondente velocità che tiene conto degli effetti della compressibilità. Notiamo come tanto maggiore è lo spessore e tanto maggiore è il C_L e tanto prima si faranno sentire tali effetti.

7.3 - STABILITÀ PROPULSIVA

Ricordiamo che l'equazione di bilancio energetico per il volo a livello

$$\Pi_d = \Pi_n$$

costituisce la relazione fondamentale per lo studio delle prestazioni del motoelica a quota e velocità costanti. Dal punto di vista grafico abbiamo a disposizione la curva della potenza disponibile, la quale per motoelica a giri costanti si mantiene costante al variare della velocità di volo (vedi § 6.11).

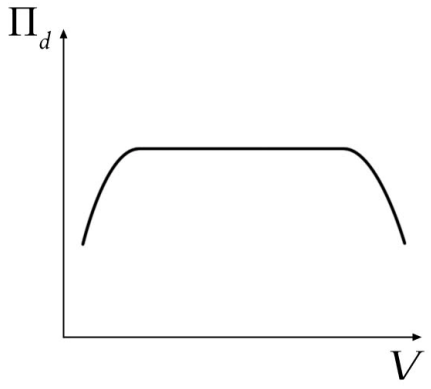


Figura 6

Abbiamo poi la curva della spinta disponibile nel caso del motoelica, definita come Π_d / V: tenendo conto che Π_d è costante per buona parte della velocità di volo (si veda figura 6), tale relazione somiglierà ad un'iperbole.

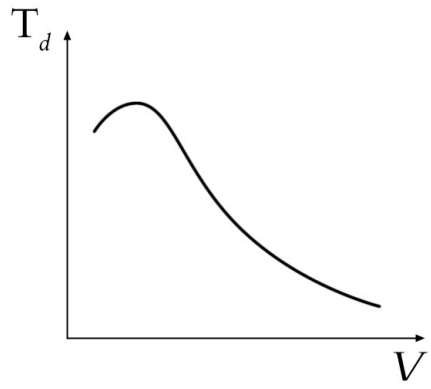


Figura 7

Infine abbiamo la curva Π_n-V.

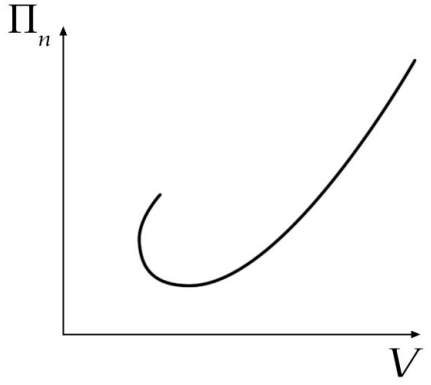


Figura 8

Determiniamo le condizioni di volo (ed in particolare le velocità di volo) livellato dapprima per via analitica. Partendo dalla $\Pi_d = \Pi_n$, dividendo per il peso[1], abbiamo

$$\frac{\Pi_d}{W} = \frac{\Pi_n}{W} = a\,V^3 + \frac{b}{V}$$

e quindi

$$V^4 - \frac{\Pi_d}{Wa}\,V + \frac{b}{a} = 0$$

questa equazione, una volta determinatene le soluzioni reali, permette di individuare le velocità di volo a livello del motoelica; i coefficienti sono tutti noti avendo assegnato le caratteristiche del velivolo e la polare.

È molto più utile però determinare una soluzione grafica del problema, che si ottiene tracciando sullo stesso grafico sia Π_d che Π_n (si veda figura 9); le intersezioni tra le due curve rappresentano condizioni di volo a quota e velocità costanti. Se per esempio vogliamo volare a livello e con velocità (costante) V_A, dobbiamo agire sulla manetta: teniamo presente che la curva più in alto corrisponde al valore massimo del grado di ammissione (valvola a farfalla tutta aperta), mentre diminuendo l'ammissione, o comunque riducendo il valore di δ_T, la curva della potenza disponibile si abbassa; arriveremo così ad un valore di δ_T tale che la curva intersechi quella della potenza necessaria nel punto corrispondente alla velocità V_A.

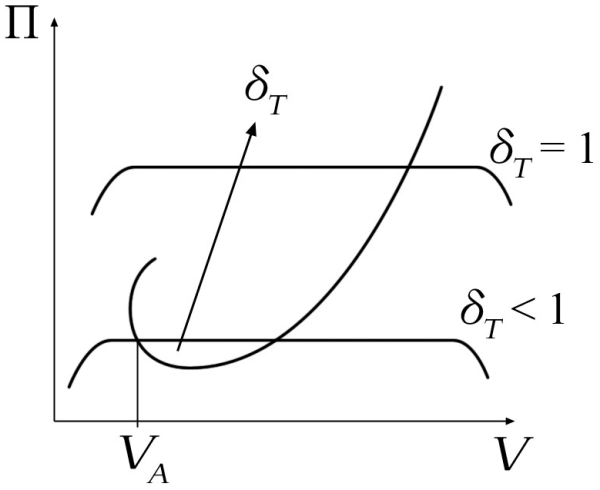


Figura 9

[1] In genere viene assegnato il rapporto potenza/peso e non semplicemente la potenza.

Tale grafico mette in evidenza che in gran parte delle situazioni, per lo meno finché non arriviamo a velocità troppo elevate, l'equazione di equilibrio $\Pi_d = \Pi_n$ ammette due soluzioni e quindi per una buona parte delle possibili velocità di volo abbiamo due intersezioni, una corrispondente ad una velocità V_1 più elevata ed una corrispondente ad una velocità V_2 minore.

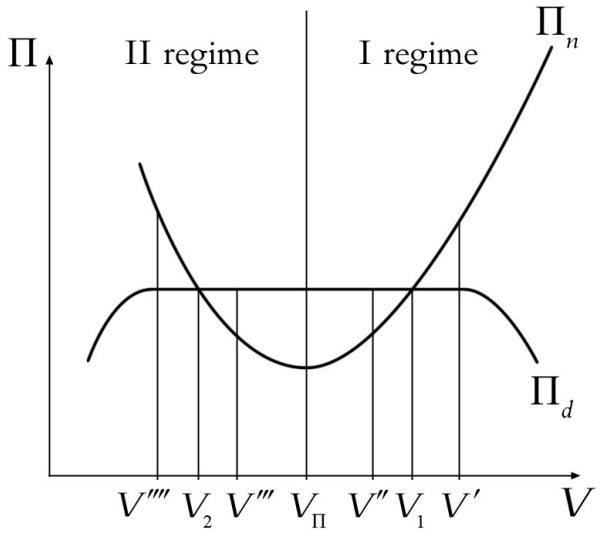


Figura 10

L'aspetto fondamentale del discorso è che con lo stesso valore di potenza erogata possiamo volare a due distinte velocità: la V_2 ad un valore elevato del C_L e la V_1 ad un valore più basso del C_L; osserviamo ancora come la velocità di minima potenza necessaria definisca due regioni separate: per $V < V_\Pi$ la Π_n diminuisce all'aumentare della velocità, mentre per $V > V_\Pi$ la Π_n aumenta all'aumentare della velocità; tali due regioni hanno notevoli implicazioni per ciò che riguarda il pilotaggio del velivolo come vedremo più avanti; in particolare per $V > V_\Pi$ l'aeromobile si trova nel cosiddetto I regime, detto anche regime delle alte velocità, mentre per $V < V_\Pi$ siamo nel II regime, detto delle basse velocità. Il comportamento del velivolo, in termini di velocità, presenta delle marcate differenze a seconda che ci si trovi nel I o nel II regime. Infatti, in volo livellato uniforme nel primo regime, nella condizione di equilibrio alla velocità V_1, allorché si presenti una perturbazione ΔV positiva che acceleri l'aeroplano alla velocità V', questo non sarà più in equilibrio, essendo $\Pi_n > \Pi_d$ (è come dire che a quella velocità la resistenza è maggiore della spinta) e se il pilota opera opportunamente sui comandi in modo che si mantenga costante la quota, il velivolo tenderà spontaneamente a ridurre la velocità ed a riportarsi alla velocità di equilibrio V_1. Lo stesso discorso vale per un ΔV negativo: in questo caso la velocità passa da V_1 a $V'' < V_1$, in corrispondenza della quale $\Pi_n < \Pi_d$, e perciò se il pilota mantiene la quota, l'apparecchio tende ad accelerare poiché la spinta sarà maggiore della resistenza e quindi ritorna nella condizione

di equilibrio iniziale. Questo fatto porta a concludere che nel I regime ci troviamo in una situazione di stabilità (in termini di velocità) e si parla perciò di *stabilità propulsiva positiva*.

Nel II regime invece l'andamento è opposto: in questo caso, partendo dalla velocità di equilibrio V_2, consideriamo un ΔV positivo che porti ad una $V''' > V_2$: notiamo che in corrispondenza di V''' si ha $\Pi_n < \Pi_d$ e la conseguenza è che, se il pilota mantiene la quota di volo, il velivolo accelera (la spinta è maggiore della resistenza) fino alla velocità V_1 e cioè sino alla condizione di equilibrio stabile del I regime. Nel secondo regime ci troviamo dunque in una condizione di instabilità propulsiva e ciò è molto pericoloso nel caso in cui il ΔV sia negativo: se infatti la velocità si riduce a $V'''' < V_2$ allora $\Pi_n > \Pi_d$ e dunque, se il pilota mantiene la quota, il velivolo tende a ridurre ulteriormente la velocità e la conseguenza ultima è lo stallo.

Parlando dei valori caratteristici di α ricordiamo che la V_Π, che definisce il punto di separazione tra il I ed il II regime, non è molto superiore a V_S (ricordiamo che il C_L cui corrisponde il massimo indice di quota non è molto più piccolo del $C_{L_{max}}$)

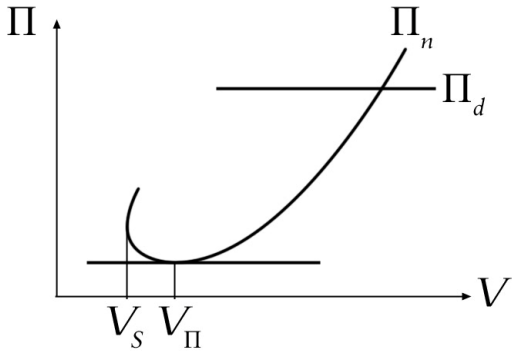


Figura 11

come conseguenza, nel caso del motoelica, non saranno molte le situazioni in cui avremo due velocità di volo a livello, dato che le velocità del secondo regime corrispondono ad un intervallo molto ridotto, e questo è un vantaggio.

7.4 - CARATTERISTICHE DI VOLO IN FUNZIONE DELLA QUOTA: QUOTA DI TANGENZA

Per analizzare l'influenza della quota è conveniente utilizzare la rappresentazione vista alla fine del § 1, in cui la Π_n viene moltiplicata per $\sqrt{\delta}$ e rappresentata in termini di V_{EAS}

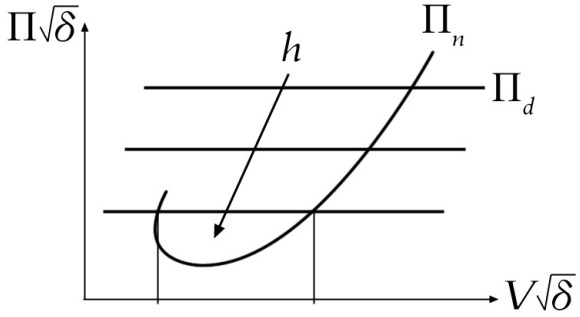


Figura 12

ricordiamo che il vantaggio risiede nel fatto che con un'unica curva rappresentiamo in termini di tali variabili, i valori di Π_n alle diverse quote. Se vogliamo studiare le condizioni di volo a livello dobbiamo riportare sullo stesso grafico la grandezza $\Pi_d\sqrt{\delta}$, ricordando che in genere $\Pi_d = \Pi_d(h)$, a differenza di quanto accada per $\Pi_n\sqrt{\delta}$, che dipende esclusivamente dall'angolo d'attacco. Il risultato è che avremo una famiglia di curve[2], ciascuna relativa ad una quota di volo, che si abbassano all'aumentare della quota. Perciò all'aumentare della quota di volo la velocità massima a livello diminuisce e dal momento in cui abbiamo delle intersezioni anche nel ramo del II regime la velocità minima a livello aumenta. Continuando ad aumentare la quota, la differenza tra la V_{min} e la V_{max} diminuisce fino ad arrivare ad una situazione in cui la curva relativa alla potenza disponibile risulti tangente alla curva relativa alla potenza necessaria: la quota h_t (alcuni testi riportano h_c da *ceiling*, tangenza, ma che si confonde con l'altezza cinetica) per la quale esiste una sola velocità di equilibrio, è detta quota di *tangenza teorica* e rappresenta la massima altezza alla quale l'aeromobile potrebbe volare in condizioni di equilibrio, ovverosia a velocità e quota costanti.

Osserviamo come a quota maggiore di h_c non troviamo più intersezioni con la curva relativa alla potenza necessaria e quindi non abbiamo più condizioni di volo di equilibrio[3].

[2] Avendo fatto l'ipotesi che la potenza disponibile si mantenga costante al variare della velocità, possiamo immaginare che tali curve siano rappresentate, per un intervallo abbastanza esteso della velocità di volo, da rette.

[3] Ciò non significa che la quota di tangenza teorica non possa essere superata: se ad esempio un apparecchio si trova a volare ad una certa velocità poco al di sotto di h_t ed effettua una manovra di richiamata, la sua l'energia cinetica viene convertita in energia potenziale; in questo modo l'aereo arriva in un punto in cui la velocità è nulla ad una quota sicuramente maggiore di quella di tangenza, ma non più in equilibrio.

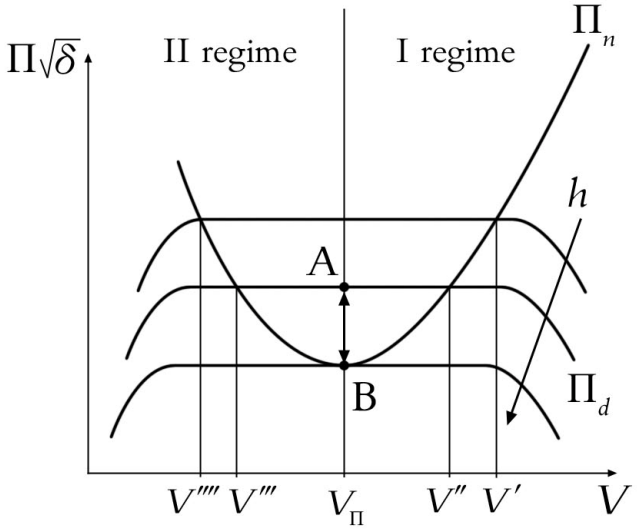


Figura 13

La quota di tangenza teorica è raggiungibile in un tempo molto lungo: ricordiamo infatti l'equazione di bilancio energetico, scritta con riferimento a condizioni di volo a velocità costante

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d(h_c + h)}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

dove ricordiamo che $\frac{dh}{dt}$ è la velocità ascensionale; supponiamo dunque di trovarci alla velocità V_Π: il $\frac{\Delta\Pi}{W}$ è proporzionale alla distanza $\overline{AB}$ (si veda figura 13), ma è anche proporzionale alla velocità ascensionale del velivolo stesso. Osserviamo come l'aumento della quota $\frac{\Delta\Pi}{W}$ diminuisca e quindi diminuisca anche la velocità ascensionale; quindi, facendo tendere la quota ad h_t, il termine $\frac{\Delta\Pi}{W}$ (e dunque anche la velocità ascensionale) tenderà a zero, perciò tanto più ci avviciniamo alla quota di tangenza teorica, tanto più bassa sarà la velocità ascensionale, finché, alla quota h_t, la velocità ascensionale diverrà nulla. In conclusione la quota di tangenza così definita rappresenta un parametro teorico, poiché è raggiungibile in un tempo troppo grande.

Nei manuali di volo troviamo, proprio per questo motivo, anche l'indicazione della quota di *tangenza pratica*, che è quella che corrisponde ad un valore piccolo, ma diverso da zero, di $\frac{\Delta\Pi}{W}$; la quota di tangenza pratica può quindi essere effettivamente raggiunta dal velivolo in un tempo ragionevole. Il valore di velocità ascensionale nella definizione di quota di tangenza pratica viene assegnato in base al tipo di velivolo; per molti aerei la quota di

tangenza pratica è quella quota in cui il velivolo può realizzare al massimo una velocità verticale di salita di 100 ft al minuto (0,5 m/s), quindi una velocità di salita piccola ma diversa da zero

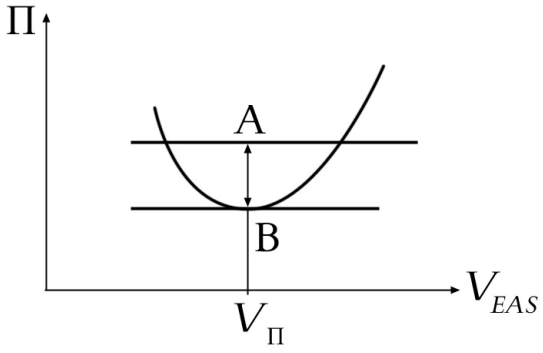


Figura 14

Un'altra informazione utile che viene fornita da questi grafici è che la condizione di tangenza (sia pratica che teorica) si raggiunge volando alla V_Π, ossia all'incidenza di massimo indice di quota. Per determinare h_t basterà ricordare che a tale quota deve comunque sussistere l'equilibrio $\Pi_n = \Pi_d$ alla velocità V_Π; dalle condizioni di equilibrio si ha

$$\Pi_d = \Pi_n = \frac{W}{E_\Pi} V_\Pi .$$

Ricordiamo poi che possiamo esprimere la variazione di Π_d con la quota (nel caso di un motore aspirato, quindi senza alcun tipo di compressore) come

$$\frac{\Pi_d}{\Pi_{d_{LM}}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{LM}} \right)^x \approx \delta$$

dove per semplicità abbiamo posto $x \approx 1$.
Esprimiamo inoltre la V_Π mettendo in evidenza la dipendenza dalla quota

$$V_\Pi = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho_{LM} C_{L_\Pi}}} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = V_{\Pi_{LM}} \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

abbiamo poi scritto che $\Pi_d = \Pi_{d_{LM}} \delta$ da cui in termini di potenza all'albero

$$\Pi_d = \eta_P \Pi_{a_{LM}} \delta$$

sostituendo tali espressioni nella $\Pi_d = \frac{W}{E_\Pi} V_\Pi$ otteniamo

$$\eta_P \Pi_{a_{LM}} \delta_t = \frac{W}{E_\Pi} \frac{V_{\Pi_{LM}}}{\sqrt{\delta_t}}$$

con $\delta_t = \delta(h_t)$. Teniamo presente che l'incognita è δ_t, determinata la quale, consultando le tabelle dell'aria tipo, ricaviamo la quota corrispondente. Esplicitando rispetto a δ_t otteniamo

$$\delta_t^{3/2} = \frac{W}{\Pi_{a_{LM}}} \frac{1}{\eta_P E_\Pi} \sqrt{\frac{2\, W/S}{\varrho_{LM} C_{L_\Pi}}}$$

tanto maggiore è il rapporto potenza/peso (parametro caratteristico di progetto di un velivolo ad elica) e tanto maggiore sarà la quota di tangenza (ricordiamo che δ decresce all'aumentare della quota); c'è poi da rilevare un effetto dei parametri aerodinamici rappresentato dall'indice di quota (ed in effetti se ci troviamo alla quota di tangenza, stiamo volando al valore massimo dell'indice di quota); osserviamo come vi sia una dipendenza dal carico alare: tanto maggiore è W/S e tanto minore sarà la quota di tangenza.

Nel caso dei motori turbocompressi queste considerazioni non cambiano molto in quanto dobbiamo solo tener presente il fatto che la potenza erogata è costante sino alla quota di ristabilimento e poi, a partire da tale quota, la variazione della potenza è proporzionale al rapporto delle densità; dobbiamo tener conto perciò che fino alla quota di ristabilimento la potenza è costante ($\Pi_d(0 < h < h_r) = \Pi_{d_{LM}}$), mentre per $h > h_r$ (con h_r quota di ristabilimento), abbiamo che

$$\Pi_d = \Pi_d(h_r) \frac{\varrho}{\varrho(h_r)} = \Pi_{d_{LM}} \frac{\varrho}{\varrho_r}$$

quindi dobbiamo anzitutto verificare se la quota di tangenza si trovi al di sotto oppure al di sopra della quota di ristabilimento (in genere è al di sopra, ciò si verifica eseguendo delle prove), per poter utilizzare nella $\Pi_d = \frac{W}{E_\Pi} V_\Pi$ la formula opportuna.

7.5 - AUTONOMIA CHILOMETRICA ED ORARIA

Un'altra caratteristica fondamentale del volo livellato riguarda i consumi ed in particolare l'autonomia; distinguiamo due tipi di autonomie, quella chilometrica definita come lo spazio che può essere percorso con una certa quantità di combustibile, e quella oraria definita come il tempo di volo per un'assegnata quantità di combustibile. Cominciamo a parlare di autonomia chilometrica introducendo due equazioni: la prima è la relazione cinematica che, per volo a quota costante, è

$$\frac{dx}{dt} = V$$

la seconda relazione invece consegue dalla definizione di consumo specifico[4]

$$C_S \Pi_a = -\frac{dW}{dt} \equiv \left| \frac{dW}{dt} \right|$$

dove il segno meno è dovuto al fato che il peso del velivolo decresce per effetto del consumo di combustibile. Possiamo riscrivere la precedente come

$$C_S \Pi_a = C_S \frac{\Pi_d}{\eta_P} = C_S \frac{\Pi_n}{\eta_P} = C_S \frac{WV}{\eta_P E} = -\frac{dW}{dt}$$

che, tenendo presente la relazione cinematica, diventa

$$V dt = dx = -\frac{\eta_P E}{C_S} \frac{dW}{W}.$$

Questa è l'equazione fondamentale che permette lo studio dell'autonomia chilometrica; osserviamo che in tale equazione compaiono dei termini che consideriamo sempre costanti[5] e che un termine dipende dal peso.

Nello studio delle autonomie si considerano sempre tre programmi di volo:

1) C_L = cost. h = cost. $V \downarrow$
2) C_L = cost. V = cost. $h \uparrow$
3) V = cost. h = cost. $C_L \downarrow$

[4] Il consumo specifico è definito come la quantità in peso di combustibile consumato per unità di tempo e per unità di potenza erogata dal motore, si veda § 6.13.

[5] È plausibile valutare costante il rendimento, soprattutto perché consideriamo motori ad elica a passo variabile; valutare il consumo specifico costante è invece un'ipotesi che si adotta per non complicare la trattazione.

Tenendo presente che

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}$$

e che durante la crociera il peso decresce, è immediato comprendere che nel primo programma, dovendo mantenere costanti C_L ed h, durante la crociera la velocità decresca; che nel secondo programma, dovendo mantenere C_L e V costanti, la quota aumenti; che infine nel terzo programma di volo, dovendo mantenere costanti V ed h, vari il C_L.

Il terzo programma è in genere l'unico programma ammesso dal controllo del traffico aereo, il quale non autorizza, se non per voli transcontinentali, variazioni di quota e di velocità da parte del velivolo.

Non resta che integrare l'equazione differenziale $dx = -\frac{\eta_P E}{C_S}\frac{dW}{W}$ per calcolare l'autonomia chilometrica con riferimento a questi tre programmi:

1° PROGRAMMA: nell'ambito delle nostre ipotesi η_P e C_S restano costanti; inoltre, dato che in questo caso il C_L è costante, anche E è costante, quindi

$$x_1 = -\frac{\eta_P}{C_S} E \int_{W_i}^{W_f} \frac{1}{W} dW$$

da cui

$$x_1 = \frac{\eta_P}{C_S} E \ln \frac{W_i}{W_f}.$$

Conviene scrivere tale relazione facendo comparire il peso del combustibile consumato

$$W_f = W_i - W_c$$

da cui

$$x_1 = \frac{\eta_P}{C_S} E \ln \frac{1}{1 - \frac{W_c}{W_i}}.$$

Se vogliamo massimizzare l'autonomia chilometrica nel primo programma dobbiamo volare alla massima efficienza aerodinamica (come avviene tipicamente nella crociera di un motoelica). Osserviamo inoltre come, nell'ambito delle ipotesi fatte, tale relazione non dipenda dalla quota; è però vantaggioso volare a quota elevata poiché, al di là di problemi relativi alla sicurezza di un volo a bassa quota, la densità a quote elevate è minore, perciò la velocità di volo è maggiore; questo comporta tempi di volo più bassi e quindi costi di esercizio (piloti ed equipaggio) più bassi. Quindi, anche se la quota non influenza direttamente l'autonomia chilometrica, si tende sempre ad effettuare la crociera a quote elevate.

2° PROGRAMMA: nel secondo programma voliamo mantenendo costante C_L e V; poiché non compare la velocità nella $dx = -\frac{\eta_P E}{C_S}\frac{dW}{W}$, abbiamo che

$$x_2 = x_1$$

ovverosia l'autonomia è la stessa. Osserviamo come, sempre che si possa effettuare una crociera nel secondo programma, ossia che si possa avere durante la crociera una variazione di quota, tale programma presenti un guadagno rispetto al primo: nel primo programma infatti dobbiamo ridurre la velocità per tener conto della riduzione di peso; nel secondo programma invece voliamo a velocità costante e perciò, pur salendo di quota, impieghiamo meno tempo a compiere la crociera. Quindi a parità di autonomia è preferibile il secondo programma. L'unica formula che esprime l'autonomia chilometrica nei programmi uno e due prende il nome di *formula di Breguet*.

3° PROGRAMMA: in questo caso il C_L non è costante e quindi non è costante l'efficienza, perciò

$$x_3 = -\frac{\eta_P}{C_S}\int_{W_i}^{W_f}\frac{E}{W}\,dW$$

non si arriva ad una soluzione in forma chiusa di tale integrale, per questo motivo viene posto nella forma

$$x_3 = -\frac{\eta_P}{C_S}\int_{W_i}^{W_f}\frac{1}{D}\,dW$$

conviene cioè introdurre la resistenza, che nella condizione di equilibrio è proprio pari a W/E, perché facendo qualche passaggio si può esprimere D come

$$D = c\left(1 + a\,W^2\right)$$

dove *c* ed *a* sono coefficienti costanti; e dunque l'integrale diventa

$$x_3 = -\frac{\eta_P}{C_S}\int_{W_i}^{W_f}\frac{1}{c\left(1 + a\,W^2\right)}\,dW$$

il quale fornisce

$$x_3 = -\frac{\eta_P}{C_S}\frac{1}{c\sqrt{a}}\arctan\left(\sqrt{a}W\right)\Big|_{W_i}^{W_f}.$$

Prima di procedere allo studio delle autonomie orarie risolviamo, per via grafica, un problema abbastanza importante: la variazione delle autonomie chilometriche in presenza di vento. Teniamo presente che, in gran parte delle situazioni, il volo in crociera non avviene in aria calma, ma in presenza di correnti atmosferiche; andremo a considerare il caso di venti a favore oppure venti contrari, ma sempre diretti secondo l'asse longitudinale del velivolo. Ripartiamo dalla definizione di consumo specifico

$$C_S\Pi_a = C_S\frac{\Pi_n}{\eta_P} = -\frac{dW}{dt}$$

moltiplicando e dividendo per la velocità di volo il terzo termine e tenendo presente che $V = \frac{dx}{dt}$, otteniamo

$$\frac{dx}{dW} = -\frac{\eta_P V}{C_S\Pi_n}$$

tale parametro prende il nome di *autonomia specifica* (distanza percorsa per unità di combustibile utilizzato). In genere interessa considerare la situazione in cui l'autonomia specifica sia massima, il che significa

$$\left(\frac{V}{\Pi_n}\right)_{max} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Pi_n}{V}\right)_{min}.$$

Disegniamo quindi la curva $\Pi_n; V$ (vedi figura 15) e identifichiamo per via grafica l'incidenza di massima autonomia specifica: tracciamo la tangente per l'origine alla nostra curva e la velocità corrispondente al punto di tangenza è proprio la velocità di massima efficienza (quindi ritroviamo quanto visto prima per via analitica).

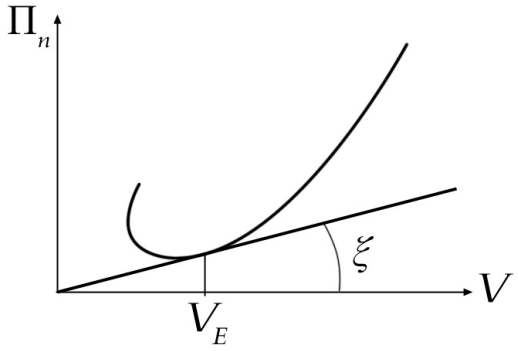


Figura 15

Questo tipo di approccio fornisce una soluzione interessante anche nel caso di crociera in presenza di vento. In presenza di vento, infatti, dobbiamo valutare l'autonomia in termini di spazio percorso rispetto al suolo, perciò il *dx* sarà

$$dx_G = V_G dt$$

dove

$$V_G = V + u_G$$

con u_G velocità orizzontale del vento, positiva se a favore (cioè proveniente da coda). Ripartiamo dalla $C_S \Pi_a = -\frac{dW}{dt}$ che riscriviamo come

$$C_S \frac{\Pi_n}{\eta_P} \frac{V_G}{V_G} = -\frac{dW}{dt}$$

la quale, tenuto conto che $dx_G = V_G dt$, diventa

$$C_S \frac{\Pi_n}{\eta_P V_G} \frac{dx_G}{dt} = -\frac{dW}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_G}{dW} = -\frac{\eta_P}{C_S} \frac{V_G}{\Pi_n} = -\frac{\eta_P}{C_S} \frac{1}{\left(\frac{\Pi_n}{V_G}\right)}$$

quindi si ha che

$$\left(\frac{dx_G}{dW}\right)_{max} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\Pi_n}{V_G}\right)_{min}.$$

Il problema è dunque quello di determinare il valore di α che renda massima l'autonoma specifica in presenza di vento. Teniamo presente che tale valore non sarà uguale a quello che avevamo trovato in assenza di vento. Supponiamo di volare ancora alla massima efficienza e vediamo prima cosa succede se il vento proviene dalla coda: in questo caso impiegheremo meno tempo per arrivare a destinazione e quindi si riduce anche il consumo. Può essere però conveniente, e tipicamente lo è, volare ad una V un po' più bassa di quella in assenza di vento, perché con vento a favore si impiega meno tempo a compiere la crociera e volando a velocità più basse si riduce la potenza impegnata e quindi si consuma meno. Tracciamo nuovamente il diagramma Π_n-V e riportiamo sull'asse delle ascisse, a sinistra dell'origine O, la velocità u_G ($O' = -u_G$):

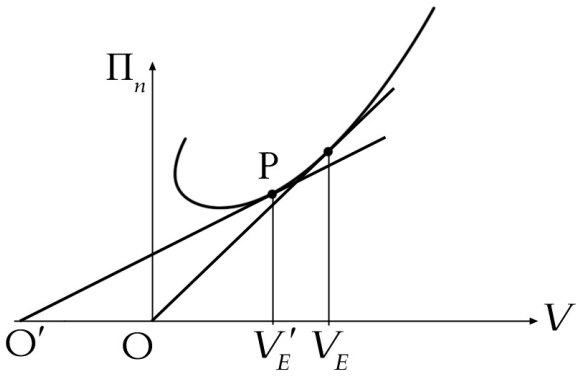


Figura 16

per identificare l'incidenza alla quale corrisponde la massima autonomia specifica deve essere soddisfatta la condizione $\left(\frac{\Pi_n}{V_G}\right)_{min}$; tracciamo perciò dall'origine O' la tangente alla curva e otteniamo il punto P, per il quale l'angolo

$$\xi = \arctan\frac{\Pi_n}{V_G}$$

è minimo. Osserviamo come rispetto al caso in assenza di vento, la velocità di massima efficienza sia effettivamente diminuita. Passiamo ora ad esaminare il caso di vento contrario; se voliamo alla massima efficienza impieghiamo un tempo superiore a quello in assenza di vento. Se perciò aumentiamo la velocità di volo rispetto all'aria, consumiamo di più perché aumenta la potenza erogata dal motore, ma riduciamo il tempo necessario a percorrere la

tratta e quindi globalmente consumiamo meno. Tale discorso sul grafico Π_n-V si traduce di nuovo traslando l'origine nel punto O″ di una distanza pari alla velocità u_G del vento dritto di prua e tracciando ancora la tangente alla curva che identifica il punto Q a cui corrisponde una velocità rispetto all'aria $V_a > V_E$.

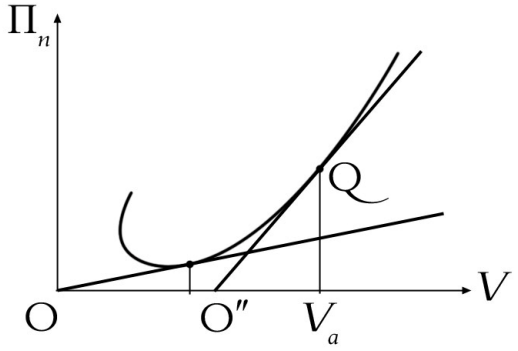


Figura 17

Occupiamoci adesso dell'autonomia oraria, che interessa soprattutto certi tipi di velivoli, come ad esempio velivoli ad elica adibiti alla sorveglianza del territorio, o velivoli antisommergibili, i quali devono rimanere in volo per tempi molto lunghi. L'espressione generale per il calcolo dell'autonomia oraria la ricaviamo di nuovo dalla definizione di consumo specifico

$$C_S = -\frac{dW/dt}{\Pi_a} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{C_S}{\eta_P}\frac{W}{E}V = -\frac{dW}{dt}$$

da cui

$$dt = -\frac{E\eta_P}{C_S}\frac{1}{WV}dW$$

Per integrare tale espressione facciamo riferimento al 1° programma di volo poiché è quello che fornisce il maggior valore dell'autonomia oraria. Sviluppando l'espressione della velocità di volo (che nel 1° programma varia) e raggruppando opportunamente i termini, otteniamo

$$\int_0^t dt = -\frac{E\eta_P}{C_S}\int_{W_i}^{W_f}\frac{1}{W\sqrt{\frac{2W/S}{\varrho C_L}}}dW = -\frac{E\eta_P}{C_S}\sqrt{C_L\frac{\varrho S}{2}}\int_{W_i}^{W_f}\frac{1}{W^{\frac{3}{2}}}dW$$

ossia

$$t = 2\frac{E\eta_P}{C_S}\sqrt{C_L\frac{\varrho S}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{W_f}} - \frac{1}{\sqrt{W_i}}\right)$$

da cui, tenuto conto che $W_f = W_i - W_c$, si ha

$$t = 2\frac{\eta_P}{C_S}E\sqrt{C_L}\sqrt{\frac{\varrho}{2\dfrac{W_i}{S}}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{W_c}{W_i}}} - 1\right).$$

Tale espressione contiene tanti elementi utili: per massimizzare il tempo di volo dobbiamo volare ad un angolo d'attacco che massimizzi l'indice di quota $E\sqrt{C_L}$, perciò ad un'incidenza piuttosto elevata (prossima a quella di stallo); ci troviamo pertanto nella condizione di stabilità propulsiva neutra, poiché siamo proprio alla velocità V_Π: di solito si preferisce volare ad una velocità poco maggiore di V_Π cosicché ci si trovi nel I regime. Osserviamo poi una dipendenza dalla quota (attraverso ϱ): per un'autonomia oraria elevata si deve volare a bassa quota; anche questo però implica una condizione di volo non ottimale, perché, per massimizzare *t*, dovremmo avere anche un carico alare il più basso possibile e ciò ha un effetto (lo vedremo più avanti) sulla sensibilità del velivolo alle perturbazioni atmosferiche, le quali sono più intense proprio a bassa quota.

7.6 - PRESTAZIONI IN VOLO ACCELERATO A QUOTA COSTANTE

Lo studio delle condizioni di volo nelle quali il velivolo accelera o decelera viene di solito fatto nell'ipotesi di quota costante; in questo caso l'equazione di bilancio energetico assume la forma

$$\frac{dh_c}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

dove h_c è l'altezza cinetica (o altezza di arresto, si veda § 4.11), definita come

$$h_c = \frac{V^2}{2g}$$

e rappresenta dunque l'energia cinetica associata all'aereo. Nel caso di volo a quota costante, la prima espressione mostra che eventuali variazioni di velocità saranno legate ad un eccesso di potenza specifica diverso da zero (positivo o negativo). Nell'ambito dello studio di fasi di volo a velocità non costante è interessante determinare quanto tempo impieghi il velivolo ad esempio per passare da una certa velocità iniziale ad una certa velocità finale, oppure quanto combustibile viene consumato in tali fasi di volo. Per risolvere questi problemi abbiamo a disposizione le prime due equazioni che possiamo scrivere come

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{2g}\right) = \frac{V}{g}\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}.$$

Se il problema è quello di determinare il tempo impiegato a passare da una velocità ad un'altra, possiamo assumere che

$$\Delta t = \frac{1}{g}\int_{V_i}^{V_f} V\frac{W}{\Delta\Pi}dV.$$

Per quanto riguarda invece il calcolo del combustibile consumato nelle fasi di volo a velocità non costante, partiamo ancora dalla prima equazione, che però riscriviamo come

$$\frac{dh_c}{dW_c}\frac{dW_c}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

dove il termine

$$w_c = \frac{dW_c}{dt}$$

prende il nome di *consumo orario di combustibile* (chili di combustibile nell'unità di tempo) ed è un parametro caratteristico funzione del consumo specifico ($w_c = C_S\Pi_a$). Sostituendo nella $\frac{dh_c}{dW_c}\frac{dW_c}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$ ed integrando otteniamo

$$\Delta W_c = \frac{1}{g}\int_{V_i}^{V_f} w_c V\frac{W}{\Delta\Pi}dV.$$

Capitolo 8

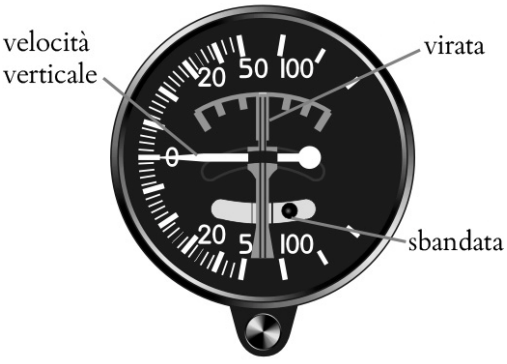
CARATERISTICHE DI VOLO IN SALITA DEL MOTOELICA

8.1 - APPROCCIO GRAFICO: VELOCITÀ DI SALITA RIPIDA E VELOCITÀ DI SALITA RAPIDA

Per un motoelica è del tutto legittimo trattare le fasi di volo in salita come fasi di volo a velocità costante. Tale ipotesi è utile perché semplifica notevolmente la trattazione di tali condizioni di volo, permettendoci di utilizzare l'equazione di bilancio energetico nella forma

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\left(h_c + h\right)}{dt} \equiv \frac{dh}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}.$$

Come vedremo invece nel caso del motore a getto l'ipotesi che la velocità si mantenga costante è assai meno accettabile.



Virosbandometro

Nella espressione appena riportata il termine $\frac{dh}{dt}$ rappresenta proprio la velocità ascensionale detta *velocità variometrica* del velivolo e spesso viene indicata con *RC*, acronimo di *rate of climb* (rapporto di salita[1]). La velocità variometrica, misurata dal variometro (a fianco è riportato un virosbandometro che misura anche la velocità di virata e di sbandata), è una delle più importanti caratteristiche di salita del velivolo. Ricordiamo che per definizione

[1] In taluni testi è riportata l'errata traduzione *rateo*, che in italiano ha il solo significato di *registro contabile delle rate*, privo perciò di qualsiasi senso logico nel presente contesto. Il termine *rate*, in inglese, ha vari significati, quello corretto in questo caso è *rapporto*.

$$\frac{dh}{dt} = V \operatorname{sen} \gamma = RC$$

e questo ci permette di introdurre l'altro parametro fondamentale nello studio dei regimi di salita che è l'angolo della traiettoria o *gradiente di salita*

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{V}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{V}\frac{\Pi_d - \Pi_n}{W}.$$

Anche nello studio del volo in salita utilizzeremo sia un approccio grafico che un approccio analitico; prima tuttavia discutiamo l'equazione di bilancio energetico che riscriviamo come

$$RC = \frac{\Pi_d - \Pi_n}{W} = V \operatorname{sen} \gamma .$$

Da questa relazione ricaviamo immediatamente che per realizzare una traiettoria di salita e quindi per avere una velocità variometrica diversa da zero, dobbiamo volare in condizioni in cui $\Pi_d > \Pi_n$ cioè con un eccesso di potenza. A questo punto però dobbiamo cercare di capire se quanto diffusamente detto nei capitoli precedenti su potenza disponibile e potenza necessaria sia ancora valido nello studio dei regimi di volo in salita; per quanto riguarda Π_d le ipotesi fatte restano valide perché la potenza disponibile è un parametro che dipende esclusivamente dal motore e dunque non è influenzato dal fatto che l'aereo si trovi in volo livellato o meno; per quanto riguarda invece Π_n le cose cambiano notevolmente: ricordiamo infatti che, per lo meno nello studio delle prestazioni, si devono soddisfare sia l'equazione di bilancio energetico che l'equazione di sostentamento. Quest'ultima si modifica

$$W \cos \gamma = L \qquad \Rightarrow \qquad W \cos \gamma = \frac{1}{2}\varrho S V^2 C_L$$

dalla quale, come sempre, ricaviamo

$$V = \sqrt{\frac{2\, W/S}{\varrho C_L} \cos \gamma} = V_0 \sqrt{\cos \gamma}$$

dove $V_0 = V(\gamma = 0)$; sostituendo tale espressione nella definizione di potenza necessaria otteniamo

$$\begin{cases} T = D \\ VT = \Pi_n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Pi_n = \frac{1}{2}\varrho V_0^3 S C_D \left(\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}} = \Pi_{n_0}\left(\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}$$

dove $\Pi_{n_0} = \Pi_n\left(\gamma = 0\right)$. La conclusione è che la potenza necessaria risulta influenzata dalle condizioni di volo in salita poiché dipende, a parità di angolo d'attacco, dall'angolo di rampa. Questo, per noi che cerchiamo delle soluzioni nella forma più semplice possibile, non è affatto comodo: ai diagrammi che abbiamo tracciato finora, dovremmo infatti sostituire famiglie di curve aventi γ come parametro. Si preferisce quindi continuare a lavorare esattamente come fatto sinora, tenendo conto che nelle condizioni di volo in salita per velivoli convenzionali, l'angolo di rampa si mantiene su valori piccoli (10° - 15°) e perciò nell'ambito di questo tipo di situazioni (valide sicuramente per velivoli ad elica e turboventola convenzionali) possiamo ragionevolmente assumere $\Pi_n \approx \Pi_{n_0}$. Se accettiamo tale ipotesi siamo in grado di determinare RC confrontando Π_d e Π_n per unità di peso (si veda l'espressione di RC) e siamo in grado di determinare γ confrontando Π_d e Π_n per unità di peso e di velocità.

Procediamo anzitutto con un'analisi di tipo grafico che ci permetta di mettere in evidenza alcune grandezze fondamentali; abbiamo a disposizione i diagrammi Π_d-V e Π_n-V, dal cui confronto possiamo determinare anzitutto la variazione della velocità di salita con la velocità di volo (figura 1a).

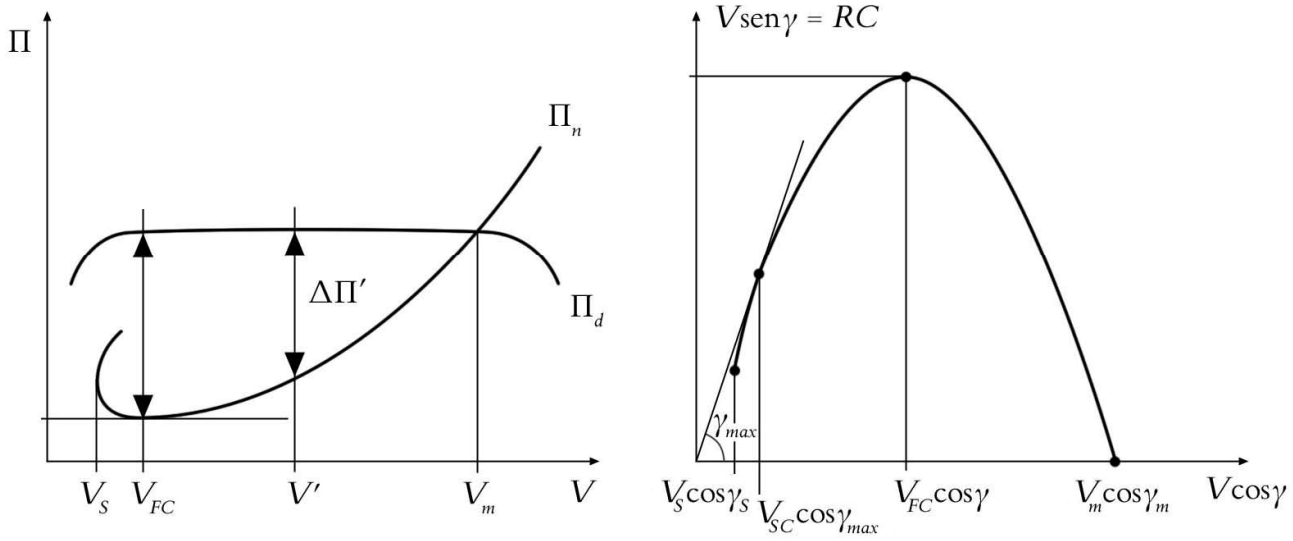


Figura 1

Possiamo poi tracciare un secondo grafico (figura 1b) sul quale riportiamo in ascissa $V\cos\gamma$ (velocità orizzontale) ed in ordinata $V\,\text{sen}\,\gamma = RC$. Per costruire tale grafico consi-

deriamo una certa velocità di volo V, in corrispondenza della quale determiniamo la differenza tra Π_d e Π_n che indichiamo con $\Delta\Pi'$, e dividendo per il peso otteniamo

$$RC' = \frac{\Delta\Pi'}{W}$$

dividendo tale quantità per la velocità V' otteniamo poi

$$\operatorname{sen}\gamma' = \frac{1}{V'}\frac{\Delta\Pi'}{W}$$

dalla quale ricaviamo γ', cioè l'angolo di rampa corrispondente a quella condizione di volo, e, dato che V' è nota, ricaviamo anche $V'\cos\gamma$. Ripetendo tale procedura per tutti i valori di velocità corrispondenti a valori positivi di $\Delta\Pi$ (cioè da V_S a V_m) otteniamo il grafico cercato. Tale curva fornisce molte informazioni: anzitutto ricaviamo il valore della massima velocità variometrica che possiamo realizzare con il velivolo ad una certa quota[2], ed in corrispondenza di tale valore possiamo determinare la velocità V_{FC} che prende il nome di *velocità di salita rapida* (il pedice *FC* è l'acronimo di *fastest climb*, salita più veloce) e che fornisce il valore della velocità orizzontale[3] lungo la traiettoria cui corrisponde RC_{max}.

Tracciando la tangente per l'origine, si identifica il massimo valore dell'angolo di rampa realizzabile dal velivolo a quella determinata quota e la velocità lungo la traiettoria con cui si realizza γ_{max}: indichiamo tale velocità con V_{SC}, che prende il nome di *velocità di salita ripida* (il pedice *SC* è l'acronimo di *steepest climb*, salita più ripida). Possiamo riconoscere in V_{FC} una velocità ed un angolo d'attacco caratteristici che già conosciamo: osserviamo infatti che la velocità di salita rapida è quella per cui è massimo l'eccesso di potenza specifica e quindi corrisponde alla velocità di minima potenza necessaria, la quale, nel caso del motoelica a giri costanti, corrisponde all'angolo d'attacco di massimo indice di quota.

8.2 - INFLUENZA DELLA VARIAZIONE DI QUOTA

L'analisi finora condotta non può essere esaustiva poiché realizzata ad una determinata quota; cerchiamo di capire quale sia l'influenza della variazione di quota nei regimi di salita.

---

[2] Ricordiamo che tale grafico è costruito per una certo valore fissato della quota.

[3] In realtà bisognerebbe moltiplicarla per $\cos\gamma$ per ottenere effettivamente la velocità orizzontale, ma siccome l'angolo di rampa è piccolo, possiamo approssimare $\cos\gamma \approx 1$.

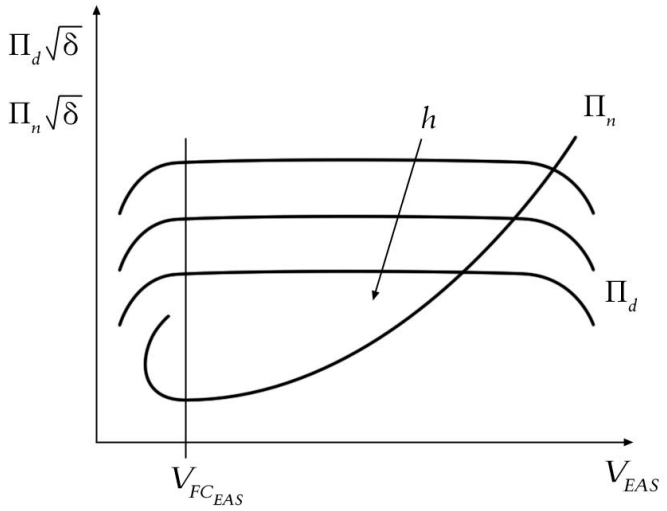


Figura 2

Dal grafico di figura 2 si evidenzia che la salita rapida del motoelica avviene a velocità equivalente costante

$$V_{FC_{EAS}} = \text{cost.}$$

Nello studio dei regimi di salita è utile determinare il tempo necessario a raggiungere un certo livello di quota a partire da un certo livello iniziale. Il metodo di soluzione è sempre lo stesso: si parte dall'equazione di bilancio energetico, da cui

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta t = \int_{h_i}^{h_f} \frac{W}{\Delta\Pi} dh \,.$$

Ricordiamo che l'eccesso di potenza è una funzione nota di V ed h, ed in base a quanto abbiamo detto sino a questo punto a proposito di queste due grandezze, si ha

$$\Delta\Pi = \Delta\Pi\left(V; h; \delta_T\right)$$

inoltre quando si studiano tali situazioni, viene dato per scontato che sia noto δ_T.

Un altro problema molto importante, nello studio di una missione tipica, riguarda la determinazione dei consumi durante la salita: anche in questo caso si introduce un consumo orario di combustibile

$$\frac{dh}{dW_c} w_c = \frac{\Delta\Pi}{W}$$

da cui

$$\Delta W_c = \int_{h_i}^{h_f} w_c \frac{W}{\Delta \Pi} dh .$$

Un problema interessante è la determinazione della cosiddetta legge di salita, cioè della relazione h - V, che soddisfi certi requisiti; si può per esempio pensare di determinare, quota per quota, la velocità lungo la traiettoria cui corrisponde il minimo consumo (molto importante nel trasporto aereo): se il pilota conosce la relazione h - V che corrisponde al minimo consumo, avrà un'informazione utile per la gestione del velivolo. Il modo più semplice di affrontare tale problema è per via grafica: quota per quota possiamo tracciare l'andamento della funzione

$$\frac{1}{w_c} \frac{\Delta \Pi}{W}$$

in funzione della velocità di volo e supponiamo che tale andamento presenti un massimo.

Questo ci permette di definire una terza velocità caratteristica che prende il nome di *velocità di minimo consumo* e che, nel caso del motoelica, si colloca molto prossima alla V_{FC}.

Per quanto riguarda invece la soluzione analitica dei problemi relativi ai regimi di salita, le cose restano comunque immediate; problemi tipici sono quelli della determinazione di V_{FC} e V_{SC}.

Determiniamo dapprima la velocità di salita rapida. Ricordiamo che V_{FC} corrisponde al valore massimo della velocità di salita e sappiamo che quando dobbiamo ricavare valori massimi o minimi, per risolvere analiticamente il problema non facciamo altro che imporre una condizione differenziale; in questo caso dalla definizione di RC si ottiene il massimo quando

$$\frac{d}{dV}(RC) = \frac{d}{dV}\left(\frac{\Delta \Pi}{W}\right) = 0$$

da cui, tenendo conto dell'espressione (ricavata nel § 6.16) $\frac{\Pi_n}{W} = a V^3 + \frac{b}{V}$, otteniamo

$$\frac{d}{dV}\left(\frac{\Pi_d}{W} - a V^3 - \frac{b}{V}\right) = 0$$

ricordiamo però che nel caso del motoelica a giri costanti siamo sempre nell'ipotesi che la potenza disponibile sia costante al variare della velocità, perciò la precedente diventa

$$-3a\,V_{FC}^2 + \frac{b}{V_{FC}^2} = 0$$

dove abbiamo esplicitamente messo in evidenza il fatto che la velocità che ricaviamo da tale relazione è proprio la velocità di salita rapida. Esplicitando la precedente otteniamo

$$V_{FC}^4 = \frac{b}{3a}$$

e ricordando l'espressione dei coefficienti a e b vista nel § 6.16, abbiamo

$$V_{FC}^4 = \frac{4\left(\frac{W}{S}\right)^2}{3\varrho^2\left(\frac{C_{D_0}}{K}\right)}$$

tenuto conto però che (vedi § 5.2)

$$C_{L_{\Pi}} = \sqrt{3\frac{C_{D_0}}{K}}$$

si ha

$$V_{FC} = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_{L_{\Pi}}}}$$

che è esattamente il risultato ottenuto con l'approccio grafico: la velocità di salita rapida corrisponde alla velocità di minima potenza necessaria.

Ripetiamo ora lo stesso procedimento per la V_{SC} e scopriamo come l'approccio analitico in questo caso non sia molto utile (o almeno non lo è in genere); dobbiamo massimizzare il gradiente di salita, perciò la condizione differenziale è

$$\operatorname{sen}\gamma_{max} = \frac{d}{dV}\left(\frac{\Delta\Pi}{WV}\right) = 0$$

ossia

$$\frac{d}{dV}\left(\frac{\Pi_d}{WV} - a V^2 - \frac{b}{V^2}\right) = 0$$

da cui, ricordando la definizione di potenza disponibile, abbiamo

$$\eta_P\left(\frac{\Pi_a}{W}\right)\frac{1}{V_{SC}^2} + 2a V_{SC} - 2\frac{b}{V_{SC}^3} = 0$$

avendo anche in questo caso messo in evidenza che la velocità che si ricava è quella di salita ripida. Abbiamo quindi

$$V_{SC}^4 + \frac{\eta_P}{2a}\left(\frac{\Pi_a}{W}\right)V_{SC} - \frac{b}{a} = 0\,.$$

In genere però si ottiene un valore che non ha alcun interesse pratico perché quando risolviamo questi problemi utilizzando una formula analitica della polare (la cui influenza è dovuta ai coefficienti *a* e *b*), manca l'informazione relativa al $C_{L_{max}}$. Non abbiamo quindi particolari problemi fintanto che non arriviamo a velocità nell'intorno della velocità di stallo; teniamo però presente che siamo nell'ipotesi che la potenza disponibile sia costante al variare della velocità, perciò la spinta disponibile, definita come

$$T_d = \frac{\Pi_d}{V}$$

tende all'infinito quando la velocità diminuisce: il risultato è che la V_{SC}, calcolata risolvendo l'equazione trovata, quasi certamente risulta minore della V_S. L'informazione interessante è che la salita ripida del motoelica a giri costanti avviene sempre a velocità molto basse che tipicamente si collocano in corrispondenza della velocità di stallo. Per avere un ordine di grandezza, con riferimento a bimotori ad elica, l'angolo di rampa massimo è 15° e si ottiene praticamente alla velocità di stallo; la velocità variometrica massima si colloca in genere intorno ai 2˙000 ft/min (questi sono valori a livello del mare; se saliamo di quota tali prestazioni peggiorano).

8.3 - INVILUPPO DI VOLO

Le caratteristiche del velivolo vengono riportate nei manuali di volo sotto forma di grafici, i quali riassumono quanto detto nei §§ precedenti. Un primo grafico è detto *invi-*

luppo di volo e rappresenta, al variare della quota, le velocità massime e minime di volo a livello e viene determinato attraverso l'intersezione tra le curve Π_d - V e Π_n - V. Parliamo prima della velocità minima:

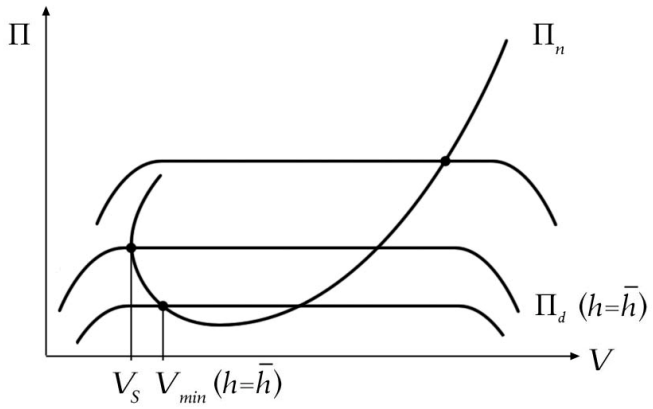


Figura 3

a quote non elevate la velocità minima di volo di un motoelica è proprio la velocità di stallo. Osserviamo infatti che (e certamente questo accade alle basse quote) la Π_d supera Π_n alla V_S quindi la V_{min} sarà determinata da elementi aerodinamici come per esempio $C_{L_{max}}$; se riduciamo l'ammissione possiamo volare alla V_S perché abbiamo la Π_d sufficiente per farlo. Quindi la velocità minima di un motoelica, per lo meno sino ad una certa quota, sarà la V_S e varierà perciò al variare della quota secondo la relazione

$$V_S = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_{L_{max}}}}$$

Arriveremo però ad una certa quota in cui la Π_d massima (cioè per $\delta_T = 1$) non è sufficiente per volare alla velocità di stallo e quindi abbiamo una $V_{min} > V_S$. Al di sopra di tale quota il limite sulla velocità minima non è più di tipo aerodinamico, ma è di tipo propulsivo e questo fa sì che la V_{min} al di sopra di questa quota aumenti abbastanza rapidamente.

Per quanto riguarda invece la velocità massima di volo a livello ricordiamo che una relazione approssimata è

$$V_{max} = \sqrt[3]{\frac{2\,\Pi_d/S}{\varrho C_{D_0}}}\,.$$

Consideriamo il caso più frequente, per lo meno per aerei di una certa dimensione, con ristabilimento in quota, quindi motori con compressori ed in particolare con turbocompressori; ciò fa sì che la Π_d si mantenga costante fino alla quota di ristabilimento; quindi aumentando la quota, la velocità massima aumenta poiché ϱ diminuisce. Al di sopra di h_r la Π_d decresce più della densità

$$\frac{\Pi_d}{\Pi_{d_{LM}}} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_{LM}} \right)^x \qquad \text{con } x \approx 1,2 \qquad h > h_r$$

quindi la V_{max} diminuisce, e tale diminuzione è tanto più accentuata quanto maggiore è la quota di volo perché interviene un altro effetto: supponiamo che la velocità non decresca all'aumentare di h; diminuendo la densità però, affinché valga l'equazione di sostentamento, dobbiamo aumentare il C_L, quindi oltre all'effetto propulsivo interviene un effetto aerodinamico, salendo di quota dunque, con in più una velocità che decresce per ragioni propulsive, il C_L deve aumentare in maniera consistente per soddisfare l'equazione di sostentamento, perciò non possiamo più fare l'approssimazione $C_D = C_{D_0}$; quindi nella espressione di V_{max} al posto di C_{D_0} dobbiamo usare C_D, il quale aumenta man mano che saliamo di quota proprio perché aumenta la resistenza indotta. Il risultato finale è in figura 4.

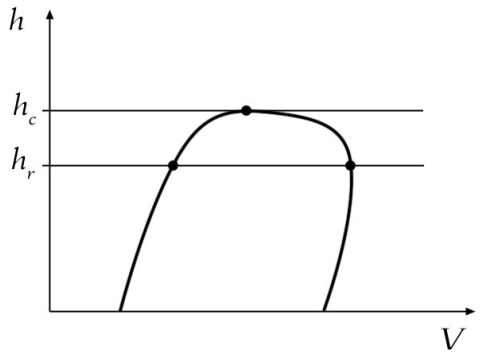


Figura 4

L'inviluppo di volo è un diagramma fondamentale delle prestazioni di un velivolo perché identifica una zona all'interno della quale possiamo volare a quota e velocità costanti, agendo opportunamente sulla manetta. La quota massima alla quale possiamo volare in queste condizioni (volo a livello e velocità costante) è la quota di tangenza teorica. Tale diagramma viene arricchito con ulteriori informazioni relative alle caratteristiche di salita dell'aereo; in particolare possiamo riportare l'andamento della V_{FC} al variare di h ed osserviamo come, dovendo essere costante la $V_{FC_{EAS}}$, la V_{FC} aumenta all'aumentare di h. Un'ultima informazione utile è l'andamento di RC_{max} al variare di h.

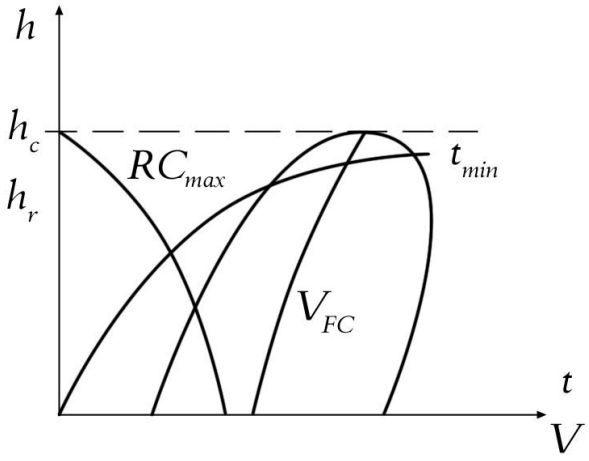
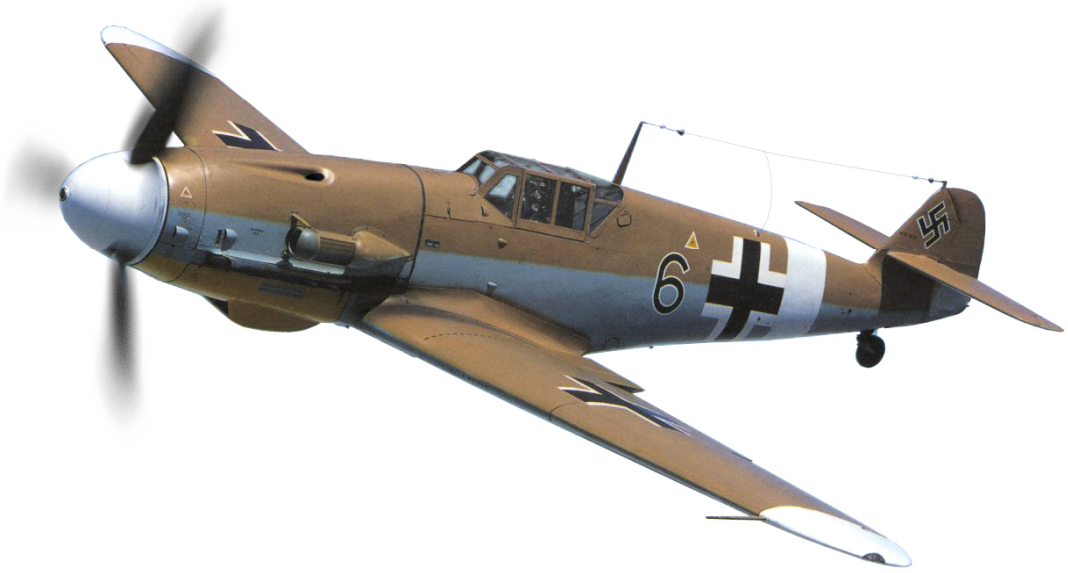


Figura 5

Talvolta tale diagramma viene completato aggiungendo in ascissa una scala dei tempi in modo che venga riportato il tempo minimo di salita ad una certa quota: vediamo come, per quanto detto, tale curva mostra un andamento asintotico rispetto ad h_c.

Un diagramma di questo tipo, che contiene l'inviluppo di volo, prende il nome di diagramma riassuntivo delle caratteristiche di volo del velivolo.



Capitolo 9

CARATTERISTICHE DI VOLO LIVELLATO DEL MOTORE A GETTO

9.1 - SPINTA NECESSARIA DEI VELIVOLI PROPULSI DA MOTORI A GETTO: EFFETTO DEL NUMERO DI MACH ED EFFETTO DELLA QUOTA

In questo capitolo iniziamo l'analisi delle caratteristiche di volo degli aeromobili a getto. Per far questo compiremo gli stessi passi fatti nel caso del motoelica, cominciando col approfondire il discorso riguardo alla spinta necessaria[1], prima per il velivolo supersonico e poi per il velivolo subsonico; metteremo quindi in evidenza alcune velocità caratteristiche e poi, confrontando tra loro spinta disponibile e spinta necessaria, studieremo le caratteristiche di volo.

Cominciamo ad occuparci della spinta necessaria per un velivolo supersonico: sappiamo come un'espressione analitica soddisfacente per la polare sia

$$C_D = C_{D_0}(M) + K(M)C_L^2$$

nella quale esprimiamo la dipendenza dal numero di Mach mediante i coefficienti della polare stessa; ciò consente di conservare una relazione di tipo parabolico tra C_D e C_L. Tale approssimazione è sufficiente per esprimere la T_n in volo supersonico: per definizione di T_n abbiamo

$$T_n = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\left(C_{D_0} + KC_L^2\right).$$

Anche in questo caso vale l'equazione di sostentamento $L = W$, la quale ci consente di esprimere il C_L come

[1] Ricordiamo che le caratteristiche del propulsore nel caso di un getto si esprimono in termini di spinta.

$$C_L = \frac{2\,W/S}{\varrho V^2}$$

e visto che compare una dipendenza dal numero di Mach, possiamo scrivere la velocità come

$$V^2 = M^2 a^2 = M^2 \gamma \frac{P}{\varrho}$$

dove $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$. Sostituendo nella espressione di T_n otteniamo

$$T_n = \frac{1}{2} M^2 \gamma P S \left[C_{D_0} + K \left(\frac{2\,W/S}{M^2 \gamma P} \right)^2 \right].$$

Per semplificare le cose facciamo comparire alcune grandezze adimensionali; in particolare definiamo una spinta necessaria non dimensionale come

$$\tau_n = \frac{2T_n}{\gamma P S}$$

ed un carico alare non dimensionale come

$$\omega = \frac{2W}{\gamma P S}.$$

In termini di grandezze non dimensionali[2], la precedente espressione di T_n diventa

$$\tau_n = M^2 \left[C_{D_0}(M) + K(M) \frac{\omega^2}{M^4} \right].$$

[2] Molto spesso τ_n ed ω vengono definite come

$$\tau_n = \frac{T_n}{\sigma} \qquad \omega = \frac{W}{\sigma} \qquad \text{con } \sigma = \frac{P}{P_{LM}}$$

nelle quali rispetto alle definizioni corrette del gruppo non dimensionale, sono state eliminate le grandezze costanti.

Osserviamo come dal punto di vista funzionale $\tau_n = \tau_n(M;\omega)$ cioè una relazione fra tre sole grandezze. Volendo costruire una rappresentazione grafica, possiamo tracciare la funzione che lega τ_n al numero di Mach, per certi valori assegnati di ω (che dunque in tali curve è parametro), ottenendo una curva il cui andamento è più o meno il seguente.

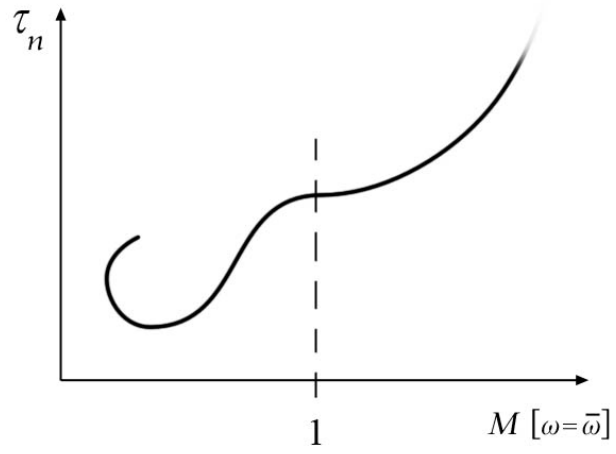


Figura 1

Alle basse velocità l'andamento è analogo a quello osservato a proposito del motoelica, quella specie di "ricciolo" perciò rappresenta le condizioni di volo al di sopra dell'incidenza critica; abbiamo poi un minimo per la spinta necessaria, mentre osserviamo che all'aumentare del numero di Mach e fino a $M \approx 1$, la τ_n subisce un incremento notevole. Per capire tale comportamento dobbiamo osservare l'espressione di τ_n; in tale relazione abbiamo che il quadrato del numero di Mach moltiplica due termini tra parentesi quadre: il secondo termine, rappresentativo della resistenza indotta, ha a denominatore M^4 e quindi avrà sempre meno importanza all'aumentare del numero di Mach, mentre risulterà sempre più predominante il termine C_{D_0}, poiché ricordiamo che, quando entriamo in regime transonico, il coefficiente C_{D_0} aumenta in modo notevole. Quindi l'incremento rilevante di τ_n per numeri di Mach prossimi al transonico è legato proprio all'andamento della funzione $C_{D_0}(M)$ in tale zona. Osserviamo ora cosa accade per $M > 1$: il C_{D_0} decresce e tale diminuzione è piuttosto intensa, per poi mantenersi costante; quindi poiché τ_n viene a dipendere dal prodotto $M^2 C_{D_0}(M)$ (a numeri di Mach elevati è del tutto trascurabile il secondo termine in parentesi), inizialmente avremo una variazione molto ridotta al crescere di M e poi un andamento crescente praticamente come M^2.

Continuiamo a parlare della T_n trascurando gli effetti della compressibilità e facendo quindi riferimento a condizioni di volo nelle quali è valida la relazione di tipo parabolico del coefficiente C_D. Dalla definizione abbiamo

$$T_n = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D$$

tenendo poi conto che studieremo l'effetto della quota ad angoli d'attacco costanti, si ha

$$\frac{T_n}{T_{n_{LM}}} = \frac{\varrho V^2}{\varrho_{LM} V_{LM}^2}$$

ricordiamo però che, se variamo la quota volando ad angolo d'attacco costante, dobbiamo mantenere costante il valore della pressione dinamica di volo; in altre parole scriviamo l'equazione di sostentamento che deve valere per ogni quota

$$W = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\varrho_{LM} V_{LM}^2 S C_L \qquad \Rightarrow \qquad \varrho V^2 = \varrho_{LM} V_{LM}^2$$

quindi il rapporto tra le due velocità è

$$\frac{V}{V_{LM}} = \sqrt{\frac{\varrho_{LM}}{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

e in definitiva

$$\frac{T_n}{T_{n_{LM}}} = 1.$$

In conclusione, volando ad angoli d'attacco costanti, all'aumentare della quota dobbiamo aumentare la velocità, ma la T_n resta costante. Graficamente dunque si ha

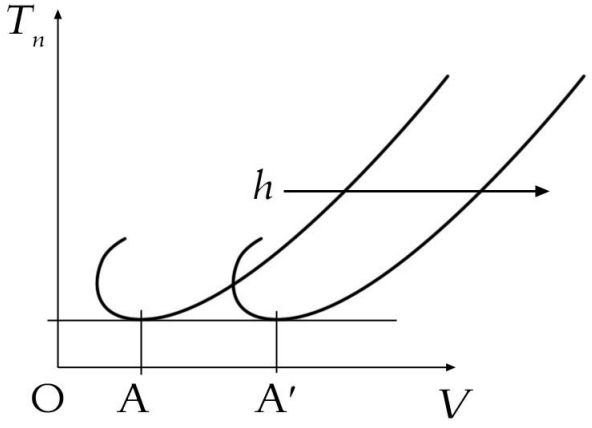


Figura 2

Tenuto conto di quanto ora detto e del grafico, la $\frac{V}{V_{LM}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$ si può anche scrivere come

$$\overline{OA'} = \overline{OA}\frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Anche in questo caso risulta conveniente lavorare in termini di V_{EAS}, perché in tale modo riusciamo a rappresentare gli effetti relativi alle diverse quote di volo con un'unica curva

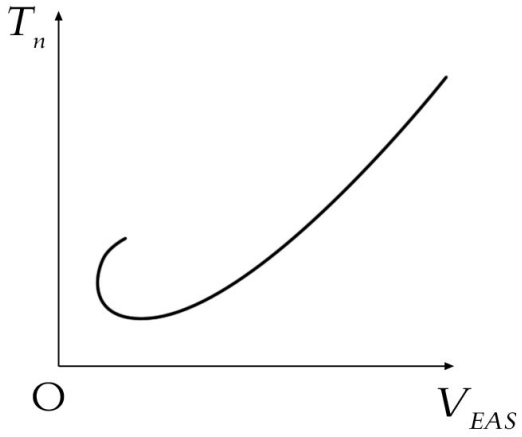


Figura 3

9.2 - VELOCITÀ CARATTERISTICHE

Torniamo a studiare condizioni al livello del mare e con i relativi angoli d'attacco.

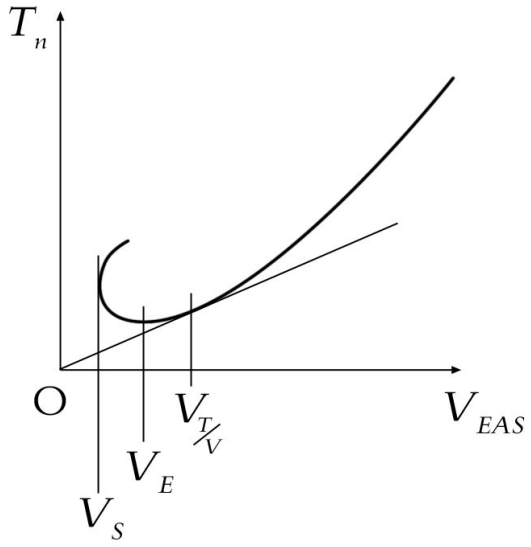


Figura 4

La prima velocità caratteristica è la velocità di stallo V_S; identifichiamo la seconda velocità caratteristica tracciando la tangente orizzontale alla curva: in questo modo determiniamo la condizione di volo nella quale T_n è minima e tale condizione corrisponde all'angolo d'attacco di massima efficienza; dalla relazione fondamentale dell'equilibrio in condizioni di volo a quota e velocità costanti si ha

$$\begin{cases} T_n = D \\ W = L \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad T_n = \frac{W}{E}$$

da cui

$$(T_n)_{min} \qquad \Leftrightarrow \qquad E_{max}$$

quindi la velocità così determinata è la velocità V_E di massima efficienza.

Un altro valore caratteristico dell'incidenza è quello determinato tracciando la tangente per l'origine alla curva: resta individuato in tal modo il punto P al quale corrisponde il minimo valore del rapporto $\frac{T_n}{V}$; la velocità corrispondente è indicata con $V_{T/V}$. Per determinare tale valore di α partiamo ancora dalla condizione di equilibrio che possiamo scrivere come

$$W = L = \frac{1}{2}\varrho V^2 C_L S \quad \Rightarrow \quad \frac{T_n}{V} = \frac{W}{EV} = \frac{\frac{1}{2}\varrho S C_L \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}}{E}$$

da cui si ricava (ϱ = cost.)

$$\left(\frac{T_n}{V}\right)_{min} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{C_L}}{E}\right)_{min} \quad \text{oppure} \quad \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{max}.$$

Determiniamo i valori di C_L, C_D ed E in queste condizioni; la condizione differenziale da imporre è

$$\frac{d}{dC_L}\left(\frac{\sqrt{C_L}}{E}\right)^2 = \frac{d}{dC_L}\left(\frac{C_D^2}{C_L}\right) = 0$$

derivando e moltiplicando per C_L^2 otteniamo

$$2C_D \frac{dC_D}{dC_L} C_L - C_D^2 = 0$$

da cui

$$\frac{dC_D}{dC_L} = \frac{1}{2}\frac{C_D}{C_L}.$$

Questa prima relazione è utile se vogliamo determinare questo valore caratteristico dell'incidenza per via grafica dall'analisi della polare del velivolo

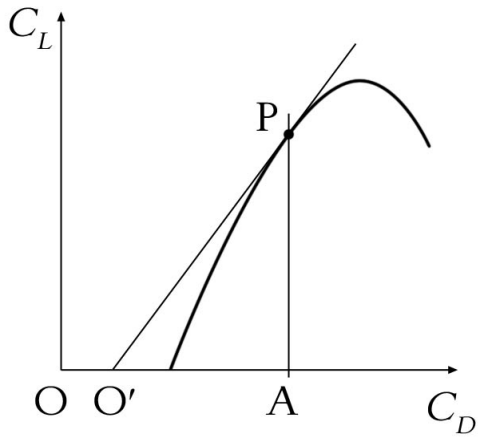


Figura 5

In termini di distanze misurate su tale grafico l'equazione precedente può essere scritta

$$\frac{\overline{O'A}}{\overline{PA}} = \frac{1}{2}\frac{\overline{OA}}{\overline{PA}}.$$

Per avere un'espressione analitica dei coefficienti aerodinamici in tale situazione, dalla equazione in termini di C_L e C_D appena scritta, ed utilizzando la polare parabolica abbiamo

$$\frac{dC_D}{dC_L} = 2KC_L = \frac{1}{2}\frac{C_D}{C_L} \quad \Rightarrow \quad 2KC_L^2 = \frac{1}{2}\left(C_{D_0} + KC_L^2\right) \quad \Rightarrow \quad 3KC_L^2 = C_{D_0}$$

da cui

$$C_{L_{T/V}} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3K}}$$

e di conseguenza

$$C_{D_{T/V}} = C_{D_0} + KC_{L_{T/V}}^2 = \frac{4}{3}C_{D_0}$$
$$E_{T/V} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{\sqrt{KC_{D_0}}}$$

Riassumendo abbiamo dunque

velocità di stallo $V_S = \sqrt{\dfrac{2\,W/S}{\varrho C_{L_{max}}}}$

velocità di minima spinta necessaria $V_E = \sqrt{\dfrac{2\,W/S}{\varrho C_{L_E}}}$

(coincide con la velocità di massima efficienza)

velocità di minimo rapporto $\dfrac{T}{V}$ $V_{T/V} = \sqrt{\dfrac{2\,W/S}{\varrho C_{L_{T/V}}}}.$

Notiamo dalla figura 4 come la $V_{T/V}$ sia maggiore della V_E.

L'ultima velocità caratteristica che evidenzieremo, in modo analogo a quanto fatto per il motoelica, è una velocità massima definita in base alla massima spinta disponibile

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2\,T_{d_{max}}/S}{\varrho C_{D_0}}}\,.$$

Anche in questo caso tale espressione costituisce solo una prima approssimazione della velocità massima poiché voliamo a velocità molto elevate, perciò il C_L è piccolo e quindi possiamo sostituire il C_D con il C_{D_0}; tenendo presente che comunque l'equazione di sostentamento deve essere soddisfatta, il C_L, anche se piccolo, non sarà mai uguale a zero. Nel caso del motore a getto quelle perplessità sulla validità della precedente, che avevamo espresso per il motoelica, risultano ancora più evidenti dato che quasi sicuramente, nel calcolo della V_{max} di volo a livello, anche nel caso di aeromobile subsonico, dovremo tener conto degli effetti del numero di Mach; per far questo o usiamo le correzioni viste nel caso del motoelica, oppure consideriamo la polare funzione del numero di Mach. Esiste un ulteriore motivo per il quale una V_{max} di volo a livello, calcolata con la precedente, fornisce dei risultati poco attendibili, ma di questo ne parleremo più avanti.

9.3 - CARATTERISTICHE DI VOLO PER VELIVOLI SUPERSONICI

Bell X-1, il primo aereo (endoreattore) a raggiungere la velocità del suono (1947)[3].

[3] Charles "*Chuck*" Yeager, a bordo del Bell X-1, effettuò il primo volo controllato (si intende un volo studiato per poter raggiungere e superare la velocità del suono; già durante la seconda guerra mondiale alcuni piloti superarono, per caso, la velocità del suono, durante la picchiata, perdendo però il controllo del velivolo) oltre la velocità del suono. Lo X-1 assomigliava più a un proiettile con le ali che a un aereo: era lungo 9 m e 41 cm, aveva un'apertura alare di 8 m e 53 cm, e il profilo del muso era copiato da una pallottola da mitragliatrice. Aveva quattro motori a razzo, alimentati con ossigeno liquido e alcol etilico diluito con acqua. La fusoliera era dipinta di un arancione vivo: su di essa, come portafortuna e omaggio alla giovane moglie Glennis, Yeager fece dipingere a grandi lettere la scritta "*Glamorous Glennis*" (la splendida Glennis).

Determiniamo le condizioni di volo a livello, ed in particolare la velocità massima e minima, per un velivolo supersonico riportando sullo stesso grafico la τ_n e la τ_d in funzione del numero di Mach. Osserviamo in figura 6a che quando ci avviciniamo al valore unitario di *M*, la pendenza della curva τ_n aumenta sempre di più. Nella regione ingrandita in figura 6b un aumento della τ_d provoca piccoli aumenti della velocità massima di volo a livello.

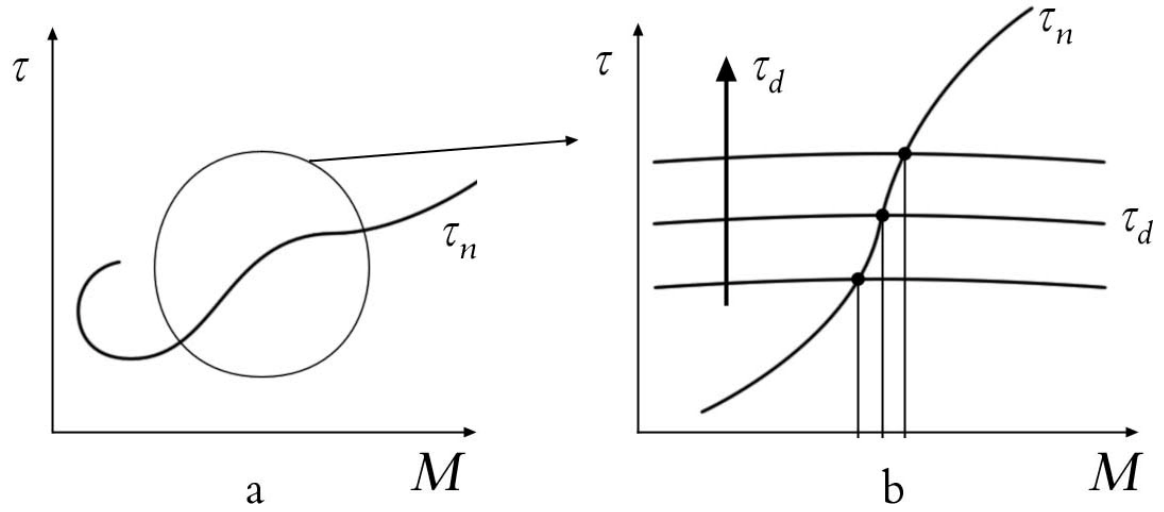


Figura 6

Questo fatto causò alcuni problemi quando, alla fine degli anni 40' e nei primi anni 50', si cominciarono a costruire aerei che prevedevano il raggiungimento di velocità supersoniche. L'aerodinamica di quei velivoli non era adatta al volo supersonico e quindi l'aumento del coefficiente C_{D_0} verso Mach uno era piuttosto consistente; la τ_d al contrario non era molto elevata poiché i motori non erano sufficientemente potenti.

Superare la velocità del suono rappresentava un ostacolo difficile da superare, per questo la denominazione di "muro del suono".

In quegli anni il problema legato agli effetti della compressibilità era stato già studiato, infatti si realizzavano velivoli subsonici che erano in grado di raggiungere ampiamente velo-

---

La notte del 13 ottobre 1947, Yeager era pronto a volare sull'X-1 per la nona volta. Vicino alla base di Muroc, in California, vi era un ranch e Chuck decise di fare una cavalcata notturna insieme a Glennis, ma la notte era senza luna e il suo cavallo andò a sbattere contro un cancello. Yeager fu sbalzato di sella e quando si rialzò da terra si accorse di avere alcune costole rotte: mancavano soltanto poche ore al decollo e quel incidente rischiava di fargli perdere l'occasione di volare.

Ma Yeager non si arrese: senza informare nessuno, si fece fasciare il torace in modo sommario da un veterinario e trascorse il resto della notte sveglio a causa del dolore. Il giorno dopo fu il primo uomo a volare in supersonico e dopo l'impresa divenne un eroe nazionale. Oggi Chuck Yeager, generale in pensione, ha più di 80 anni e nella sua lunga carriera di collaudatore ha pilotato 201 tipi diversi di aerei. Ormai non vola più sui caccia supersonici ma si mantiene in allenamento con un vecchio P-51 Mustang a elica.

cità transoniche ($M = 0,75 - 0,85$); in particolare si tendeva a realizzare velivoli in grado di battere primati di velocità in volo orizzontale effettuando prove in luoghi molto caldi. Questo perché, sapendo che $M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma R T}}$, a parità di velocità di volo, tanto più alta è la velocità del suono e tanto più è basso il numero di Mach e perciò conveniva volare dove la velocità del suono risultava la più elevata possibile, ossia in regioni calde. Il muro del suono è stato superato nel momento in cui l'aerodinamica è diventata così curata da permettere un miglioramento in termini di C_{D_0} e di conseguenza un miglior utilizzo della τ_d. Una volta superato Mach uno, non diventa un problema particolare raggiungere velocità superiori, per lo meno sino a Mach elevati (dove la spinta necessaria ricomincerà ad aumentare), e in tale regione possono addirittura esistere diverse velocità di volo a livello per lo stesso valore di τ_d.

9.4 - VELIVOLI SUBSONICI: STABILITÀ PROPULSIVA

In analogia a quanto fatto per il motoelica, confrontiamo T_n e T_d prescindendo dagli effetti della compressibilità e facendo l'ipotesi che la T_d presenti variazioni trascurabili in funzione della velocità di volo.

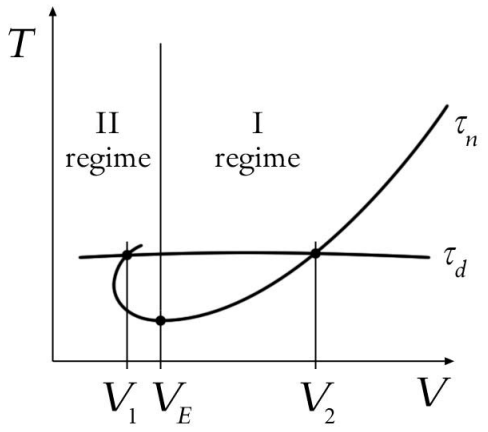


Figura 7

I punti di intersezione tra le due curve identificano le condizioni di volo a livello, in particolare una o due velocità di volo che indichiamo con V_1 e V_2. Tali velocità possono essere determinate per via analitica; l'equazione che dobbiamo considerare è

$$\frac{T_d}{W} = \frac{T_n}{W} = a V^2 + \frac{b}{V^2}$$

moltiplicando per $\frac{V^2}{a}$

$$V^4 - \left(\frac{T_d}{W}\right)\frac{V^2}{a} + \frac{b}{a} = 0$$

che fornisce la soluzione al problema del calcolo delle velocità di volo a livello per un getto.

È importante sottolineare che tale equazione fornisce solitamente valori accettabili per le velocità minime, mentre fornisce valori completamente errati per le velocità massime; questo accade sia per i motivi già discussi alla fine del § 2 che per un motivo più pratico: il massimo rapporto spinta/peso di un aeroplano a getto da trasporto[4] è intorno a 0,2 - 0,3 e questo corrisponde a valori della spinta che sono piuttosto elevati per quanto riguarda il volo a livello, cioè la spinta installata è maggiore di quella necessaria per volare in crociera ad una certa quota. L'elevato valore della spinta installata è richiesto per ragioni di sicurezza. Le norme di aeronavigabilità richiedono infatti certe prestazioni minime; per esempio devono essere garantiti certi gradienti di salita anche in caso di avaria ad un motore nella fase di decollo (come vedremo più avanti) e questo è un problema più critico per i velivoli bimotore (si pensi al Boeing 777 che ha due motori da 40˙800 kg di spinta ciascuno) per i quali un guasto ad un motore riduce del 50 % la spinta disponibile; è comprensibile di conseguenza che un aereo di questo tipo non potrà volare mai in condizioni di crociera alla spinta massima.

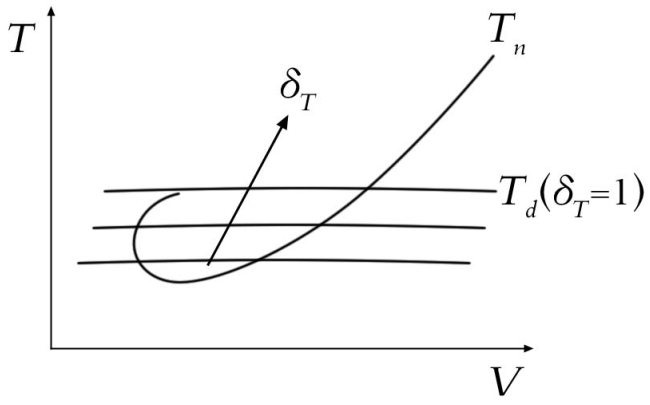


Figura 8

Osserviamo come anche nel caso del velivolo a getto restino identificate due zone (vedi figura 7) separate questa volta dalla velocità V_E: una zona detta di I regime, o delle velo-

[4] Ad esempio per un Boeing 747-400 ogni motore eroga una spinta di 252 kN, i quattro motori quindi 1˙008 kN. Il peso di un 747 è di 3˙722,9 kN (massa dell'aereo × 9,81 m/s^2), il rapporto spinta/peso quindi è 0,27. Il rapporto spinta/peso di un Airbus A380 è invece 0,667.

cità elevate, nella quale la stabilità propulsiva è positiva, e una zona detta di II regime, o delle basse velocità, nella quale abbiamo instabilità propulsiva.

Citiamo infine l'effetto della variabile di controllo del pilota. Il pilota azionando la manetta controlla la quantità di combustibile che viene immessa nei motori; riducendo la manetta, come accadeva anche nel caso del motoelica, diminuisce la velocità massima di volo a livello ed aumenta la velocità minima; quindi variando la posizione della manetta è in grado di volare in condizioni stabilizzate, cioè a quota e velocità costanti, a tutte le velocità di volo superiori a V_S e inferiori a V_{max}.

9.5 - EFFETTO DELLA QUOTA: QUOTA DI TANGENZA

Mettiamo in evidenza alcune differenze del velivolo a getto rispetto al motoelica. Per quanto riguarda la dipendenza dalla quota è conveniente prendere in considerazione il grafico T_n - V_{EAS}, ricordiamo che T_d in questa rappresentazione è dipendente dalla quota.

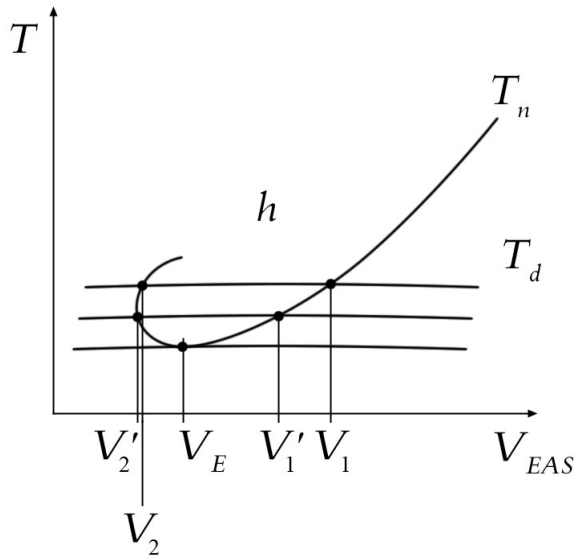


Figura 9

Anche in questo caso all'aumentare della quota, aumenta la V_2 e diminuisce la V_1. Aumentando ulteriormente h la curva relativa a T_d risulta tangente a quella relativa a T_n alla quota di tangenza teorica. Notiamo come la condizione di tangenza, e quindi la condizione di volo livellato alla quota più alta possibile, si ottenga per il velivolo a getto alla velocità di massima efficienza.

Anche in questo caso vale quanto detto per il motoelica riguardo alla quota di tangenza teorica e pratica: ricordiamo che h_t può essere raggiunta solo in un tempo teoricamente infinito poiché più ci avviciniamo a tale quota e tanto minore sarà l'eccesso di potenza speci-

fica; di qui la definizione di una quota di tangenza pratica in corrispondenza di certi valori della velocità di salita assegnati dalle norme[5].

Calcoliamo la quota di tangenza teorica e verifichiamo come questa abbia un'espressione molto più ridotta di quella trovata per il motoelica (lo scopo non è comunque quello di determinare un valore, ma di mettere in evidenza da quali grandezze dipenda); scriviamo la relazione di equilibrio nella condizione di tangenza

$$T_d(h_t) = \frac{W}{E_{max}}.$$

Ricordiamo che possiamo scrivere

$$\frac{T_d}{T_{d_{LM}}} = \delta^x \qquad \text{con} \qquad x = \begin{cases} \sim 0{,}7 & \text{troposfera} \\ \sim 1 & \text{stratosfera} \end{cases}$$

quindi per la quota di tangenza si ha

$$\delta_t^x = \left(\frac{W}{T_{d_{LM}}}\right)\frac{1}{E_{max}}.$$

Anche in questo caso occorrerà fare un paio di iterazioni per verificare che h_t si trovi in corrispondenza del valore scelto per l'esponente x; nella maggioranza dei casi la quota di tangenza di un getto sarà nella stratosfera e quindi con ogni probabilità useremo un valore di x unitario. È interessante osservare come nella precedente intervenga il rapporto spinta/peso (tanto maggiore è il rapporto spinta/peso e tanto maggiore sarà la quota di volo stabilizzato) e l'efficienza massima (all'aumentare di E_{max} aumenta la quota di tangenza teorica). Osserviamo come, al contrario di quanto acceda per il motoelica, la quota di tangenza di un getto non dipenda dal carico alare.

Abbiamo accennato alla quota di tangenza pratica, intendendo una condizione di volo in equilibrio nella quale abbiamo un valore finito e positivo dell'eccesso di potenza specifica e quindi abbiamo in qualche modo parlato di potenza in relazione al getto; dunque osserviamo come nel caso del getto, avendo fato l'ipotesi di T_d costante con la velocità di volo ed essendo

$$\Pi_d = T_d V$$

[5] Nel caso di velivoli a getto le velocità variometriche previste nella definizione di quota di tangenza pratica vanno dai 500 ft/min per i velivoli civili ai 100 ft/min per i velivoli militari (dipende dal tipo di normativa che si applica).

possiamo ragionevolmente assumere un andamento di tipo lineare per la potenza disponibile in funzione della velocità di volo.

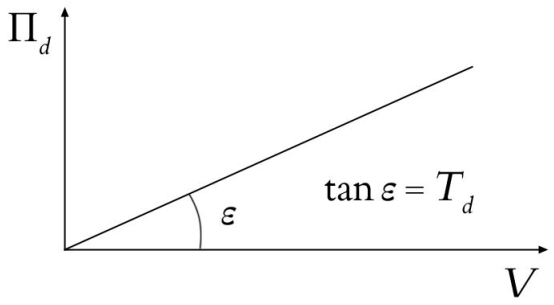


Figura 10

Utilizzeremo questa dipendenza nello studio delle condizioni di volo in salita.

9.6 - AUTONOMIA CHILOMETRICA ED AUTONOMIA ORARIA

La relazione fondamentale dell'autonomia viene ricavata dalla definizione di consumo specifico

$$C_S T_d = -\frac{dW}{dt}$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che il peso diminuisce per effetto del consumo di combustibile; in condizioni di equilibrio $T_d = T_n = \frac{W}{E}$ e la precedente diviene

$$C_S T_d = C_S T_n = C_S \frac{W}{E} = -\frac{dW}{dt}$$

moltiplicando per Vdt

$$C_S \frac{W}{E} Vdt = -VdW$$

da cui, ricordando che $\frac{dx}{dt} = V$, otteniamo

$$dx = -V\frac{E}{C_S}\frac{dW}{W}.$$

Anche in questo caso abbiamo tre diversi programmi di volo relativi ai tre modi nei quali possiamo effettuare il volo in crociera

1) C_L = cost. h = cost. $\Rightarrow$ $V\downarrow$

2) C_L = cost. V = cost. $\Rightarrow$ $h\uparrow$

3) V = cost. h = cost. $\Rightarrow$ $C_L\downarrow$

Tenendo presente che

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}$$

e che il peso diminuisce durante il volo, si ottengono i seguenti andamenti:

1° PROGRAMMA: questo è il programma nel quale la velocità si deve ridurre durante la crociera a causa della diminuzione di peso; restando costanti tutte le altre grandezze, si ottiene

$$dx_1 = -\frac{E}{C_S}\sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}\frac{d\,W}{W} =$$
$$= -\frac{E}{\sqrt{C_L}}\frac{1}{C_S}\sqrt{\frac{2/S}{\varrho}}\frac{d\,W}{\sqrt{W}}$$

che integrata fornisce

$$x_1 = 2\frac{E}{\sqrt{C_L}}\frac{1}{C_S}\sqrt{\frac{2/S}{\varrho}}\left(\sqrt{W_i} - \sqrt{W_f}\right)$$

ossia

$$x_1 = 2\frac{E}{\sqrt{C_L}}\frac{1}{C_S}\sqrt{\frac{2\,W_i/S}{\varrho}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{W_c}{W_i}}\right)$$

tale relazione è molto importante poiché mette bene in evidenza quali grandezze influenzino l'autonomia in questo programma di volo. Osserviamo le differenze rispetto al caso del motoelica, innanzitutto il valore dell'angolo d'attacco con il quale si rende massima l'autonomia chilometrica è quello relativo al massimo valore del rapporto $\frac{E}{\sqrt{C_L}}$; ricordiamo (si veda § 2) che ciò accade in corrispondenza di $\left(\frac{T_n}{V}\right)_{min}$. Osserviamo anche come, a differenza di quanto accada per il motoelica, l'autonomia dipende anche dal carico alare, tanto più grande è il carico alare e tanto più economica è la crociera[6]. L'altra dipendenza da sottolineare, anche questa non presente nel caso del motoelica, è quella rispetto alla quota di volo: se vogliamo volare in modo efficiente, quindi con bassi consumi, dobbiamo volare ad alta quota dove la densità è più bassa; notiamo infatti come nella crociera di un trasporto a getto difficilmente si voli a quote inferiori agli 8˙000 m su tratte brevi e 10˙000 - 12˙000 m su tratte lunghe. Un'altra osservazione da fare anticipa quanto vedremo più avanti: la trattazione che stiamo conducendo non tiene assolutamente conto degli effetti della compressibilità, ma teniamo presente che la $V_{T/V}$ (che è quella che massimizza x_1) è una velocità superiore alla V_E ed è quindi una velocità piuttosto grande, alla quale perciò gli effetti della compressibilità diventano considerevoli; ciò fa sì che l'importanza pratica della espressione precedente sia piuttosto limitata, anche se il tipo di dipendenza dal carico alare e dalla quota che essa esprime rappresenti un risultato valido.

2° PROGRAMMA: tale programma prevede che durante la crociera sia opportunamente variata, in particolare aumentata, la quota di volo: il velivolo deve guadagnare quota per tener conto della riduzione di peso e mantenere così costante la velocità. Dobbiamo integrare la $dx = -V\frac{E}{C_S}\frac{dW}{W}$, ma mantenendosi costante la velocità, abbiamo semplicemente

$$x_2 = \frac{E}{C_S} V \ln \frac{W_i}{W_f}$$

ossia

$$x_2 = \frac{E}{C_S} V \ln \frac{1}{1 - \frac{W_c}{W_i}}$$

[6] I velivoli da trasporto moderni hanno dei valori molto elevati del carico alare; parliamo di 5˙000 - 6˙000 N/m^2 per trasporti di grandi dimensioni.

Tale espressione, per l'analogia con quella valida per il motoelica, viene indicata come formula di Breguet per l'autonomia chilometrica di un getto. Notiamo come, anche in questo caso, si abbia una dipendenza dalla quota e dal carico alare analoga a quella vista per il 1° programma (si tenga conto dell'espressione della velocità). Spesso tale programma prende il nome di *cruise climb* (salita di crociera) proprio per evidenziare il fatto che il velivolo durante la crociera salga di quota per compensare la riduzione di peso.

3° PROGRAMMA: nel terzo programma la formulazione è molto simile a quella introdotta per il motoelica; questa volta la $dx = -V\frac{E}{C_S}\frac{dW}{W}$ deve essere integrata tenendo conto che il mantenimento di quota e velocità implicherà una variazione dell'angolo d'attacco e per questo vi sarà una variazione di efficienza; si ottiene così un'espressione del tipo

$$x_3 = -\frac{V}{C_S}\int_{W_i}^{W_f} E\frac{dW}{W}$$

che viene in genere posta nella forma

$$x_3 = -\frac{V}{C_S}\int_{W_i}^{W_f} \frac{dW}{D}$$

avendo espresso la resistenza con una forma del tipo $D = 1 + c_1 W^2$ dove c_1 è una costante. Il risultato finale (poco utile) è molto simile a quello ottenuto per il motoelica.

Confrontiamo i tre programmi ora analizzati: il primo programma è quello che prevede una diminuzione di velocità durante la crociera e ciò non è sicuramente un vantaggio sia per chi gestisce l'aereo, andare più piano significa impiegare più tempo, sia per il controllo del traffico aereo: in genere lungo la aerovia è permessa una variazione di velocità di non più di 10 nodi dal valore nominale, quindi non è prevista la possibilità che un velivolo possa rallentare durante la crociera; il primo programma non ha dunque un'importanza rilevante anche perché dobbiamo tener presente che, durante la crociera, la T_n dovrà variare con il peso: infatti dalla relazione di equilibrio

$$T_n = \frac{W}{E}$$

ed essendo E = cost. nel primo programma, si ha

$$\frac{T_n}{T_{n_0}} = \frac{W}{W_0}$$

dove il pedice zero indica la condizione di inizio crociera; poiché la T_d deve mantenersi, istante per istante (siamo in condizioni di equilibrio) uguale alla T_n, occorre ridurre T_d attraverso un'azione del pilota, in modo tale che questa vari proporzionalmente al peso. Inoltre anche la velocità deve variare durante la crociera e perciò il pilota, conoscendo i consumi del velivolo, dovrebbe monitorare la velocità durante la crociera in modo che si adegui come previsto alla variazione del peso. Tutto ciò rende molto laborioso l'utilizzo del primo programma. Teniamo anche presente che, dal punto di vista dei consumi (a parità di tutti gli altri parametri e nella condizione di massima autonomia), il programma più vantaggioso è il secondo che prevede una variazione di quota mantenendo costante la velocità di volo. Tuttavia variazioni di quota non sono ammesse dal controllo del traffico aereo, se non nei casi in cui la crociera sia molto lunga; nei voli transoceanici diventa infatti difficile rinunciare al risparmio di combustibile che si ha con il secondo programma e pertanto si arriva ad un compromesso tra le esigenze del controllo del traffico aereo e quelle delle compagnie.

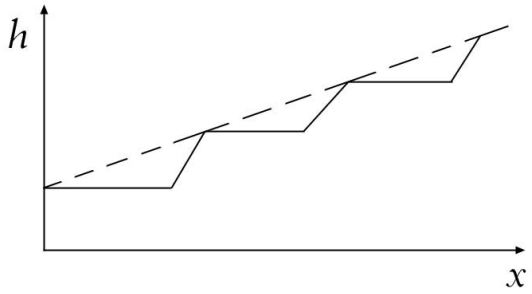


Figura 11

Immaginiamo che durante la crociera si voglia realizzare il secondo programma, il quale prevede un aumento di quota con una certa legge che supponiamo lineare, la variazione di quota avviene comunque molto lentamente. Dato che il controllo del traffico aereo non permette agli aerei variazioni continue di quota lungo le aerovie, si spezza la crociera in una serie di segmenti effettuati a quota costante, concentrando in pochi punti le variazioni di quota: l'aeromobile volerà a quota costante, quindi verrà richiesto al controllo aereo il permesso di variare il livello di volo; se la variazione è accordata il velivolo cambia livello e si predisporrà per un'altra tratta a quota costante. In questo caso parliamo di *latitude flight* (volo latitudinale).

Anche nel secondo programma la T_n (e quindi la T_d trovandoci sempre in condizioni di equilibrio) deve variare proporzionalmente al peso esattamente come abbiamo visto per il primo programma, poiché anche in questo caso E è costante essendo costante il C_L. L'au-

mento di quota che si ha nel secondo programma è dovuto al fatto che per mantenere la velocità costante, la densità deve variare proporzionalmente al peso

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{W}{W_0}$$

e ciò ha un effetto significativo: teniamo presente che tipicamente la crociera avviene nella stratosfera, dove, per un getto vale la $\frac{T_d}{T_{d_{LM}}} = \delta$ per la quale possiamo dunque scrivere

$$\frac{T_d}{T_{d_0}} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{W}{W_0}.$$

Il risultato perciò è che nel secondo programma si realizza automaticamente la proporzionalità tra T_d e W richiesta dalle condizioni di equilibrio, senza alcun intervento del pilota[7].

Il terzo programma permette di realizzare delle autonomie peggiori di quelle del secondo programma; tuttavia è anche il programma che viene usato più frequentemente poiché condizioni di volo a quota e velocità costanti sono proprio quelle richieste dal controllo del traffico aereo.

Passiamo ad analizzare l'autonomia oraria; come fatto nel caso del motoelica, facciamo riferimento a velivoli progettati per particolari missioni[8]. Dal punto di vista teorico, anche in questo caso, partiamo dalla definizione di consumo specifico

$$C_S T_d = C_S T_n = C_S \frac{W}{E} = -\frac{dW}{dt}$$

da cui ricaviamo

[7] In questo tipo di crociera, quando ammessa, in genere il velivolo ha attivo un autopilota detto *Mach hold*; questo è un sistema di guida automatico che agisce sull'equilibratore per mantenere costante il numero di Mach e di fatto fa in modo che il velivolo, durante la crociera, guadagni lentamente quota.

[8] Si pensi agli aerei antisommergibile oppure ai velivoli come gli AWACS (*Airborne Warning & Control System*, sistema di allerta e controllo aerotrasportato), stiamo parlando di velivoli militari i quali restano in aria molto tempo, avendo a bordo apparati di comando e di controllo, in una situazione di volo in cui si massimizza la durata. Anche i velivoli da trasporto possono spendere parte del tempo in condizioni di volo che massimizzino l'autonomia oraria quando, per motivi di traffico aereo o meteorologici, non sia possibile atterrare ma sia necessario passare un po' di tempo in attesa che tali problemi vengano risolti.

$$dt = -\frac{E}{C_S}\frac{dW}{W}$$

che è l'equazione fondamentale nello studio dell'autonomia oraria. Possiamo integrare tale relazione nella condizione di angolo d'attacco costante (primo e secondo programma) perché ciò rende l'integrazione particolarmente semplice; introducendo il peso del combustibile consumato si ha

$$t = \frac{E}{C_S}\ln\frac{W_i}{W_f} = \frac{E}{C_S}\ln\frac{1}{1-\frac{W_c}{W_i}}$$

osserviamo come l'autonomia oraria sia resa massima, per quanto riguarda la dipendenza dall'angolo d'attacco, volando alla massima efficienza; è interessante a tale proposito confrontare, attraverso la polare, i risultati ottenuti per il motoelica con quelli del getto.

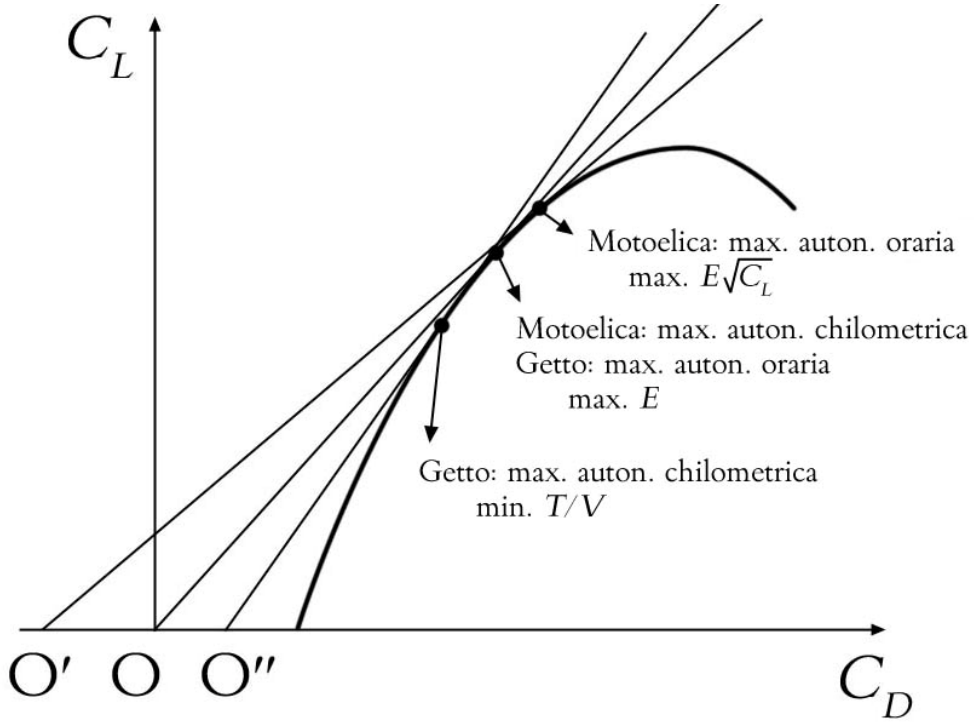


Figura 12

Tale grafico ha soprattutto lo scopo di mettere in evidenza come i valori caratteristici delle autonomie del getto sono tutti ottimizzati a velocità più alte rispetto al motoelica; cioè teoricamente osserviamo come la massima autonomia chilometrica di un velivolo a getto si realizzi a valori minori dell'angolo d'attacco rispetto a quanto avviene per il motoelica ed osserviamo come lo stesso accada per quanto riguarda le autonomie orarie. Un'ultima os-

servazione interessante è che, al contrario di quanto succeda per il motoelica, per un getto l'autonomia oraria non dipende dalla quota e dal carico alare.

AWACS della NATO (Boeing 707).

Terminiamo dicendo che per quanto riguarda il volo a velocità non costante, non c'è niente da aggiungere a quanto detto per il motoelica.

Capitolo 10

CARATTERISTICHE DI VOLO IN SALITA DEL MOTORE A GETTO

10.1 - VELOCITÀ DI SALITA RAPIDA E DI SALITA RIPIDA

Il procedimento logico che useremo per studiare le caratteristiche di salita del motore a getto sarà lo stesso usato per il motoelica: faremo riferimento dapprima ad una trattazione di tipo grafico per poi passare ad una trattazione di tipo maggiormente analitico.

Anche nel caso del getto consideriamo principalmente due parametri: il *rate of climb*, velocità variometrica

$$RC = V \operatorname{sen} \gamma = \frac{\Pi_d}{W} - \frac{\Pi_n}{W} = \frac{T_d V}{W} - \frac{DV}{W}$$

ed il gradiente di salita

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{T_d}{W} - \frac{D}{W}$$

dove abbiamo tenuto conto che $T_n = D$. Anche in questo caso dobbiamo adottare delle ipotesi semplificatrici e, analogamente alla trattazione del motoelica, supponiamo anzitutto che gli angoli di salita siano relativamente ridotti (e ciò per aerei convenzionali è sicuramente vero) per poter trascurare la dipendenza di T_n e T_d dall'angolo di rampa; manteniа-

mo poi anche l'ipotesi relativa alla costanza della velocità[1], durante la salita[2], tenendo presente che tale ipotesi è piuttosto riduttiva nel caso di un getto poiché le velocità di crociera sono in questo caso elevate e quindi durante la salita di decollo ad esempio, la velocità varia di molto per passare da quella di distacco da terra[3] a quella di crociera.

Fatte queste considerazioni, determiniamo per quali velocità lungo la traiettoria i parametri RC e senγ siano massimi, arrivando così a calcolare le velocità di salita rapida e di salita ripida che abbiamo già definito nel caso del motoelica. Occupiamoci prima della velocità di salita rapida, facendo anzitutto riferimento a velivoli supersonici: dobbiamo confrontare tra loro la potenza necessaria e la potenza disponibile, perciò supponiamo che per una determinata quota $h = \bar{h}$ siano assegnati gli andamenti di Π_n e di Π_d in funzione del numero di Mach (ricordiamo che per quanto detto alla fine del § 9.5, l'andamento della potenza disponibile con la velocità, il che equivale a dire col numero di Mach se la quota è assegnata, è lineare).

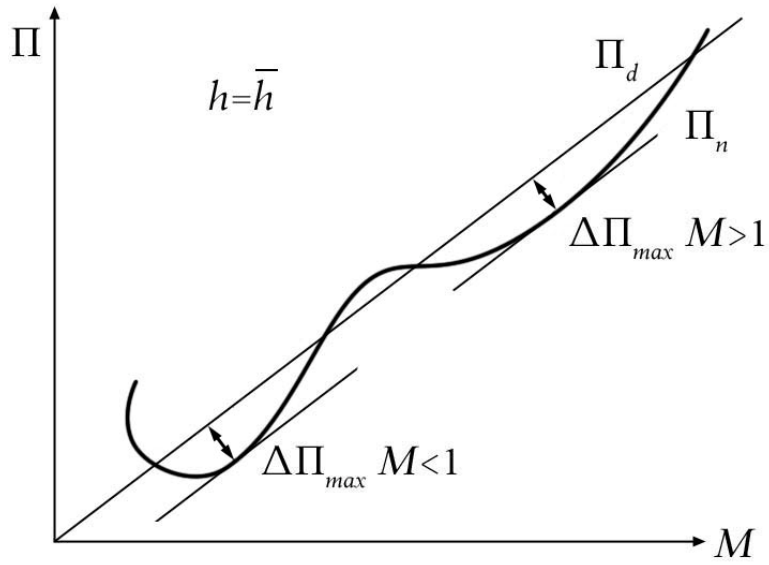


Figura 1

La salita rapida è quella che massimizza la velocità ascensionale, perciò le condizioni ottime di salita possono essere determinate per via grafica tracciando la retta tangente alla curva della Π_n e parallela alla retta della Π_d: in corrispondenza del punto di tangenza avremo infatti certamente il massimo eccesso di potenza. Osserviamo come tale grafico mostri l'esi-

[1] Che in fondo è quella che ci permette di scrivere le equazioni della velocità variometrica e del gradiente di salita.

[2] Ricordiamo che, anche nel caso del getto, vale l'equazione di bilancio energetico scritta con riferimento a condizioni di volo a velocità costante $\frac{dh}{dt} = \frac{\Delta\Pi}{W}$.

[3] Di ciò parleremo più approfonditamente nel capitolo 12.

stenza di una seconda condizione di ottimo a velocità supersonica, peculiarità dei velivoli supersonici; di tale aspetto tuttavia ci occuperemo in modo approfondito più avanti. Un altro aspetto relativo alla salita rapida di un aviogetto riguarda l'effetto della quota sulla velocità di salita rapida; cerchiamo ancora una soluzione di tipo grafico, limitandoci al caso subsonico. Per mostrare l'effetto della quota ci conviene utilizzare la rappresentazione in termini di velocità equivalente.

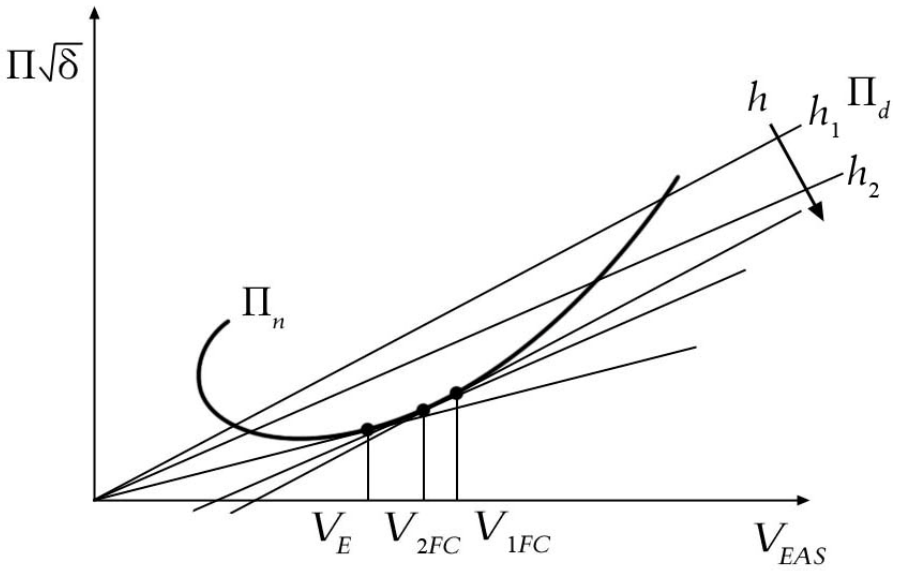


Figura 2

Ricordiamo che in tale rappresentazione la curva $\Pi_n\sqrt{\delta}$ è unica, mentre abbiamo una famiglia di rette relative a $\Pi_d\sqrt{\delta}$ aventi come parametro la quota di volo; tracciamo quindi due di tali rette, relativamente ai valori h_1, ed $h_2 > h_1$ notando come la pendenza diminuisca all'aumentare della quota di volo. Possiamo determinare per le due quote ora fissate il valore della velocità di salita rapida in modo del tutto analogo a quanto fatto prima e cioè tracciando le tangenti alla curva $\Pi_n\sqrt{\delta}$ parallele alle due rette $\Pi_d\sqrt{\delta}$ relative ad h_1, ed h_2; restano così determinate $V_{1FC_{EAS}}$ e $V_{2FC_{EAS}}$. Notiamo come la velocità equivalente di salita rapida decresca all'aumentare della quota, fino ad un valore limite che si ottiene tracciando la tangente per l'origine alla curva $\Pi_n\sqrt{\delta}$ e che, come sappiamo, individua la velocità equivalente di massima efficienza $V_{E_{EAS}}$; quindi la conclusione è che la salita rapida di un getto (in campo subsonico) avviene tutta a velocità maggiori della velocità di massima efficienza e, contrariamente a quanto accada per il motoelica, avviene ad un valore della velocità equivalente che va decrescendo all'aumentare della quota.

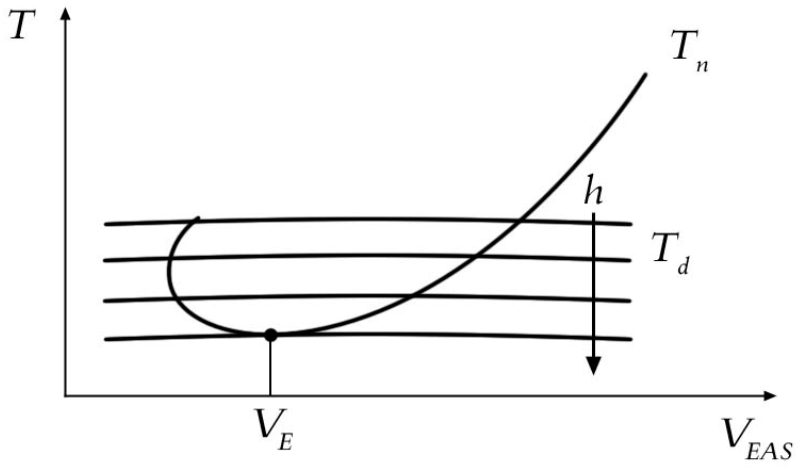


Figura 3

Passiamo a determinare la velocità di salita ripida, relativa cioè alla salita di massimo gradiente, per la quale dobbiamo confrontare tra loro T_n e T_d; consideriamo direttamente la velocità equivalente per tener conto anche dell'effetto della quota.

Come già sappiamo avremo un unico andamento rappresentativo della T_n ed una famiglia di curve relative alla T_d, parametrizzate con la quota. L'informazione immediatamente deducibile dal grafico è che la salita ripida avviene massimizzando l'eccesso di spinta per unità di peso e quindi si realizza alla $V_{E_{EAS}}$; notiamo inoltre come, al variare della quota, la velocità equivalente di salita ripida si mantenga costante (e questo è di nuovo diverso da ciò che accade nel caso del motoelica).

Passiamo ora all'aspetto analitico e determiniamo le espressioni che ci consentono di ricavare il valore di V_{FC} e V_{SC}. La velocità di salita rapida è la velocità lungo la traiettoria in corrispondenza della quale si realizza la massima velocità variometrica, quindi per determinarla esattamente come fatto per il motoelica, dobbiamo imporre che la derivata dell'eccesso di potenza specifico sia uguale a zero

$$\left(\frac{\Delta\Pi}{W}\right)_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dV}\left(\frac{T_d V}{W} - a\,V^3 - \frac{b}{V}\right) = 0$$

da cui, tenendo conto dell'ipotesi che la spinta disponibile non vari con la velocità, si ottiene

$$\frac{T_d}{W} - 3a\,V_{FC}^2 + \frac{b}{V_{FC}^2} = 0$$

e quindi

$$V_{FC}^4 - \left(\frac{T_d}{W}\right)\frac{V_{FC}^2}{3a} - \frac{b}{3a} = 0$$

e da questa ricaviamo la velocità di salita rapida; una volta calcolata V_{FC} possiamo poi ricavare, per ogni valore della quota, la massima velocità variometrica, sostituendo il valore calcolato con la precedente nella $RC = V \operatorname{sen} \gamma$. Per quanto riguarda la velocità di salita ripida, la condizione differenziale da imporre è la seguente

$$\left(\frac{\Delta T}{W}\right)_{max} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dV}\left(\frac{T_d}{W} - a V^2 - \frac{b}{V^2}\right) = 0$$

da cui

$$2a V_{SC} - 2\frac{b}{V_{SC}^3} = 0$$

e quindi

$$V_{SC}^4 = \frac{b}{a}.$$

Se sostituiamo nella precedente l'espressione dei coefficienti *a* e *b* e teniamo conto del fatto che $C_{L_E} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}$, troviamo

$$V_{SC}^4 = \frac{4\left(W/S\right)^2}{\varrho^2\left(\frac{C_{D_0}}{K}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad V_{SC} = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_{L_E}}} = V_E$$

questo ci conferma ciò che abbiamo già ottenuto per via grafica e cioè che la velocità di salita ripida corrisponde alla velocità di massima efficienza.

10.2 - VELOCITÀ DI MINIMO CONSUMO IN SALITA

L'altro elemento importante nello studio dei regimi di salita riguarda la salita economica, cioè la *salita di minimo consumo*; per ora ci occuperemo solo della determinazione della velocità con cui si effettua la salita di minimo consumo, ma aggiungeremo qualcosa a ri-

guardo nel prossimo capitolo. Quando si trattano i consumi si usa sempre l'equazione di bilancio energetico, nell'ipotesi di salita a velocità costante lungo la traiettoria

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\Delta \Pi}{W}$$

che, in termini del consumo orario di combustibile $w_c = \frac{dW_c}{dt}$, diventa

$$\frac{dh}{dW_c} w_c = \frac{T_d V}{W} - \frac{DV}{W}.$$

Il parametro fondamentale è $\frac{dW_c}{dh}$, il quale prende il nome di variazione di combustibile col cambiamento di quota (*fuel altitude exchange ratio*) e fornisce una misura della capacità di convertire combustibile in un guadagno di quota di volo[4]; dalla precedente abbiamo perciò

$$\frac{dW_c}{dh} = w_c \frac{W}{T_d V - DV}.$$

Un problema tipico è quello di determinare il valore di velocità per il quale tale parametro sia minimo, quindi dobbiamo imporre

$$\frac{d}{dV}\left(\frac{dW_c}{dh}\right) = 0$$

derivata che eventualmente scriveremo esprimendo la dipendenza di w_c da V (ammesso che tale dipendenza non sia trascurabile). Nella pratica la velocità che rende minimo tale parametro non è troppo diversa dalla V_{FC} (in genere è leggermente più bassa), peraltro vedremo come la salita economica del getto da trasporto avviene in genere in base a considerazioni diverse da quelle che porterebbero alla minimizzazione del consumo lungo la salita stessa.

10.3 - INVILUPPO DI VOLO PER UN VELIVOLO SUBSONICO

[4] In altre parole, è il combustibile consumato per modificare la quota di volo.

Ricordiamo che l'inviluppo di volo, pur se tracciato senza tener conto più di tanto degli effetti della compressibilità dell'aria, è un grafico fondamentale che identifica tutte le condizioni possibili di volo a livello per un determinato valore della variabile di controllo (in genere nelle condizioni di massima spinta erogata) di un determinato velivolo. I metodi mediante i quali tracciare tale grafico li abbiamo già illustrati sia dal punto di vista grafico che dal punto di vista analitico; ci limitiamo pertanto a discutere quale sia l'andamento qualitativo delle velocità massime e minime di volo a livello. Ricordiamo inoltre che, nel caso del motoelica, per lo meno a quote non elevate, la velocità minima di volo a livello è determinata da fattori aerodinamici poiché non possiamo volare ad un valore del C_L superiore a quello massimo; il discorso risulta un po' diverso nel caso del getto e lo si può comprendere se osserviamo un grafico in termini di potenza.

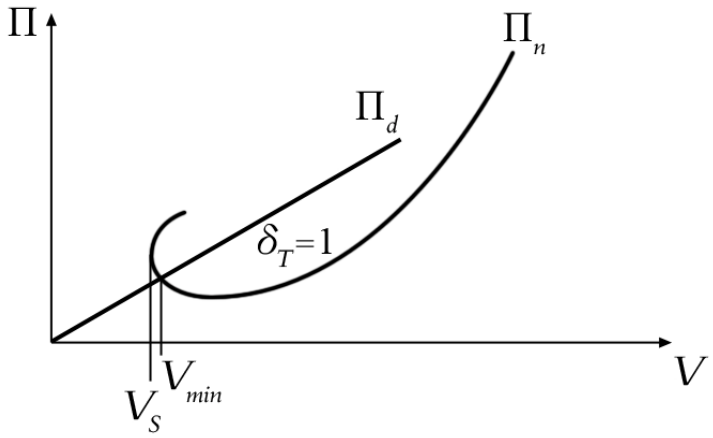


Figura 4

Nel grafico abbiamo riportato la Π_n e l'andamento della Π_d relativamente alla massima spinta erogata, cioè per $\delta_T = 1$; notiamo come la velocità minima (a quella determinata quota cui si riferisce il grafico) è diversa dalla velocità di stallo. Parlando pertanto di velocità minima di volo a livello per un getto, dobbiamo riferirci ad una limitazione di tipo propulsivo piuttosto che di tipo aerodinamico (come invece accade per il motoelica): non possiamo infatti volare alla V_S perché non abbiamo abbastanza potenza disponibile. All'aumentare della quota V_{min} aumenterà con una certa legge, dipendente anche dalla legge di variazione di Π_d con h.

Se consideriamo invece la velocità massima di volo a livello, una prima stima può essere data da

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2\,T_{d_{max}}/S}{\varrho C_{D_0}}}$$

e se vogliamo determinare la variazione di tale valore con la quota dobbiamo far riferimento alla variazione di T_d con h; sappiamo già che possiamo avere due situazioni distinte (vedi il capitolo 9) a seconda che ci si trovi nella troposfera oppure nella stratosfera: nel primo caso T_d decresce meno della densità e quindi la velocità massima di volo a livello aumenta, mentre nel secondo caso T_d varia proporzionalmente alla densità perciò dovremmo trovare, dal punto di vista strettamente propulsivo, che la velocità massima di volo a livello è costante; ricordiamoci però che aumentando la quota dobbiamo per forza aumentare il C_L per mantenere sostentato il velivolo e ciò significa che dobbiamo sostituire il C_{D_0} con il C_D, il quale aumenta con la quota proprio perché aumenta il C_L: il risultato finale è che la velocità massima di volo a livello, a partire dalla tropopausa, diminuisce all'aumentare della quota.

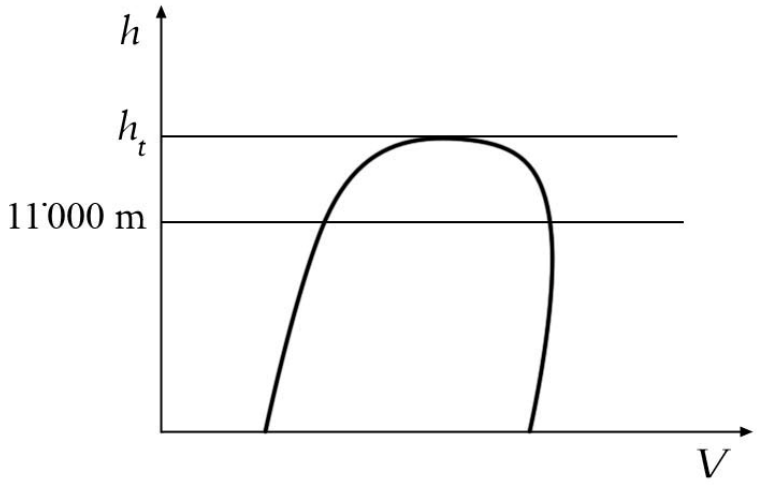


Figura 5

Una volta tracciato l'inviluppo di volo abbiamo anche l'informazione sulla quota di tangenza teorica e l'area sottesa rappresenta tutte le possibili condizioni di volo a livello del velivolo; condizioni di volo rappresentate da punti all'interno di tale grafico si ottengono riducendo opportunamente la spinta erogata dal motore.

Possiamo completare tale diagramma, facendolo diventare quello che abbiamo chiamato diagramma riassuntivo delle caratteristiche di volo, riportando le informazioni sul regime di salita; in particolare possiamo riportare la V_{FC} (velocità vera di salita rapida), la quale presenterà un andamento molto contenuto in funzione della quota (ricordiamo invece che la $V_{FC_{EAS}}$ diminuisce all'aumentare della quota) nonché l'andamento della V_{SC} (velocità vera di salita ripida), la quale aumenta con la quota (mantenendosi invece costante la $V_{SC_{EAS}}$)

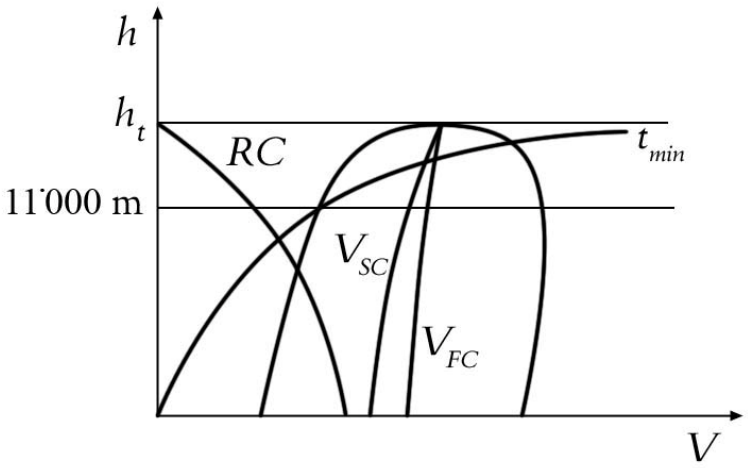


Figura 6

Possiamo infine riportare in funzione di h il massimo della velocità variometrica, il quale diminuisce all'aumentare della quota fino ad annullarsi per $h = h_t$, ed inoltre introdurre un asse dei tempi che ci consente di riportare un'ultima curva relativa al tempo minimo di salita quota per quota.

10.4 - INVILUPPO DI VOLO PER VELIVOLI SUPERSONICI

Nel § precedente abbiamo discusso il grafico dell'inviluppo di volo relativo ad un velivolo subsonico ed abbiamo evidenziato come in tale grafico compaiano delle limitazioni di tipo aerodinamico e di tipo propulsivo. È utile a questo punto illustrare la forma assunta dall'inviluppo di volo per un velivolo non convenzionale (in particolare militare supersonico), almeno per evidenziare come le limitazioni che definiscono i confini dell'inviluppo di volo non sono esclusivamente di tipo propulsivo o aerodinamico. Osserviamo quindi il grafico riportato in figura 7, nel quale abbiamo in ordinate la quota ed in ascisse in numero di Mach; due linee tratteggiate rappresentano i limiti degli inviluppi di volo e sono date dall'equazione $P_S = 100$ ft/min (a volte troviamo indicato l'eccesso di potenza specifica con P_S); la presenza di due curve è dovuta al fatto che una prima curva (più interna) è relativa alla cosiddetta *military thrust* (spinta a secco), ossia alla spinta in assenza di postbruciatore, mentre l'altra curva (più esterna) è relativa a postbruciatore attivo (*maximum thrust*, spinta massima); notiamo l'indicazione della quota di tangenza teorica (detta *absolute ceiling*, quota massima assoluta) e della quota di tangenza pratica (detta *service ceiling*, quota massima di servizio), in corrispondenza della quale si ha $P_S = 100$ ft/min. Analizziamo ora che tipo di limitazioni, non necessariamente propulsive e aerodinamiche, esistono per un velivolo di queste caratteristiche; per quanto riguarda la limitazione alle basse velocità non c'è niente di particolarmente nuovo da aggiungere: velivoli di questo tipo hanno una notevolissima disponibi-

lità di spinta o potenza, quindi alle basse velocità il limite è di tipo aerodinamico; parlando di limiti aerodinamici si sente spesso parlare di stallo di alta e di bassa velocità e del fenomeno del *buffeting*, sballottamento: il *buffeting* è un tipo di fenomeno che ha carattere aerodinamico e strutturale e che si traduce in vibrazioni abbastanza intense, le quali hanno origine nelle superfici aerodinamiche del velivolo; esso è legato sia allo stallo di bassa velocità che allo stallo di alta velocità. Lo stallo di bassa velocità è quello che avviene perché l'angolo d'attacco supera il valore critico ed in questa situazione si presenta il fenomeno del *buffeting* poiché la separazione di flusso sull'ala ha caratteristiche tipicamente non stazionarie, le quali generano vibrazioni sul velivolo; se si entra in una situazione di stallo di bassa velocità il rimedio è una riduzione dell'angolo d'attacco e soprattutto un aumento di velocità.

Lo stallo di alta velocità, anche definito come stallo d'urto, avviene quando la velocità è sufficientemente elevata (e quindi ci troviamo a bassa incidenza) tanto che il Mach di volo sia di poco superiore al Mach critico e sulle superfici superiore ed inferiore dell'ala si formano onde d'urto che, interagendo con lo strato limite, portano alla separazione del flusso e di conseguenza ad una netta diminuzione di portanza, mentre la resistenza ha un improvviso aumento (vedi figura 7, con riferimento al tratto transonico); anche in questo caso il fenomeno è fortemente non stazionario e quindi si genera nuovamente il *buffeting*; per uscire dallo stallo di alta velocità si deve ridurre la medesima. Vediamo quindi come i due fenomeni di stallo di bassa e di alta velocità, pur avendo entrambi un'origine aerodinamica, dipendano da cause diverse e soprattutto sono opposte le contromisure. Inizialmente quindi il limite aerodinamico di stallo è legato all'alta incidenza, mentre poi subentrano gli effetti del numero di Mach. Notiamo però sul grafico qualcosa di nuovo: al di sotto di una certa velocità e al di sopra di una certa quota può intervenire una limitazione (detta *erigine relight limit*, limite di accensione del motore) dovuta al fatto che se per qualche motivo i motori si spengono, questi non possono più essere riaccesi perché la pressione dinamica di volo è troppo bassa a causa della bassa velocità e dell'alta quota; esiste poi un limite (detto *pilot ejection altitude limit*, limite per l'espulsione del pilota) sulla possibilità del pilota di abbandonare l'aereo: dal punto di vista propulsivo ed aerodinamico, il velivolo cui si riferisce il grafico potrebbe volare fino a circa 50˙000 ft di quota, ma il problema è che al di sopra dei 50˙000 ft la temperatura è troppo bassa e non c'è sufficiente ossigeno affinché il pilota sopravviva, anche con tutte le attrezzature a disposizione, nel caso in cui fosse costretto a lasciare l'abitacolo. Per alcuni aerei dunque il limite sulla quota massima non deriva da considerazioni sull'eccesso di potenza ma sulla possibilità del pilota di lasciare il mezzo in sicurezza.

Passiamo ora ad analizzare la zona relativa alle altre velocità di volo; sul grafico è riportata, inizialmente a velocità non troppo elevate e poi a velocità crescenti, una limitazione detta *g-limit*, cioè una limitazione sulla massima pressione dinamica ammissibile e perciò una limitazione di tipo strutturale: non possiamo volare al di sopra di questo limite (quindi a quota e velocità alla destra di tale curva), anche se teoricamente la potenza disponibile lo

permetterebbe[5], perché andremmo a sollecitare troppo la struttura dell'aereo[6]. Una limitazione molto simile a questa è costituita dalla cosiddetta *duct pressure limit* (pressione limite nei condotti delle prese d'aria dei motori): osserviamo come il numero di Mach in questa situazione sia maggiore di 1,5, perciò, nelle prese d'aria, la velocità passa da valori supersonici a valori subsonici, con un notevole incremento della pressione; occorre quindi garantire che la pressione non superi il valore massimo per il quale tali prese sono state progettate, perciò ci troviamo di fronte ad un'altra limitazione di tipo strutturale. L'ultima limitazione riportata sul grafico è di tipo termico ed in particolare riguarda la temperatura nei punti di ristagno, nei quali tutta l'energia cinetica posseduta dal fluido si trasforma in calore: tanto più elevato è il numero di Mach di volo e tanto maggiore sarà dunque la temperatura[7], il cui eccesso può produrre un indebolimento delle caratteristiche di resistenza della struttura del velivolo in tali punti.

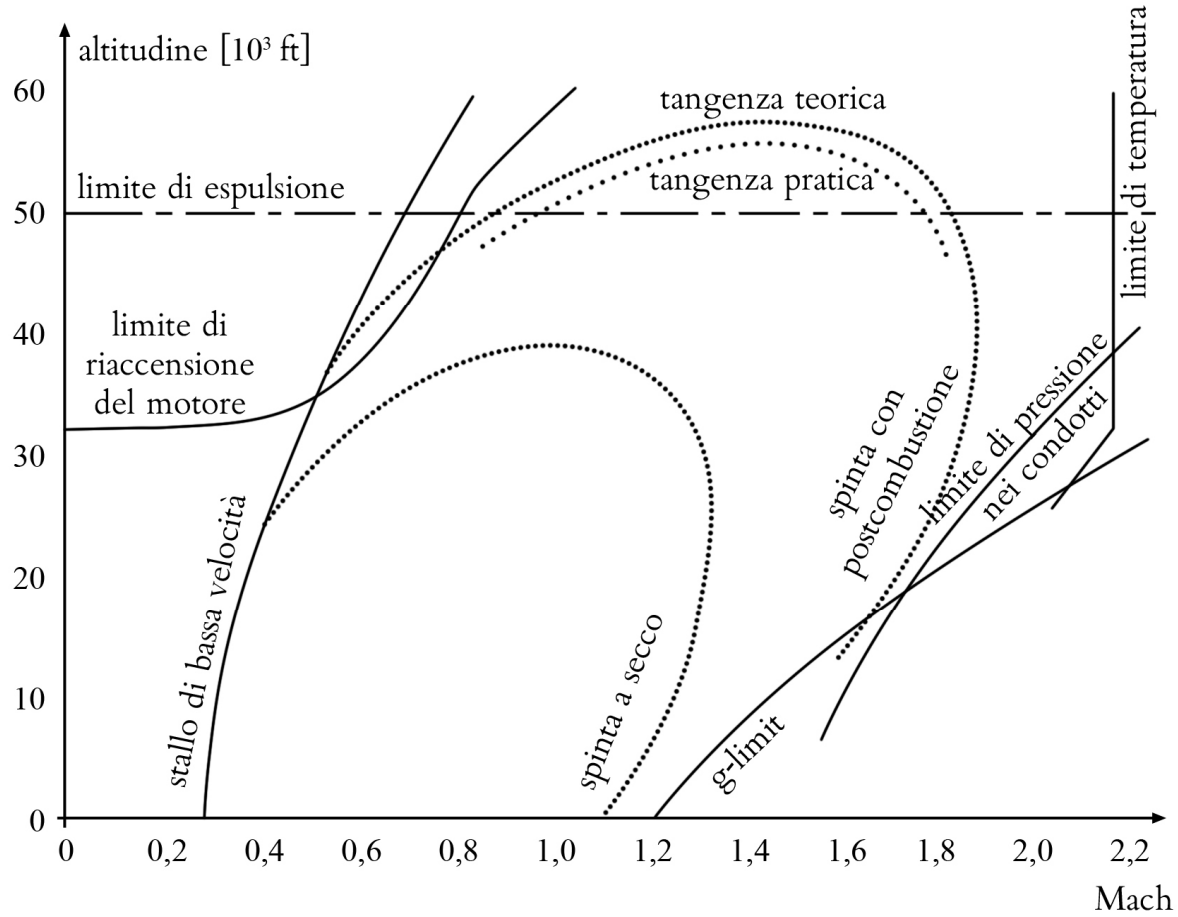


Figura 7

[5] Nel grafico c'è infatti una piccola zona in basso a destra, nella quale la linea del g-limit è interna all'inviluppo di volo.

[6] Ricordiamo che le sollecitazioni strutturali sono proporzionali alla pressione dinamica di volo.

[7] Se il numero di Mach di volo è pari a 2, la temperatura di ristagno è di circa 250 °C, mentre a 3 si arriva a temperature di circa 400 °C.

Capitolo 11

APPROFONDIMENTI E CONFRONTI TRA VELIVOLI AD ELICA E VELIVOLI A GETTO

11.1 - TECNICHE DI PILOTAGGIO DEL GETTO: FASI DI VOLO A TRAIETTORIA ED A SPINTA ASSEGNATE

Per capire le tecniche di pilotaggio degli aerei a getto dobbiamo prima mettere in evidenza come il pilota possa modificare l'angolo di rampa e la velocità di volo. Per quanto riguarda l'angolo di rampa ricordiamo che esso è legato alla differenza tra spinta disponibile e spinta necessaria (ossia resistenza)

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{T_d}{W} - \frac{D}{W}$$

perciò la pendenza della traiettoria è direttamente legata al valore della spinta erogata; la conseguenza fondamentale è dunque che il controllo della spinta diventa un controllo dell'angolo di rampa. Per quanto riguarda la velocità, dall'equazione di sostentamento

$$V = \sqrt{\frac{2\,W/S}{\varrho C_L}}$$

perciò la velocità di volo viene controllata variando il C_L, agendo sull'equilibratore. Per capire meglio facciamo qualche esempio che metta in evidenza i due effetti sopra citati; supponiamo di volare alla velocità di equilibrio V_e e di variare la spinta erogata dal motore dal valore T_d fino al valore $T_d' > T_d$.

In questo modo realizziamo un eccesso di spinta specifica positivo

$$\frac{T_d'}{W} - \frac{T_n}{W} > 0$$

e di conseguenza una variazione positiva di γ; notiamo come non sia intervenuta nessuna variazione di velocità, poiché un aumento di spinta disponibile non ha nessun effetto su V, che dipende solo dal C_L (teniamo ben presente che tale analisi è relativa a volo stazionario e a condizioni di equilibrio).

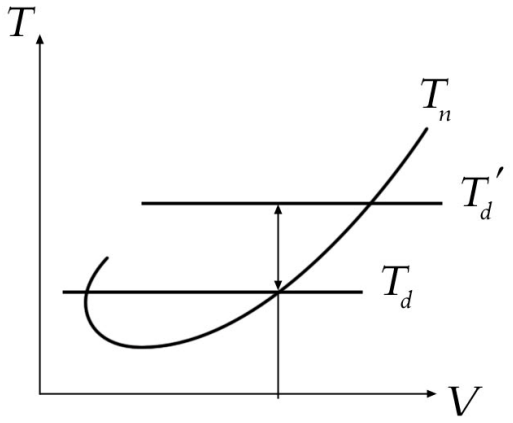


Figura 1

Supponiamo ora di essere sempre alla velocità di equilibrio V_e, ma invece che agire sulla manetta, supponiamo di agire sull'equilibratore, dando ad esempio un comando a richiamare che faccia ruotare l'equilibratore verso l'alto: il C_L aumenta e di conseguenza la velocità diminuisce portandosi al valore V'.

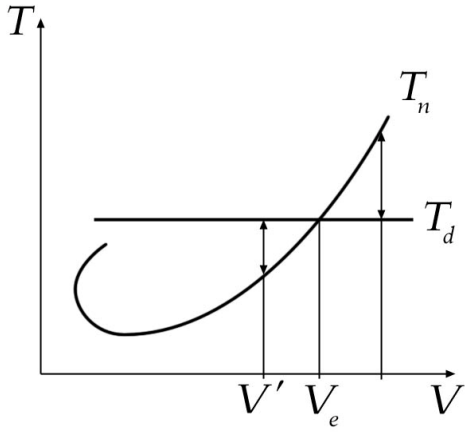


Figura 2

Osserviamo come il risultato non sia solo quello di ottenere una variazione di velocità (che comunque è l'effetto più importante del comando), ma anche un $\Delta T = T_d - T_n > 0$ e di conseguenza una variazione positiva $\Delta\gamma$ dell'angolo di rampa. La seconda conclusione fondamentale dunque è che (sempre sulla base di un'analisi di tipo stazionario) un comando

sull'equilibratore produce principalmente variazioni di velocità, ma anche una certa variazione dell'angolo di rampa. In particolare se diamo un comando a richiamare il velivolo rallenta e sale, mentre se muoviamo la barra di comando in avanti il velivolo guadagna velocità e scende (dalla figura 2 si vede infatti che per $\Delta V > 0$ si ha $\Delta T < 0$ e di conseguenza $\Delta\gamma < 0$). Riassumendo: sulla base di un'analisi di condizioni di volo stazionarie e sulla base di equazioni di equilibrio, possiamo dire che un comando sulla manetta ha effetto solo sull'angolo di rampa, mentre un comando sull'equilibratore ha un effetto principale sulla velocità ed un effetto secondario sull'angolo di rampa.

Nell'ambito delle tecniche di pilotaggio del velivolo si parla di tecnica canonica quando l'equilibratore è usato per il controllo della velocità e la manetta è usata per il controllo dell'angolo di rampa; tale tecnica è in genere impiegata in quelle fasi di volo nelle quali la spinta è assegnata, come ad esempio nella fase di salita dopo il decollo nella quale il valore della spinta è massimo: il pilota sa che deve mantenere una certa legge di velocità durante la salita, perciò, avendo come riferimento l'indicatore di velocità, agisce sulla barra (e quindi sull'equilibratore) per mantenere le velocità previste; l'angolo di rampa è quello che corrisponde al valore assegnato della spinta.

Esistono peraltro delle fasi di volo in cui si utilizza una tecnica non canonica, la quale prevede il fatto che si usi l'equilibratore per il controllo della traiettoria e la manetta per il controllo della velocità; tale tecnica viene utilizzata, per motivi che ci saranno chiari quando parleremo di dinamica del velivolo, nelle fasi di volo a traiettoria assegnata, cioè nelle fasi in cui è necessario mantenere con accuratezza una certa traiettoria di volo, come ad esempio nella fase di discesa o meglio di avvicinamento alla pista, che solitamente è effettuata lungo un radiosentiero; in una situazione di questo tipo il pilota segue lo strumento che fornisce la traiettoria (ILS *instrumental landing system*, sistema di atterraggio strumentale), il quale mostra appunto se il velivolo si trovi al di sotto o al di sopra del sentiero di discesa.

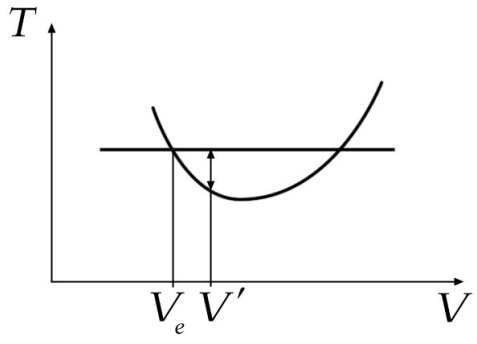


Figura 3

Il pilota controlla la traiettoria con l'equilibratore: se ad esempio si trova più in basso, il pilota effettua una richiamata che produce un aumento del coefficiente di portanza, facendo così salire il velivolo, e con un'azione opportuna sulla manetta mantiene costante la velocità

(aumenta la spinta); la stessa cosa avviene se il velivolo si trova più in alto rispetto al sentiero di discesa, nel qual caso il pilota aumenta la picchiata, per far scendere l'aeroplano rispetto al sentiero, e con un'azione opportuna sulla manetta (diminuisce la spinta) mantiene costante la velocità. Il problema che può nascere quando si voli secondo la tecnica non canonica è relativo al volo nel II regime.

Supponiamo che, a partire dalla velocità di equilibrio V_e, il pilota voglia scendere di quota utilizzando la tecnica non canonica; egli perciò effettua una picchiata, la quale produce un aumento di velocità che porta il velivolo alla V', ma trovandoci nel II regime, a tale aumento di velocità corrisponde un eccesso di spinta positivo e quindi come effetto secondario abbiamo una variazione positiva di γ: il velivolo non scende ma sale. Il pilota deve quindi essere a conoscenza del fatto che si trovi nel secondo regime, perché l'effetto del comando sull'equilibratore, in termini di angolo di rampa, è invertito rispetto a quanto accade nel I regime; la cosa diventa molto più pericolosa se pensiamo ad una manovra fatta per aumentare l'angolo di rampa, cioè per salire

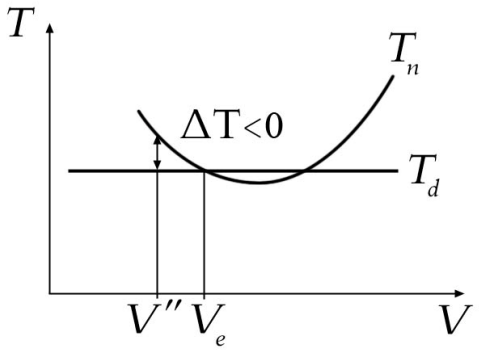
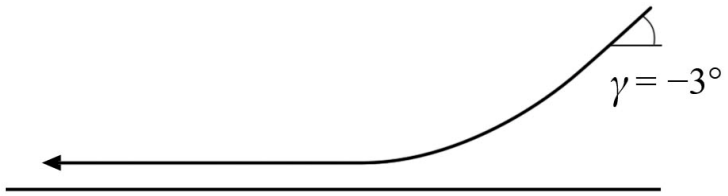


Figura 4

supponiamo di nuovo di trovarci alla velocità di equilibrio V_e nel secondo regime, ma stavolta supponiamo che il velivolo sia basso rispetto al sentiero di discesa; il pilota, che supponiamo stia conducendo l'aereo con la tecnica non canonica, dà istintivamente un comando a richiamare, il quale però porta il velivolo alla velocità $V'' < V_e$ ed in tale situazione si ha $\Delta T < 0$ con la conseguenza che il velivolo non solo non guadagna quota, ma la perde ($\Delta\gamma < 0$); ciò può istintivamente portare il pilota ad aumentare il comando di richiamata, ma il risultato è quello di mettere il velivolo in una traiettoria di discesa sempre più approfondita ed inoltre di ridurre la velocità, portando così il velivolo allo stallo.

11.2 - RICHIAMATA IN ATTERRAGGIO

Abbiamo sottolineato nel § precedente come il fatto che ci si trovi nel I o nel II regime costituisca una differenza fondamentale ai fini della tecnica di pilotaggio non canonica; un altro effetto[1] sul comportamento del velivolo dovuto al fatto che questo si trovi nel II regime si manifesta in modo abbastanza evidente durante l'effettuazione della richiamata in atterraggio: il velivolo scende lungo una traiettoria con un certo angolo di rampa, che nella maggioranza dei casi è di $-3°$ e quin-di negli istanti che precedono il momento in cui il velivolo tocca terra, il pilota deve comandare una manovra di richiamata che porti il velivolo su una traiettoria orizzontale: tale manovra prende il nome di *flare*, svasatura.



Raccordo o *flare* - Figura 5

Quando si effettua la manovra di *flare*, in genere dando un comando a richiamare, il velivolo si trova di solito nel II regime perché la velocità è molto bassa, per cui la soluzione stazionaria[2] sarà quella di una velocità ridotta (il velivolo si porta alla velocità $V'' < V_e$) con una variazione negativa dell'angolo di rampa (si veda figura 4). In questo caso però dobbiamo distinguere due comportamenti abbastanza diversi dell'aereo. Il primo caso è quello di aeroplani con carico alare piuttosto basso (il che significa una pendenza della retta di portanza, ossia C_{L_α}, piuttosto elevata), per i quali la condizione stazionaria si raggiunge piuttosto lentamente: il pilota dà un comando a richiamare, il C_L aumenta quasi istantaneamente, mentre la velocità di volo si riduce molto lentamente; perciò negli istanti iniziali delle operazioni il velivolo aumenta la sua portanza ed effettua la manovra richiesta in una condizione di massima sicurezza. Il secondo caso è relativo ad aerei con carico alare piuttosto elevato, perciò velivoli con un C_{L_α} relativamente ridotto[3], i quali tendono a raggiungere molto più rapidamente la condizione stazionaria: nel momento in cui il pilota comanda una richiamata, il C_L aumenta quasi istantaneamente come prima, ma altrettanto rapidamente la velocità diminuisce; il risultato è che l'aumento di portanza che si verificava nel caso precedente ora è più limitato e quindi l'angolo di rampa, anziché ridursi (in modulo), tende ad aumentare (in modulo) così come prevede la soluzione stazionaria; in altre parole, invece che effettuare la manovra di richiamata, il velivolo tende molto rapidamente (quasi istantaneamente) a mettersi su una traiettoria di discesa con angolo di rampa maggiore. In questo secondo caso

[1] Ricordiamo nuovamente che tali effetti vengono discussi per ora solo sulla base di un'analisi unicamente stazionaria, ma ci saranno più chiari quando parleremo della dinamica.

[2] Basata cioè sull'analisi di condizioni di volo stazionarie.

[3] Un caso tipico è quello di velivoli con ali a freccia ed allungamento alare basso.

dunque il pilota deve essere addestrato ad utilizzare tutti e due i comandi che ha a disposizione (barra e manetta) in modo tale che, nel momento in cui comandi la richiamata con la barra, agirà anche sulla manetta per produrre il necessario aumento di spinta, il quale permette di controllare l'angolo di rampa e di effettuare così il raccordo nel modo previsto.

11.3 - STABILITÀ PROPULSIVA: CONFRONTO TRA MOTOELICA E GETTO ED EFFETTO DELLA CONFIGURAZIONE

Nei §§ precedenti abbiamo introdotto[4] il discorso sulle tecniche di pilotaggio, facendo riferimento al concetto di stabilità propulsiva; a tale proposito rimane ancora qualcosa da aggiungere in merito alla stabilità propulsiva, al fine di mettere in evidenza le differenze tra aeroplano ad elica ed aeroplano a getto. Una prima differenza è stata già sottolineata quando abbiamo ricordato il fatto che, per il velivolo ad elica, la velocità di separazione tra i regimi è la *velocità di minima potenza necessaria* ed è quindi una velocità relativamente bassa, piuttosto vicina[5] alla V_S, mentre per quanto riguarda il getto la velocità di separazione tra i due regimi è la *velocità di minima spinta o di massima efficienza*[6] V_E.

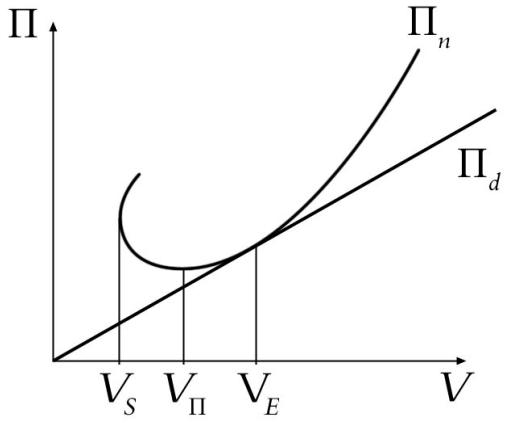


Figura 6

La conclusione è che il regime di velocità inastabili dal punto di vista propulsivo, è più esteso nel caso del getto rispetto a quello del motoelica, un primo punto a favore di quest'ultimo tipo di propulsore. Un altro punto a favore del motoelica riguarda l'intensità

[4] Come più volte ricordato tale discorso risulterà completo quando avremo analizzato anche la dinamica del velivolo, perché saremo in grado di comprendere anche il transitorio successivo ad una certa azione sui comandi.

[5] A titolo indicativo possiamo dire che V_Π è di un 20 - 30% maggiore di V_S.

[6] Tale velocità è in genere maggiore di V_S del 60-70%.

dell'azione stabilizzante di tipo propulsivo: in termini di potenza disponibile e potenza necessaria, consideriamo una certa velocità di equilibrio V_e.

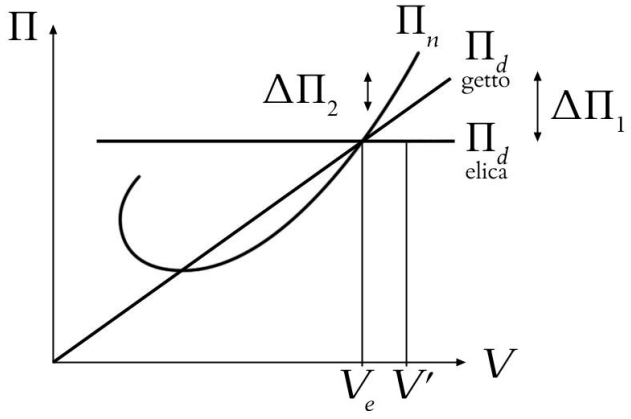


Figura 7

Supponiamo che vi sia una perturbazione sulla velocità che porti l'aeroplano alla V'. Per determinare come reagiscano i due tipi di propulsori dobbiamo far riferimento al valore dell'eccesso di potenza nella situazione perturbata: nel caso del motoelica abbiamo un $\Delta\Pi_1$, mentre nel caso del getto abbiamo un $\Delta\Pi_2$ entrambi riportati in figura 7; la conclusione è immediata perché, essendo $\Delta\Pi_1 > \Delta\Pi_2$, il velivolo ad elica sviluppa delle azioni stabilizzanti[7] più intense di quelle sviluppate dal velivolo a getto. In breve, il problema della stabilità propulsiva è molto più delicato nel caso del getto e se teniamo presente anche quanto detto riguardo alle tecniche di pilotaggio nel II regime, ci rendiamo conto che tutti gli aspetti relativi alla stabilità propulsiva sono più critici per i motori a getto e tale criticità si rivela maggiormente nelle fasi di volo a bassa velocità, situazione in cui rischiamo di volare nel II regime. Peraltro, nelle fasi di volo a bassa velocità quali decollo ed atterraggio, si utilizzano spesso, se non sempre, gli organi di ipersostentazione e per questo motivo è necessario studiare l'effetto della configurazione sulla stabilità propulsiva. Facendo riferimento al getto, tracciamo le curve relative alla T_n in funzione dell'angolo degli ipersostentatori.

[7] Nel primo regime.

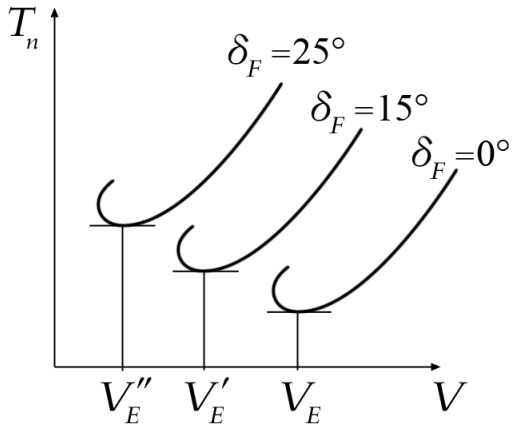


Figura 8

Osserviamo come estendendo gli ipersostentatori le cose migliorino, perché si riduce la V_E e quindi si estende la regione di I regime: tale effetto, alla luce di quanto detto prima, è molto importante per gli aviogetti, perché permette di volare a velocità piuttosto basse pur rimanendo nel regime di stabilità propulsiva.

11.4 - AUTONOMIA SPECIFICA DEI MODERNI AEREI A GETTO DA TRASPORTO: SELEZIONE DI VELOCITÀ E QUOTA DI VOLO

Un getto da trasporto dovrà certamente operare per effettuare una crociera con costi minimi, perciò torniamo a parlare nuovamente dell'autonomia degli aerei a getto per mettere in evidenza alcuni importanti aspetti pratici, nel § successivo faremo lo stesso per gli aerei ad elica. In particolare cerchiamo di capire come vengano selezionate la velocità e la quota di volo. Stiamo riaffrontando dal punto di vista pratico il problema dell'autonomia per il fatto che, per i motivi che vedremo, la soluzione individuata nel § 9.6, ovvero che l'autonomia chilometrica di un getto è massima quando voliamo ad alta quota ed alla velocità $V_{T/V}$, ha una validità pratica limitata. Definiamo l'*autonomia specifica* come la distanza percorsa per unità di combustibile utilizzato

$$\frac{dx}{dW}$$

e per esprimere tale grandezza partiamo al solito dalla definizione di consumo specifico, dalla quale, come già visto nel § 9.6 arriviamo a

$$\frac{dW}{dt} = -C_S \frac{W}{E}$$

che invertita e moltiplicata per V diviene

$$\frac{dx}{dW} = -\frac{E}{C_S}\frac{V}{W}.$$

Occorre selezionare la condizione di volo in crociera che renda massima l'autonomia specifica, notando che ciò non contraddice quanto ricavato nel § 9.6: alla velocità $V_{T/V}$, ed alla massima quota possibile, certamente tale parametro è massimizzato; nella pratica invece le cose non vanno in questo modo: se voliamo su un getto da trasporto in condizioni di crociera la velocità di volo non è $V_{T/V}$, ma sarà sicuramente minore ed in particolare quasi sempre prossima alla V_E. Quindi, al fine di massimizzare l'autonomia specifica nel caso pratico, la prima cosa che viene fatta è selezionare un valore dell'incidenza molto prossimo a quello di massima efficienza; in particolare si seleziona un valore del C_L leggermente minore del C_{L_E} così che la velocità di volo risulti leggermente maggiore di V_E. Diviene spontaneo chiedersi per quale motivo non si voli proprio alla velocità di massima efficienza; anzitutto non è sicuro volare esattamente nella condizione limite di stabilità, perciò si tende a volare a velocità superiori di V_E per trovarsi così nel I regime; un altro vantaggio è che, in tal modo, l'incidenza sarà meno elevata, perciò si ridurranno gli incrementi di velocità in corrispondenza del bordo d'attacco che producono problemi, in termini di M_{cr}, quando teniamo conto degli effetti della compressibilità. Notiamo infine che, per il tipo di profili che si usano in genere, la curva E - α presenta una curvatura ridotta in prossimità del massimo, quindi se variamo un po' l'incidenza rispetto al valore che produce la massima efficienza, il valore di E si allontana molto poco da E_{max}.

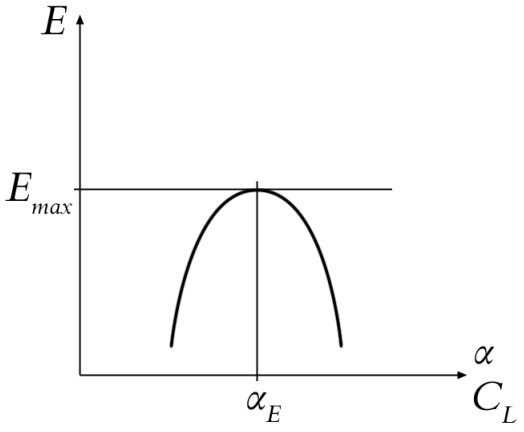


Figura 9

Il passo successivo è quello di rendere massima la velocità di volo, avendo selezionato quel particolare valore dell'incidenza; per fare ciò agiamo sulla quota: aumentando *h*, aumenterà la velocità e tanto più quest'ultima aumenta, tanto maggiore sarà l'autonomia specifica e quindi tanto più la crociera sarà conveniente dal punto di vista dei costi. Non possiamo però salire oltre la quota di tangenza; inoltre è presente un fattore che limita la quota di volo prima ancora che si raggiunga la quota di tangenza pratica: abbiamo detto che più voliamo alti e più la velocità è elevata, ma alle alte velocità cominciano a diventare sempre più importanti gli effetti della compressibilità dell'aria, il cui effetto è quello di ridurre il valore dell'efficienza; dunque oltre una certa quota non è più conveniente volare perché ciò che guadagniamo in termini di velocità lo perdiamo in termini di efficienza aerodinamica e quindi il limite sulla quota è regolato dal prodotto *VE*.

Quest'ultima considerazione ci porta al motivo per cui, nella pratica, non ha molto interesse il valore $V_{T/V}$: tale valore risulta infatti notevolmente maggiore di V_E, come è immediato verificare andando a calcolare il rapporto

$$\frac{V_{T/V} - V_E}{V_E} = \frac{V_{T/V}}{V_E} - 1 = \sqrt{\frac{C_{L_E}}{C_{L_{T/V}}}} - 1$$

che, tenuto conto della espressione $C_{L_E} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{K}}$, ricavata nel § 5.2, e della $(C_L)_{T/V} = \sqrt{\frac{C_{D_0}}{3K}}$, ricavata nel § 9.2, diventa

$$\frac{V_{T/V}}{V_E} - 1 = \sqrt[4]{3} - 1 \approx 0,32$$

da cui si evidenzia che $V_{T/V}$ è maggiore di V_E del 32% circa. Il risultato teorico raggiunto nel § 9.6 dunque prescinde dagli effetti della compressibilità: non possiamo volare ad alta quota a quel valore dell'angolo d'attacco, perché il numero di Mach risulterebbe troppo elevato[8] ed il vantaggio di volare tanto alti sarebbe annullato dalla netta diminuzione di efficienza aerodinamica. Tale risultato teorico avrebbe senso anche dal punto di vista pratico solo se esistesse una qualche limitazione alla quota massima di volo: se ad esempio fosse impossibile volare al di sopra di 4˙000 m (per un motivo fittizio) risulterebbe conveniente volare all'incidenza $(C_L)_{T/V}$, ma laddove non esistano limitazioni di questo tipo sulla quota, la procedura che viene seguita per selezionare velocità e quota di volo è quella descritta. Facciamo

[8] Ci troveremmo al di sopra del numero di Mach di divergenza della resistenza.

un esempio: osserviamo in figura 10a un grafico che riporta la relazione tra la velocità e l'autonomia specifica[9] che usa come parametro la quota[10], ricavato senza considerare gli effetti della compressibilità; vediamo come in questo caso valga effettivamente quanto indicato dalla soluzione teorica: voliamo all'incidenza che rende massimo il rapporto $\frac{E}{\sqrt{C_L}}$, e tanto più alta è la quota, tanto più l'autonomia specifica aumenta.

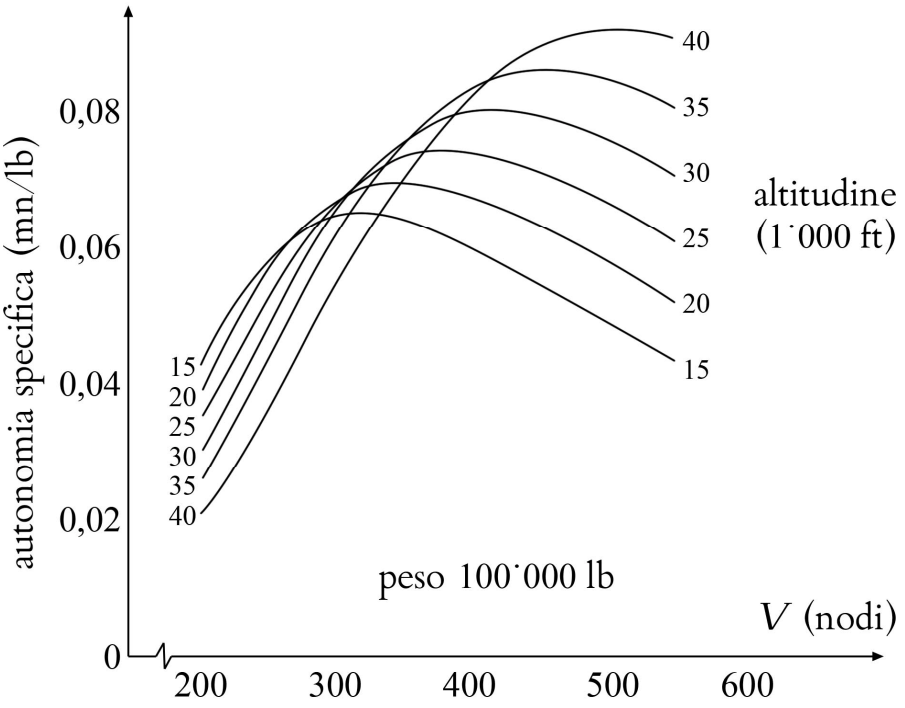


Figura 10a

[9] Nel sistema imperiale tale grandezza è indicata in miglia percorse su libbre di combustibile.
[10] Riportata in migliaia di piedi.

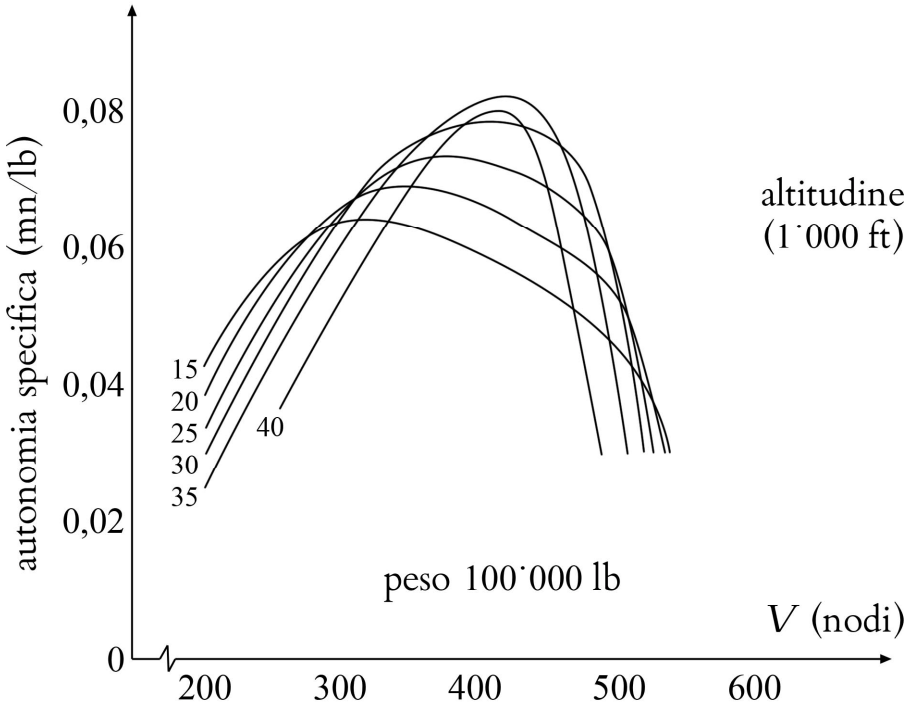


Figura 10b

Come già detto però, questa soluzione non tiene conto della compressibilità e ciò è confermato dal grafico in figura 10b, il quale è ricavato tenendo conto invece di questi effetti: osserviamo come le curve si schiaccino una sull'altra una volta raggiunte velocità tali che l'aumento di resistenza diventi significativo. Alle basse velocità l'angolo d'attacco che corrisponde al massimo dell'autonomia specifica è ancora quello che rende massimo il rapporto $\frac{E}{\sqrt{C_L}}$, ma quando la velocità aumenta le cose cambiano; notiamo infatti che una volta raggiunti i 35˙000 ft di quota il numero di Mach comincia a far sentire i suoi effetti, perciò se saliamo a 40˙000 ft l'autonomia specifica diminuisce. Per il velivolo in questione perciò, data una certa condizione di carico, sarebbe preferibile volare a 35˙000 ft di quota.

11.5 - AUTONOMIA SPECIFICA DEGLI AEROPLANI AD ELICA

Per il velivolo ad elica abbiamo detto (si veda § 7.5) che la condizione di ottimo per la crociera è quella che identifica l'angolo d'attacco cui corrisponde l'efficienza massima, mentre non vi è alcun effetto né della quota né della velocità di volo sull'autonomia. In termini di consumo specifico

$$C_S \frac{WV}{\eta_P E} = -\frac{dW}{dt}$$

dalla quale, invertita e moltiplicata per V, si ottiene

$$\frac{dx}{dW} = -\eta_P \frac{E}{C_S} \frac{1}{W}.$$

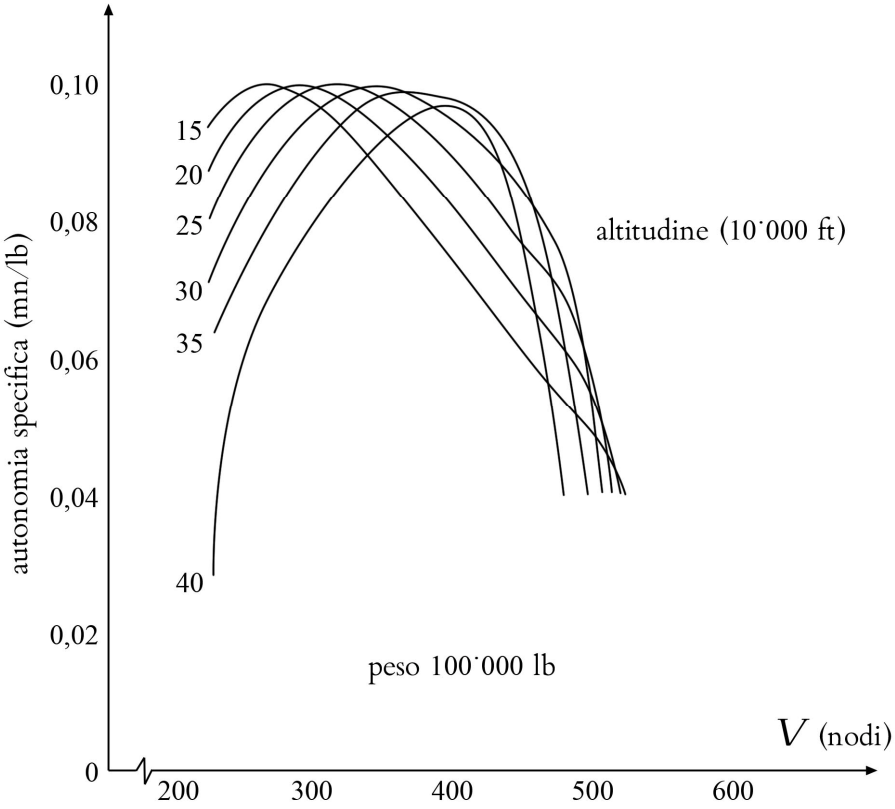


Figura 11

Non v'è quasi nulla da aggiungere rispetto al caso studiato in precedenza: l'autonomia specifica non dipende dalla velocità di volo e quindi la velocità di crociera sarà certamente quella che corrisponderà alla massima efficienza aerodinamica[11], tenendo anche conto che tale velocità non sarà particolarmente elevata; inoltre l'autonomia specifica non dipende dalla quota, ma abbiamo già detto che conviene sicuramente volare ad alta quota poiché, a parità di combustibile consumato, la velocità è più elevata e quindi si riduce il tempo di volo e di conseguenza i costi d'esercizio. Anche in questo caso possiamo mostrare un grafico (vedi figura 11) il quale ci conferma che il valore massimo dell'autonomia specifica non dipende dalla quota, ed inoltre ci mostra l'effetto della compressibilità che schiaccia le diverse curve tut-

[11] Anche nel caso del motore ad elica si può però scegliere di volare a velocità leggermente superiore a V_E, anche se questo non ha alcun effetto sulla stabilità propulsiva.

te sullo stesso valore; teniamo però presente che tale grafico è costruito trascurando gli effetti della compressibilità sull'elica ed in particolare sull'estremità delle pale.

11.6 - CALCOLO DEL CONSUMO TOTALE PER UN ASSEGNATO PROFILO DI MISSIONE: DIAGRAMMA DI MISSIONE E DIAGRAMMA AUTONOMIA - CARICO

Quando effettuiamo il calcolo della quantità di combustibile richiesta da un velivolo, facciamo sempre riferimento a dei grafici detti *grafici di missione*, i quali rappresentano il tipo di missione che quel determinato aeromobile deve svolgere e per i quali devono essere calcolati i consumi, la figura 12 rappresenta una missione tipica di un velivolo da trasporto. Da tale grafico osserviamo come nel calcolo totale del combustibile intervengano anche certe fasi che non avevamo considerato sinora. Inizialmente abbiamo un riferimento alla fase di rullaggio (in inglese *taxi*, cioè tutto ciò che accade dal momento in cui il velivolo accende i motori sino al momento in cui si porta alla testa della pista) e di decollo; queste fasi possono richiedere alcuni minuti perciò non possiamo trascurare il combustibile che viene consumato; senza aggiungere dettagli superflui, affermiamo che in tali fasi il combustibile necessario viene calcolato come una certa percentuale del peso lordo dell'aeroplano al decollo[12]; successivamente troviamo la fase di salita, la fase di crociera, le eventuali variazioni di quota ed infine la fase di discesa[13]. Osserviamo però come si tenga sempre presente, nel calcolo del combustibile da caricare a bordo, la possibilità di raggiungere un aeroporto alternativo[14]: dobbiamo quindi considerare un altro tratto in salita, una nuova fase di crociera ed infine una fase in discesa, nella quale viene anche considerata l'eventualità che il velivolo debba restare in attesa per un periodo di 45 minuti. Una volta che abbiamo calcolato il combustibile necessario a ciascuno di questi segmenti, sappiamo quanto combustibile debba essere imbarcato a bordo.

[12] Per avere un'idea di tale percentuale, possiamo dire che per le fasi di rullaggio prima del decollo, decollo e rullaggio dopo l'atterraggio, il combustibile necessario viene stimato intorno allo 1% del peso lordo al decollo dell'apparecchio.

[13] In calcoli di prima approssimazione il consumo del tratto in discesa può essere fatto come se stessimo percorrendo la stessa distanza in volo orizzontale, quindi come se fosse un'estensione del tratto in crociera.

[14] I motivi possono essere il traffico aereo, più frequentemente le condizioni meteo oppure un guasto.

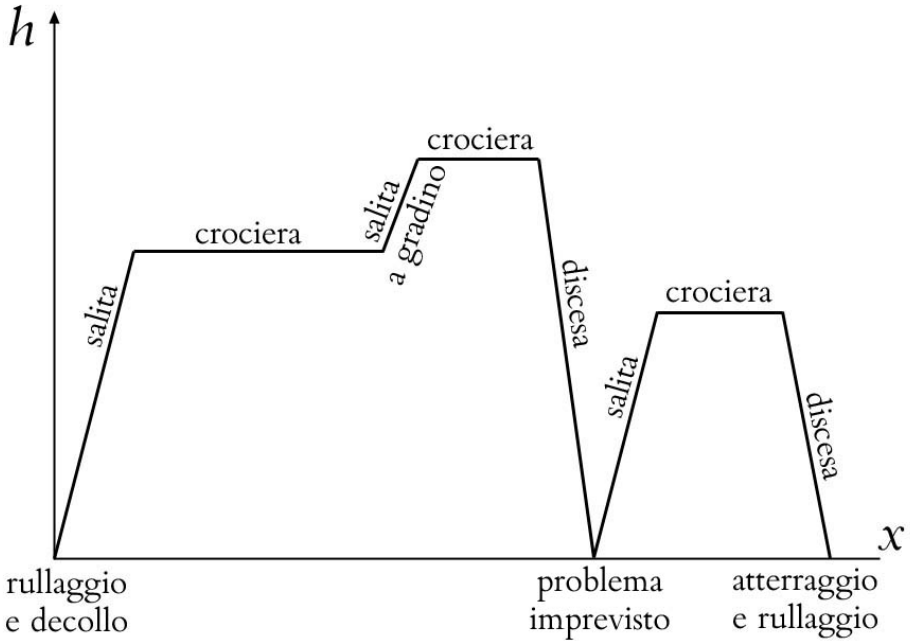


Figura 12

Un altro grafico che rappresenta abbastanza bene le prestazioni di un velivolo per ciò che riguarda i consumi in crociera è il cosiddetto grafico raggio d'azione - carico (in inglese *range-payload*).

Tale grafico è costituito da un insieme di linee rette e, dato un certo tipo di aereo, permette di conoscere il carico utile trasportabile, in funzione della distanza percorsa. La prima retta corrisponde ad un valore costante del carico in funzione dell'autonomia: abbiamo caricato al massimo il velivolo e tanto più combustibile imbarcheremo tanto più sarà possibile andare lontano; quindi lungo tale retta siamo a pieno carico e l'unica cosa che varia è il peso totale del velivolo poiché per aumentare l'autonomia dobbiamo imbarcare una maggior quantità di combustibile.

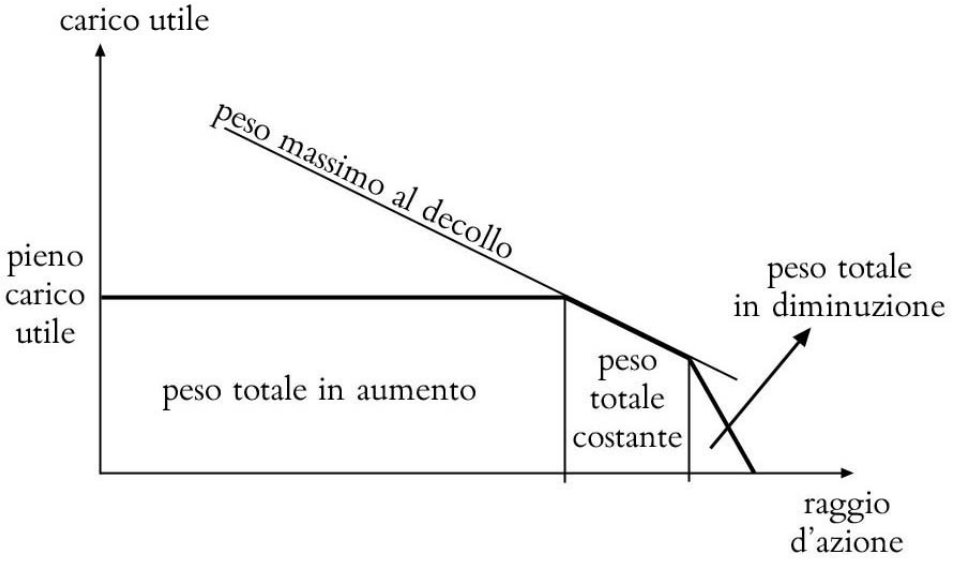


Figura 13

Questo è possibile però fintanto che non raggiungiamo il primo punto di intersezione, corrispondente al massimo peso al decollo: in tele situazione non possiamo più imbarcare ulteriore combustibile per aumentare l'autonomia, a meno che non si riduca il carico; ciò si traduce graficamente in una retta inclinata, lungo la quale stavolta è il peso totale del velivolo ad essere costante (e pari al valore massimo ammesso per il decollo) mentre il carico va diminuendo a favore di una maggior quantità di combustibile imbarcato e quindi di una maggior autonomia.

Arriviamo così al secondo punto di intersezione, il quale corrisponde all'aver riempito completamente i serbatoi: perciò se è necessario percorrere una distanza maggiore, non possiamo far altro che ridurre il peso del velivolo, riducendo così il numero dei passeggeri o del bagaglio; lungo il terzo segmento quindi si mantiene costante il peso del combustibile (pari al massimo imbarcabile), mentre diminuisce il carico, ancora a favore di una maggior autonomia.

Comprensibilmente quest'ultima condizione rappresenta una situazione molto svantaggiosa per la gestione del velivolo; si noti a tal proposito che il terzo segmento è molto inclinato, perciò per aumentare di poco l'autonomia, occorre una forte riduzione del carico.

11.7 - CARATTERISTICHE DI SALITA: CONFRONTO MOTOELICA - GETTO ED EFFETTO DELLA MANETTA, DEL PESO E DELLA CONFIGURAZIONE

Abbiamo già discusso del problema delle prestazioni in salita sia del motoelica che del getto; vediamo ora di fornire qualche altro elemento relativo alle caratteristiche di salita, confrontando tra loro motoelica e getto ed aggiungendo alcuni interessanti informazioni

pratiche. È utile quindi richiamare i risultati cui siamo arrivati e lo facciamo attraverso i grafici (già noti) riportati in figura 14.

Parliamo di salita ripida e di salita rapida sia per il getto (rispettivamente figura 14a e figura 14b) che per il motoelica (figura 14c e figura 14d) e ricordiamo che per la salita ripida ragioniamo in termini di T_n e T_d (figura 14a e figura 14c), mentre per la salita rapida ragioniamo in termini di Π_n e Π_d (figura 14b e figura 14d). Nel caso del getto, la salita ripida avviene alla velocità di massima efficienza, mentre per il motoelica avviene a basse velocità, tipicamente alla velocità di stallo; per la salita rapida invece, nel caso del getto essa avviene tutta a velocità superiori di quella di massima efficienza (tende alla V_E quando la quota si avvicina alla quota di tangenza), mentre nel caso del motoelica essa avviene alla velocità di minima potenza necessaria, la quale è più bassa di V_E. Dunque la prima osservazione è che la salita del getto, sia che si tratti di salita rapida che di salita ripida, avviene tutta a velocità superiori rispetto al motoelica e ciò, dal punto di vista operativo, ha determinate conseguenze: affinché il motore a getto salga in modo efficiente, o comunque in una condizione di ottimo (che sia una salita rapida o ripida) è necessario che prima raggiunga una velocità elevata; quindi, terminata la fase di decollo, deve convenientemente accelerare prima di entrare nella fase di salita; ciò è causa di problemi, anzitutto perché non è così favorevole dal punto di vista della sicurezza volare a bassa quota e ad alta velocità, e poi perché c'è il problema relativo alla turbolenza atmosferica, la quale, per quanto riguarda la perturbazione della velocità, risulta particolarmente intensa alle basse quote di volo ed inoltre un velivolo risulta tanto più influenzato, dal punto di vista strutturale, dalla turbolenza atmosferica, quanto maggiore è la velocità di volo. Il motoelica invece non ha questo tipo di problemi perché appunto la salita di un velivolo ad elica avviene tutta a velocità relativamente basse[15].

[15] È un discorso poco valido, in quanto un aeromobile a getto può agevolmente accelerare in salita ed in pochi secondi.

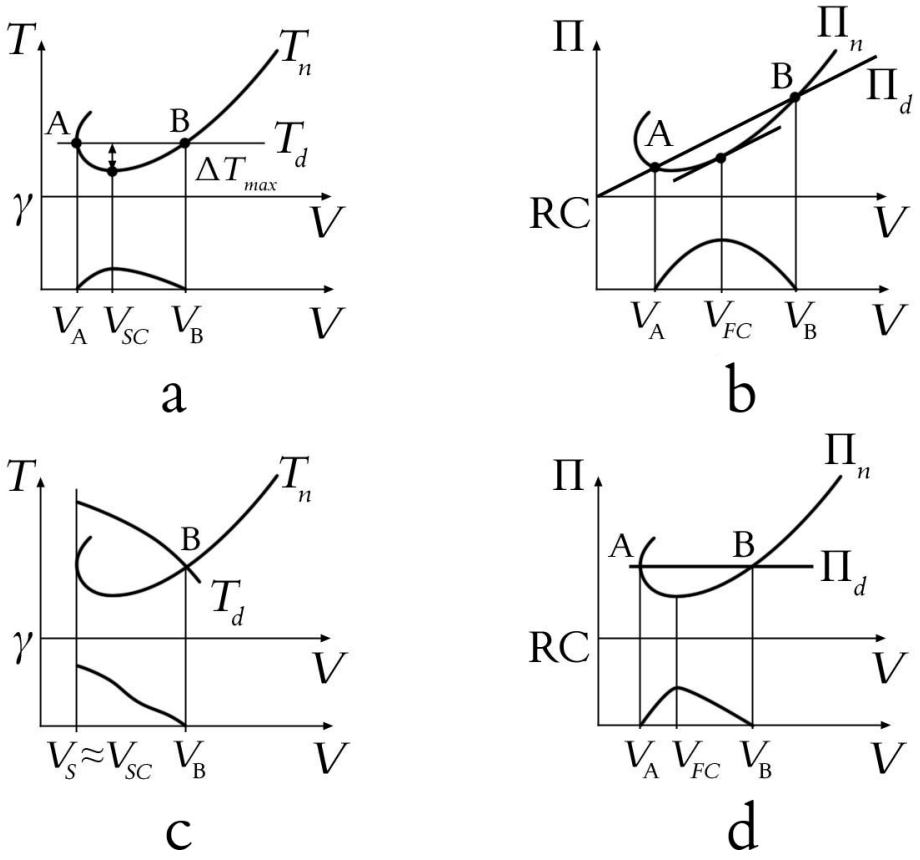


Figura 14

Esistono ulteriori differenze che possiamo dedurre dalla figura 14 relativamente al comportamento dei due tipi di propulsione: se un getto sale alla velocità di salita rapida, piccole variazioni di velocità lungo la traiettoria producono piccole variazioni di velocità ascensionale; in altre parole se non voliamo esattamente alla V_{FC}, ma ad una velocità prossima (sia minore che maggiore) a V_{FC}, la velocità di salita non subisce variazioni rilevanti. Ciò non accade invece per il motoelica, per il quale variazioni anche limitate della velocità lungo la traiettoria producono delle variazioni consistenti della velocità ascensionale. Quindi un velivolo ad elica è più sensibile di un getto a scostamenti dai valori ottimi di velocità lungo la traiettoria di salita.

Passiamo ora ad analizzare alcuni aspetti che non avevamo ancora considerato, facendo sempre riferimento sia al motoelica che al getto. Un primo effetto da tener in considerazione è quello della manetta e lo facciamo relativamente alla salita rapida che è la più importante.

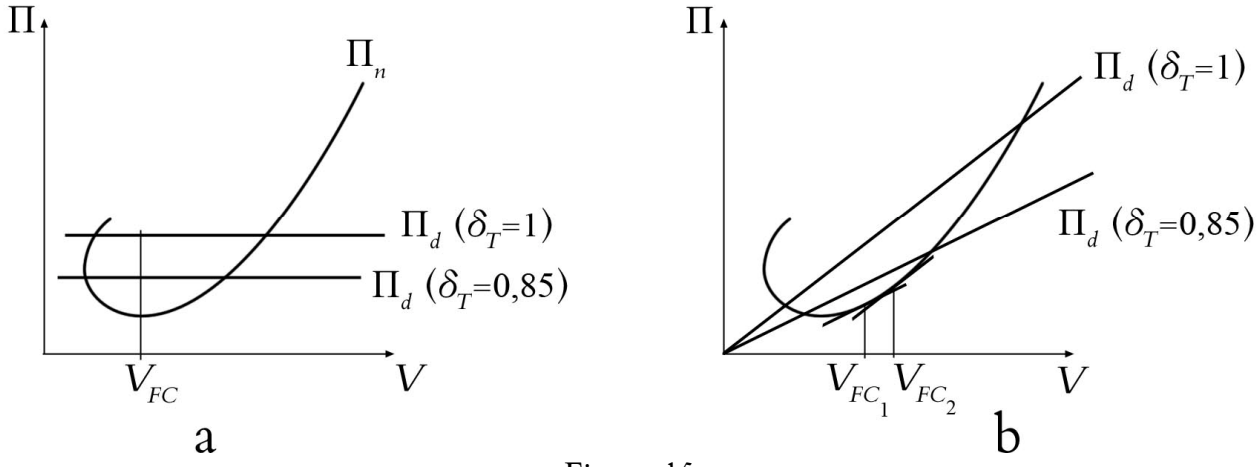


Figura 15

La figura 15 ci mostra che se agiamo sulla manetta di un motoelica riducendo la potenza erogata, la velocità di salita rapida resta inalterata (figura 15a), mentre se riduciamo la spinta (e quindi la potenza) erogata da un getto, anche la velocità di salita rapida decresce (figura 15b).

Parlando di caratteristiche di salita è interessante anche fare un confronto tra motoelica a passo fisso e motoelica a passo variabile (quindi a giri costanti).

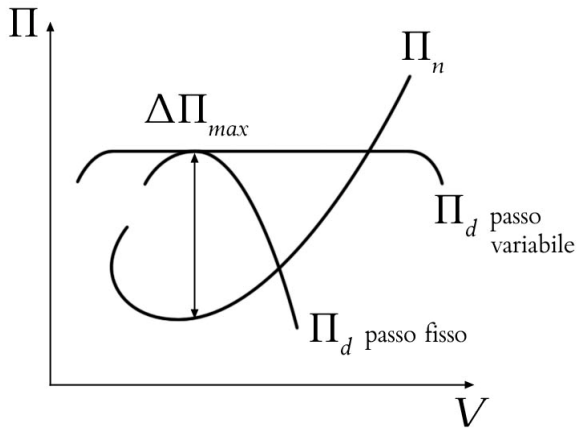


Figura 16

Notiamo come il valore di $\Delta\Pi_{max}$ è circa lo stesso nei due casi, ma per il motoelica a passo fisso non appena ci allontaniamo da quella condizione la potenza disponibile diminuisce molto rapidamente per questa ragione abbiamo una sola velocità ottima; ciò invece non accade nel caso del motoelica a giri costanti, che ha quindi delle caratteristiche di salita migliori. Un'osservazione che non rientra nell'analisi delle caratteristiche di salita ma che comunque è utile fare, riguarda le velocità massime: osserviamo come sia maggiore la velocità massima di volo a livello ottenuta da un motoelica a giri costanti, rispetto al caso in cui sullo stesso motore sia installata un'elica a passo fisso; ricordiamo inoltre che in quel ramo della

curva, la Π_n è proporzionale al cubo della velocità e questo tipo di proporzionalità è un fattore molto limitativo della velocità massima di volo a livello.

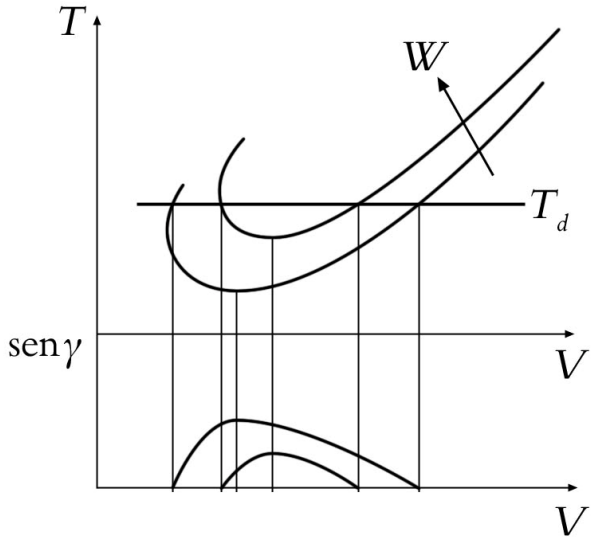


Figura 17

Gli effetti che ci restano da analizzare sono quelli del peso e della configurazione ed anche in questo caso molte indicazioni vengono date da un'analisi grafica. Discutiamo gli effetti di una variazione di peso sulle caratteristiche di salita di un getto; tenendo conto di quanto detto alla fine del § 6.16, tracciamo le curve di spinta necessaria al variare del peso e facciamo riferimento ad un certo valore di spinta disponibile.

Se sulla base di tale grafico riportiamo qualitativamente l'angolo di rampa (o il suo seno) in funzione della velocità ed osserviamo come un aumento del peso produca un peggioramento delle caratteristiche di salita poiché la velocità di salita ripida (ma si può dimostrare che lo stesso vale per la velocità di salita rapida) si sposta a valori più alti.

L'altro effetto che vale la pena di discutere è quello relativo all'utilizzo degli ipersostentatori; anticipiamo subito che l'estensione degli ipersostentatori peggiora le caratteristiche di salita poiché dobbiamo tener presente che con gli ipersostentatori estesi, si ha un aumento di spinta necessaria ed una riduzione dell'efficienza massima: quindi tutto ciò che dipende dalla spinta (e potenza) necessaria o da alti valori dell'efficienza massima, risulta peggiorato. In particolare, se tracciamo l'andamento della T_n per $\delta_F = 0$ e $\delta_F = 15°$, facciamo riferimento ad un certo valore di T_d e tracciamo l'andamento qualitativo di $\operatorname{sen}\gamma$ così come può essere dedotto dal grafico di figura 17, otteniamo il grafico di figura 18.

Tale grafico mostra che, con gli ipersostentatori estesi, la V_{SC} diminuisce, ma le prestazioni degradano e si può dimostrare (in termini di potenza) che lo stesso vale per la salita rapida; questo porta ad una conclusione rilevante: per salire in modo efficiente, quindi con elevate velocità variometriche od elevati gradienti di salita, si deve rendere la configurazione

pulita, perché l'estensione degli ipersostentatori non riduce solamente le velocità caratteristiche durante la salita, ma anche il massimo gradiente e la massima velocità ascensionale[16].

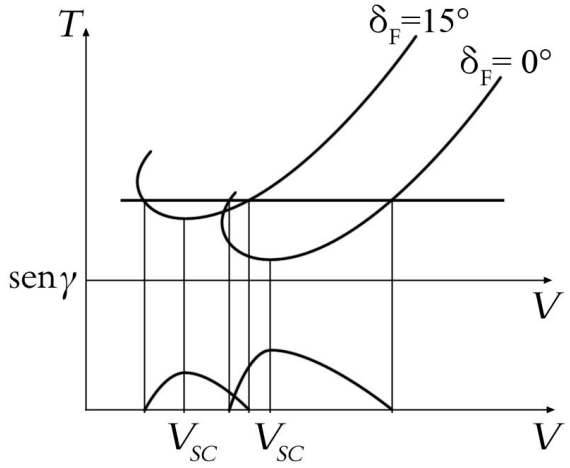


Figura 18

11.8 - SALITA A VELOCITÀ NON COSTANTE

Eliminiamo ora alcune ipotesi semplificative, concludendo così l'analisi dei regimi di salita. In particolare ricordiamo che l'ipotesi di salita a velocità costante nel caso degli aerei a getto è piuttosto limitativa. Rimuovendo tale ipotesi, introduciamo un opportuno fattore correttivo. Per tener conto di variazioni di velocità lungo la traiettoria, innanzitutto occupiamoci del gradiente di salita e partiamo dall'equazione del moto in direzione longitudinale, scritta in assi vento

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - W \operatorname{sen}\gamma$$

dove il termine $\frac{dV}{dt}$ può essere scritto come

[16] Se per esempio si pianta uno dei motori di un bimotore ad elica o durante la corsa di decollo od appena questo si stacchi da terra, il pilota dovrà mettere immediatamente in bandiera l'elica, staccare l'alimentazione, ritirare gli ipersostentatori ed il carrello per pulire la configurazione e molto faticosamente riuscirà non a guadagnare quota, ma quantomeno a mantenerla; su un tale tipo di velivolo infatti l'avaria ad un motore è prevista, ma la spinta e la potenza sono proprio ai valori minimi necessari. Sottolineiamo quindi che in una situazione di questo tipo si vola meglio con gli ipersostentatori retratti, anzi si deve immediatamente rendere la configurazione del velivolo pulita.

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dh} V \operatorname{sen}\gamma$$

avendo tenuto conto che $\frac{dh}{dt} = V \operatorname{sen}\gamma$ è proprio la velocità variometrica. Sostituendo l'espressione appena scritta nella precedente e dividendo per il peso otteniamo

$$\frac{1}{g}\frac{dV}{dh} V \operatorname{sen}\gamma = \frac{T - D}{W} - \operatorname{sen}\gamma$$

che esplicitata rispetto al gradiente diviene

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{T - D}{W}\frac{1}{1 + \frac{V}{g}\frac{dV}{dh}}.$$

Notiamo quindi lo stesso termine che avevamo considerato sino a questo punto ($\frac{T - D}{W}$) il quale però è ora moltiplicato per un fattore detto *fattore di correzione di energia cinetica* del velivolo: tale termine rappresenta cioè una correzione legata ad una variazione di velocità. Se la velocità non varia con la quota tale termine risulta unitario, come nel caso sinora studiato. Se invece la velocità aumenta con la quota, il termine $\frac{dV}{dh}$ è positivo e l'effetto sarà quello di ridurre il gradiente di salita e ciò è corretto anche dal punto di vista fisico: l'energia immessa nel sistema è sempre la stessa[17], e per questo ciò che si guadagna in termini di energia cinetica si perde in termini di energia potenziale, salendo con pendenze minori. Per avere un'idea del valore di tale fattore di correzione, discutiamo la seguente tabella[18].

Tipo di salita	Altitudine	$\frac{V}{g}\frac{dV}{dh}$ (approssimata)
Velocità vera costante	Qualsiasi	0
V_{EAS} costante	Sopra gli 11˙000 m	0,7
V_{EAS} costante	Sotto gli 11˙000 m	0,567
M costante	Sopra gli 11˙000 m	0
M costante	Sotto gli 11˙000 m	− 0,133

[17] Tale energia è infatti legata al prodotto $(T_d - T_n)V$.

[18] Ricordiamo che 11˙000 m corrispondono alla quota, nell'aria tipo, che separa la troposfera dalla stratosfera.

Il primo tipo di salita che viene preso in considerazione è la salita a velocità vera costante, con correzione nulla; tale soluzione però è assai limitativa soprattutto prendendo in considerazione l'inviluppo del velivolo a getto, per il quale si utilizza invece una salita a $V_{EAS} = \text{cost.}$ od a $M = \text{cost.}$: per quanto riguarda la salita a $V_{EAS} = \text{cost.}$ abbiamo due diversi valori del fattore di correzione (espresso in termini del numero di Mach al quadrato) relativi alle diverse leggi di variazione delle caratteristiche fisiche dell'atmosfera a seconda che ci si trovi al di sotto o al di sopra della tropopausa; la cosa importante da notare comunque è che in entrambi i casi si tratta di un fattore di correzione positivo poiché volare a $V_{EAS} = \text{cost.}$ significa aumentare la velocità di volo durante la salita. Anche per quanto riguarda la salita a $M = \text{cost.}$ (si compie generalmente durante la fase finale della salita) il fattore di correzione cambia a seconda che ci si trovi nella troposfera o nella stratosfera: nella stratosfera la temperatura in aria tipo è costante ed è perciò costante la velocità del suono, al di sopra quindi degli 11˙000 m volare a $M = \text{cost.}$ significa volare a $V = \text{cost.}$ e quindi il fattore correttivo è pari a zero; se siamo invece nella troposfera la temperatura (e con questa la velocità del suono) in aria tipo decresce all'aumentare della quota e per questo volare a $M = \text{cost.}$ significa volare a velocità vera decrescente e quindi il fattore correttivo sarà negativo: dovremo perciò aspettarci valori dell'angolo di rampa maggiori di quelli che avremmo nel caso di volo a velocità costante.

11.9 - REQUISITI DELLE NORME SU γ_{min}

La condizione di salita ripida, nel caso degli aeroplani a getto, riveste una notevole importanza, soprattutto per quanto riguarda alcuni aspetti delle prescrizioni regolamentari che in certe fasi di volo richiedono la realizzazione di gradienti minimi di salita, fissando così anche dei requisiti sul dimensionamento dell'apparato propulsivo. Dalle equazioni di equilibrio

$$\frac{W}{g}\dot{V} = T - D - W\,\text{sen}\,\gamma$$
$$-\frac{W}{g}V\dot{\gamma} = W\cos\gamma - L$$

ricavate nel § 4.10, nelle ipotesi che $\dot{\gamma} = \dot{V} = 0$, $L = W\cos\gamma$, si ha

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{T}{W} - \frac{D}{W} = \frac{T}{W} - \frac{\cos\gamma}{E}$$

supponendo, come sempre, che l'angolo di rampa sia piccolo ($\cos\gamma \approx 1$)

$$\text{sen}\,\gamma \approx \frac{T}{W} - \frac{1}{E}$$

Tale relazione è utile perché mostra come l'angolo di rampa realizzabile in salita sia funzione esclusivamente del rapporto $\frac{T}{W}$ e dell'efficienza aerodinamica *E*; se perciò ci troviamo di fronte alla necessità di garantire certi valori minimi di γ possiamo agire su questi parametri. Per modificare il rapporto $\frac{T}{W}$ dobbiamo dimensionare i motori in modo tale che la spinta erogata sia quella necessaria per salire con il gradiente minimo stabilito, ma ciò significherà motori più grandi e conseguentemente più pesanti; è perciò possibile lavorare sull'efficienza, per renderla massima. Dobbiamo tener presente che durante le fasi immediatamente successive al decollo la velocità è bassa e quindi la resistenza indotta costituisce il grosso della resistenza del velivolo (è circa tre volte quella di attrito); per ridurre tale resistenza al momento del progetto possiamo modificare l'allungamento alare: tipicamente bimotori da trasporto a getto possedevano, ed in qualche caso possiedono ancora, un allungamento maggiore di quello dei quadrimotori, poiché per un bimotore la condizione di progetto che prevede il mantenimento di certe prestazioni minime con un motore in avaria è chiaramente più critica. Teniamo poi presente che in fase di decollo, per aumentare il $C_{L_{max}}$ vengono estesi gli ipersostentatori, comportando una bassa efficienza, e quindi risultano penalizzate le caratteristiche di salita; occorre dunque raggiungere un compromesso tra maggiorazione del $C_{L_{max}}$ e penalizzazione ridotta in termini di efficienza; in fase di decollo quindi gli ipersostentatori vengono estesi solo parzialmente e retratti presto. Questo aspetto rende critica non solo la fase di decollo, ma anche la manovra di *riattaccata* in atterraggio; stiamo parlando di una situazione in cui per qualche motivo[19] il pilota deve interrompere la manovra di atterraggio mentre si trova nelle condizioni previste per la sua categoria di velivolo. Infatti, seguendo la procedura, il pilota scende in condizioni di visibilità nulla o comunque molto ridotta, lungo un radiosentiero fino ad una certa quota, che costituisce una sorta di livello di decisione, alla quale toglie gli occhi dagli strumenti e guarda la situazione atmosferica per determinare se la visibilità è quella prevista per l'atterraggio; se la visibilità non è quella prevista, il pilota deve riattaccare dando manetta e questo avviene, per lo meno all'inizio, in una configurazione non pulita: gli ipersostentatori sono completamente estesi ed il carrello è estratto, perciò l'efficienza è bassa. Si capisce dunque come la condizione di riattaccata in atterraggio è forse la condizione più stringente per quanto riguarda il dimensionamento dei motori.

[19] Tipicamente condizioni di visibilità eccessivamente ridotta.

11.10 - DETERMINAZIONE DELLE VELOCITÀ DI SALITA

Un getto da trasporto sale con una legge di salita assegnata; teniamo presente che fino ad una certa quota, dell'ordine di qualche migliaio di piedi, la velocità è limitata da ragioni relative al traffico aereo ed in genere non supera i 250 nodi. Oltre detta quota il pilota sale a $V_{EAS} = \text{cost.}$ fino ad un'altra certa quota e poi a $M = \text{cost.}$. Cerchiamo di capire come vengano scelte queste velocità; una osservazione immediata è che tali velocità saranno comunque molto prossime a quella di salita rapida perché prima si arriverà alla quota di crociera e prima si otterrà una condizione di volo ad elevata efficienza, in cui i consumi sono quelli previsti (possibilmente minimi). La salita rapida quindi non è importante solo per i velivoli militari[20], ma lo è anche per gli aerei da trasporto[21]. Nella pratica la salita avviene ad una velocità che è leggermente superiore alla V_{FC} perché intervengono anche elementi relativi alla distanza sull'orizzonte percorsa durante la salita; finora abbiamo infatti parlato di salita rapida, ripida e di minimo consumo[22], ma esiste una quarta condizione caratteristica, che corrisponde ad una salita in cui è minimo il rapporto tra combustibile consumato e distanza percorsa sull'orizzonte. La velocità che corrisponde a questa situazione si colloca a valori superiori a V_{FC}, perciò, malgrado l'aeromobile impieghi più tempo per arrivare in quota, si otterrà un vantaggio dal punto di vista del rapporto tra consumo e distanza percorsa[23].

11.11 - METODI ENERGETICI PER LA DETERMINAZIONE DELLE LEGGI DI SALITA OTTIMA

Per concludere i regimi di salita dobbiamo trattare ancora un caso che non ha grande importanza in ambito civile, ma è molto importante in ambito militare ed in particolare per i velivoli supersonici. Finora abbiamo parlato, sempre a proposito della salita rapida, di una situazione in cui la velocità si mantenga costante durante la salita ed abbiamo al più considerato il caso in cui con un opportuno fattore correttivo teniamo conto di eventuali variazioni di velocità durante la salita. Questo tipo di approccio risulta comunque insoddisfacente quando consideriamo velivoli che durante la salita variano notevolmente la velocità[24]; inoltre esistono dei problemi rilevanti che riguardano sempre i velivoli da combattimento, i quali devono poter essere in grado di raggiungere una certa quota di intercettazione con una cer-

---

[20] Per i velivoli da intercettazione la salita rapida è un aspetto primario.

[21] Teniamo presente che un aereo da trasporto impiega 15-20 minuti per raggiungere la quota di crociera, perciò la fase di salita non è brevissima.

[22] Intendendo con ciò una salita tale da raggiungere una certa quota con il consumo minimo.

[23] Anche in questa fase di salita intervengono elementi relativi all'economia della crociera.

[24] Pensiamo ad esempio a velivoli che a partire dal decollo devono raggiungere una certa quota a velocità supersonica, quali gli intercettori.

ta velocità e nel tempo minimo[25]. Il problema che dobbiamo risolvere è dunque quello della definizione di una legge di salita ottima (di tempo minimo), avendo assegnato certe condizioni iniziali e certe condizioni finali; partiamo quindi dall'equazione di bilancio energetico, scritta nella sua forma più generale

$$\frac{dH}{dt} = P_S .$$

Avendo indicato con P_S l'eccesso di potenza specifica; ricordiamo che $H = h + h_c$ rappresenta l'altezza totale, somma dell'altezza geometrica e dell'altezza cinetica. Utilizzando la precedente, senza ipotesi semplificative, possiamo ricavare il tempo di salita per passare da un certo livello energetico iniziale H_i ad un certo livello energetico finale H_f

$$\Delta t = \int_{H_i}^{H_f} \frac{1}{P_S} dH .$$

Osserviamo come lavorando in termini di H, possiamo tener conto di condizioni iniziali e finali in termini di quota (h) e velocità ($h_c = V^2/2g$), perciò la precedente fornisce il tempo necessario a passare da una certa velocità e quota iniziali ad una certa velocità e quota finali. La determinazione di una legge di salita di tempo minimo richiede la soluzione di un problema di minimizzazione non immediato nel momento in cui abbiamo a che fare con condizioni iniziali e finali assegnate; peraltro da molti anni è stata definita una procedura di soluzione di tale problema, la quale è quasi interamente di tipo grafico, che pur fornendo una soluzione approssimata, permette di determinare delle leggi di salita che non si discostano tanto da quelle ottenute per via analitica. Come si può vedere dall'ultima equazione scritta, la condizione che deve essere soddisfatta per avere un Δt minimo è quella che per ogni livello energetico si abbia il massimo valore di P_S. Illustriamo perciò quale sia il procedimento grafico che viene adottato: rappresentiamo in un grafico, che abbia per assi h, h_c e P_S la funzione $P_S = P_S(h;h_c)$, la quale, nello spazio $h;h_c;P_S$, sarà costituita da una certa superficie.

[25] Un esempio di velivolo progettato quasi esclusivamente per questo tipo di missione è l'F-104: tale aereo aveva una meccanica raffinatissima ed un'avionica semplice in confronto ai moderni caccia, proprio perché esso doveva semplicemente essere guidato da un radar a terra (cioè *vettorizzato*) per intercettare velivoli ostili.

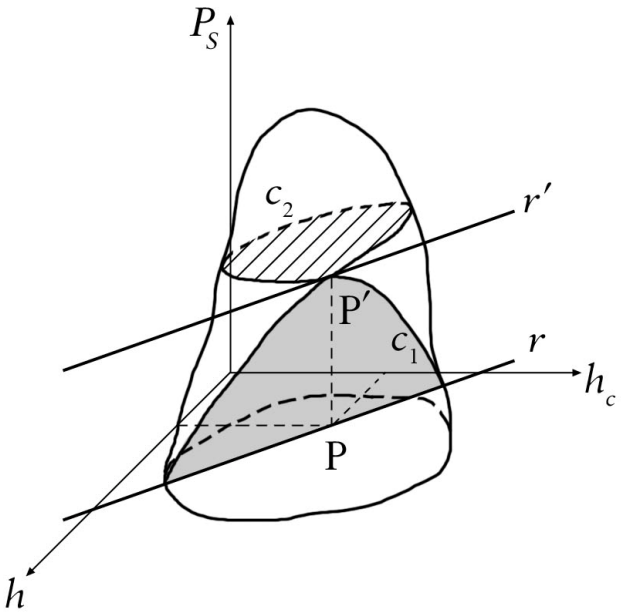


Figura 20

Il nostro scopo è quello di identificare, per ogni livello energetico (cioè per ogni valore di H), la condizione per la quale P_S sia massima; disegniamo quindi un piano ad $H = \text{cost.}$ (la traccia di tale piano nel piano $h;h_c$ sarà una retta r inclinata di 45°), il quale intersecherà la superficie $P_S = P_S(h;h_c)$ lungo una linea che indichiamo con c_1. Sulla curva c_1 non dobbiamo far altro che identificare il valore massimo di P_S, che è in corrispondenza del punto P′: abbiamo così il valore di quota e di velocità per le quali, a quel livello energetico, si otterrà il massimo di P_S. Ripetendo lo stesso procedimento per ciascun livello energetico arriviamo a determinare il massimo valore di P_S per ciascun valore di H. Notiamo però che ciò costringe a determinare intersezioni tra piani e superfici, il che non è affatto comodo; possiamo quindi seguire una procedura leggermente diversa che ci consenta di ottenere lo stesso risultato, ma lavorando non più nello spazio, bensì nel piano. Immaginiamo infatti di tracciare, sempre sul grafico di figura 20, un piano a $P_S = \text{cost.}$ passante per il punto P′: l'intersezione tra tale piano e la superficie $P_S = P_S(h;h_c)$ è una curva che indichiamo con c_2. Osserviamo che il punto di ottimo P è anche identificato dalla condizione di tangenza tra la curva c_2 ora tracciata e la retta r' definita come l'intersezione tra i piani $P_S = \text{cost.}$ e $H = \text{cost.}$.

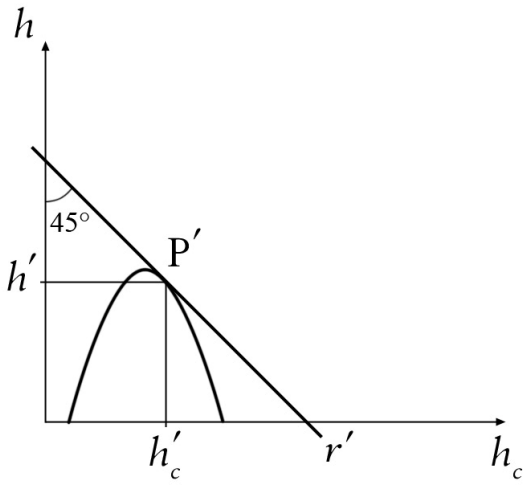


Figura 21

Tracciamo sul piano $h;h_c$ (si veda figura 22) le isolinee della funzione $P_S = P_S(h;h_c)$, ossia le curve a $P_S = \text{cost.}$, e le rette ad $H = \text{cost.}$ (ricordiamo a questo proposito che P_S decresce all'aumentare della quota, mentre H è invece crescente con la quota) e definiamo poi una certa condizione iniziale, rappresentata dal punto $A(h_i;h_{c_i})$, ed una certa condizione finale, rappresentata dal punto $B(h_f;h_{c_f})$. Per determinare la legge di salita, che per quel dato velivolo, avviene col tempo minimo, non dobbiamo far altro che muoverci lungo i punti (P′,P″,P‴...) di tangenza tra le curve a $P_S = \text{cost.}$ e le rette ad $H = \text{cost.}$ ora tracciate, a partire dal livello energetico iniziale fino al livello energetico finale, per poi raggiungere opportunamente il punto B: tale legge di salita è quella che, nell'ambito delle approssimazioni fatte, dovrebbe portarci nel tempo minimo dal punto A al punto B.

Per chiarire meglio le cose trattiamo un caso pratico: i grafici riportati in figura 23 si riferiscono ad un bimotore da trasporto a getto di piccole dimensioni. Il primo grafico è del tutto analogo a quello da noi tracciato qualitativamente in figura 22, se non per il fatto che in ascissa troviamo la velocità al posto dell'altezza cinetica e ciò comporta che le linee ad $H = \text{cost.}$ non siano più delle rette, ma delle curve; notiamo poi la famiglia di curve a $P_S = \text{cost.}$, dal valore $P_S = 4$ fino al valore $P_S = 60$ m/s, con un andamento decrescente al crescere della quota (la curva $P_S = 4$ è difatti quella che si trova più in alto).

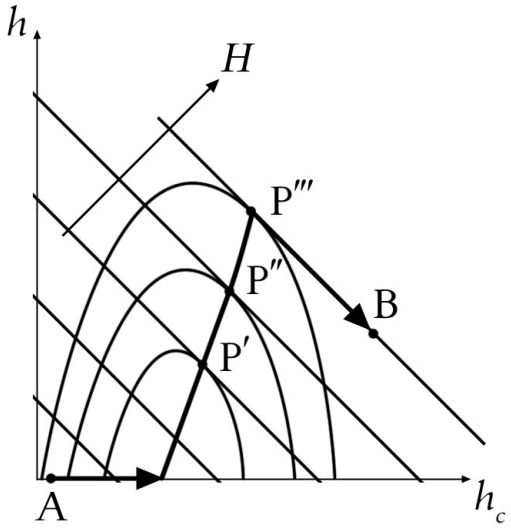


Figura 22

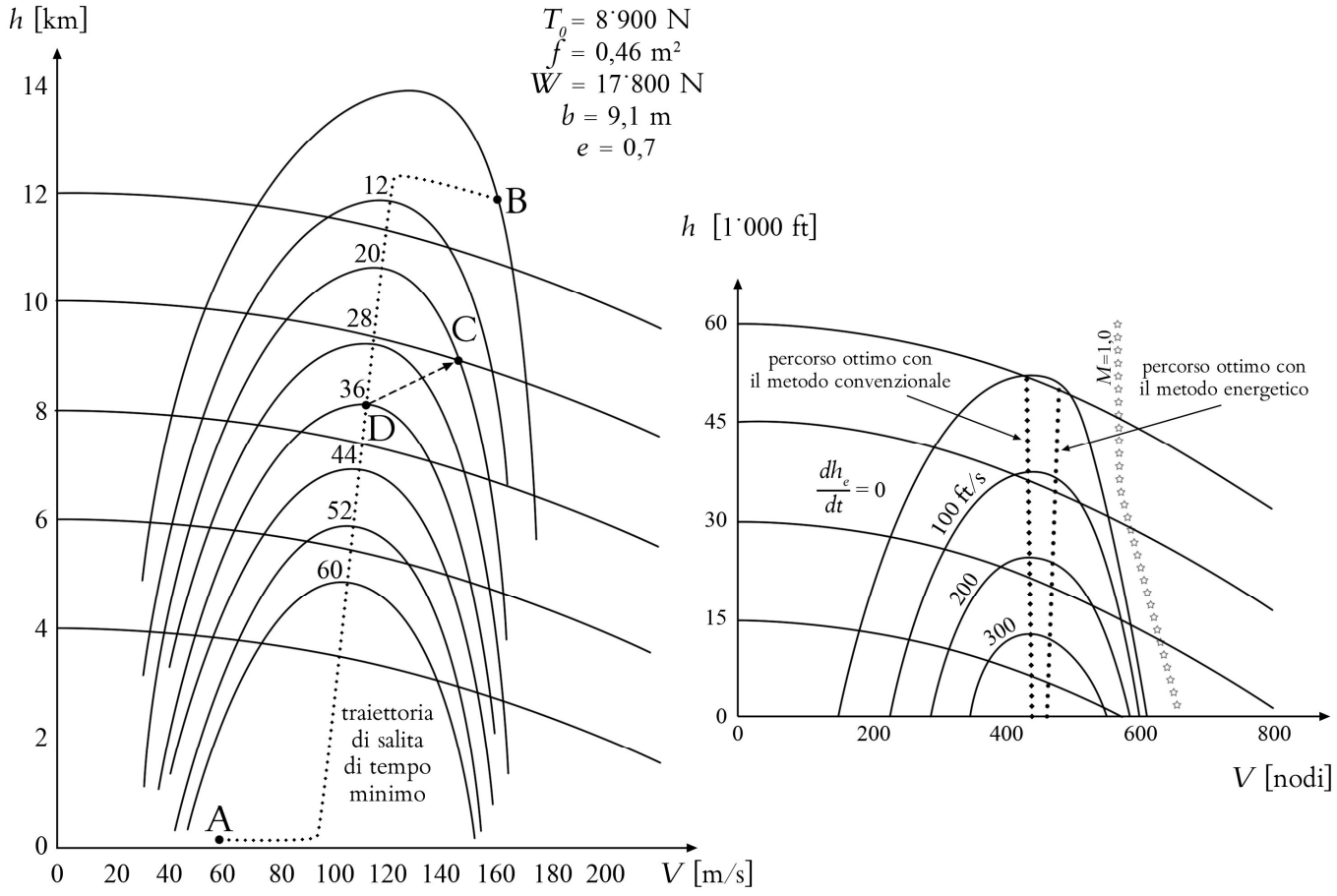


Figura 23

Osserviamo come, partendo da certe condizioni iniziali (punto A) ed avendo fissato certe condizioni finali (punto B), la legge di salita di tempo minimo sia quella individuata dai punti di tangenza tra le due famiglie di curve. A conferma di ciò, supponiamo di trovar-

ci ad un certo livello energetico al quale corrisponde un valore massimo di eccesso di potenza specifica pari a $P_S = 36$ m/s (punto D) e di voler arrivare al livello energetico corrispondente a 10 km di altezza totale (linea passante per il punto C): nel caso ottimo ci muoveremmo lungo i punti di tangenza fino ad arrivare alla curva $P_S = 28$ m/s, tangente alla curva $H = 10$ km ($P_S = 28$ m/s corrisponde cioè al massimo valore di eccesso di potenza specifico per il livello energetico $H = 10$ km); se invece abbandoniamo la traiettoria ottima e, a partire dalle stesse condizioni iniziali, ci spostiamo al punto C, arriviamo ugualmente al livello energetico voluto ($H = 10$ km), ma con un valore dell'eccesso di potenza specifica più basso (per il punto C passa infatti la curva $P_S = 20$ m/s) di quello che avevamo seguendo la traiettoria ottima; ricordando quindi che la condizione che deve essere soddisfatta per avere un Δt minimo è quella che per ogni livello energetico si abbia il massimo valore di P_S, si comprende che nel caso in cui non seguiamo i punti di tangenza arriviamo più lentamente al livello energetico voluto.

Abbiamo detto che l'approccio di tipo energetico ora considerato è molto utile nel caso di velivoli da combattimento (vedremo un esempio tra poco), mentre non comporta eccessivi miglioramenti nel caso di un velivolo civile, rispetto, per esempio, ad una salita rapida determinata considerando costante la velocità; ciò è ben evidenziato dal secondo grafico in figura 23, nel quale viene appunto confrontata la salita ottima ricavata col metodo energetico, con la salita rapida ricavata con l'ipotesi che la velocità resti costante; a tal proposito notiamo che in quest'ultimo caso la traiettoria ottima è individuata dai punti di tangenza fra le curve a $P_S = \text{cost.}$ e le curve ad $h = \text{cost.}$: se infatti $V = \text{cost.}$ si ha

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dh}{dt}$$

e la $\Delta t = \int_{H_i}^{H_f} \frac{1}{P_S} dH$ diviene

$$\Delta t = \int_{h_i}^{h_f} \frac{1}{P_S} dh$$

la quale rende intuitivo quanto ora detto.

Discutiamo adesso un esempio relativo proprio ad un caccia supersonico, un F-104 (vedi figura 24): stiamo parlando di un caccia di vecchia concezione, quindi con una T_d non elevatissima ed un basso eccesso di potenza specifica soprattutto nella fase transonica, quando la resistenza (o se vogliamo la T_n) presenta un notevole aumento per piccole variazioni del numero di Mach. Osserviamo infatti come l'andamento delle curve a $P_S = \text{cost.}$ sia caratterizzato, nella zona supersonica, dalla presenza di bolle che corrispondono a valori elevati del-

l'eccesso di potenza specifica, mentre in regime transonico tali curve sono affossate e caratterizzate da bassi valori di P_S; ciò conferma come, per tale categoria di velivoli, accelerare in regime transonico fosse un problema. Vediamo a quale risultato arriviamo applicando il metodo energetico: supponiamo di dover effettuare una salita a partire da $M = 0{,}5$ a 4·000 ft di quota, fino a $M = 2{,}2$ ad una quota di circa 45·000 ft.

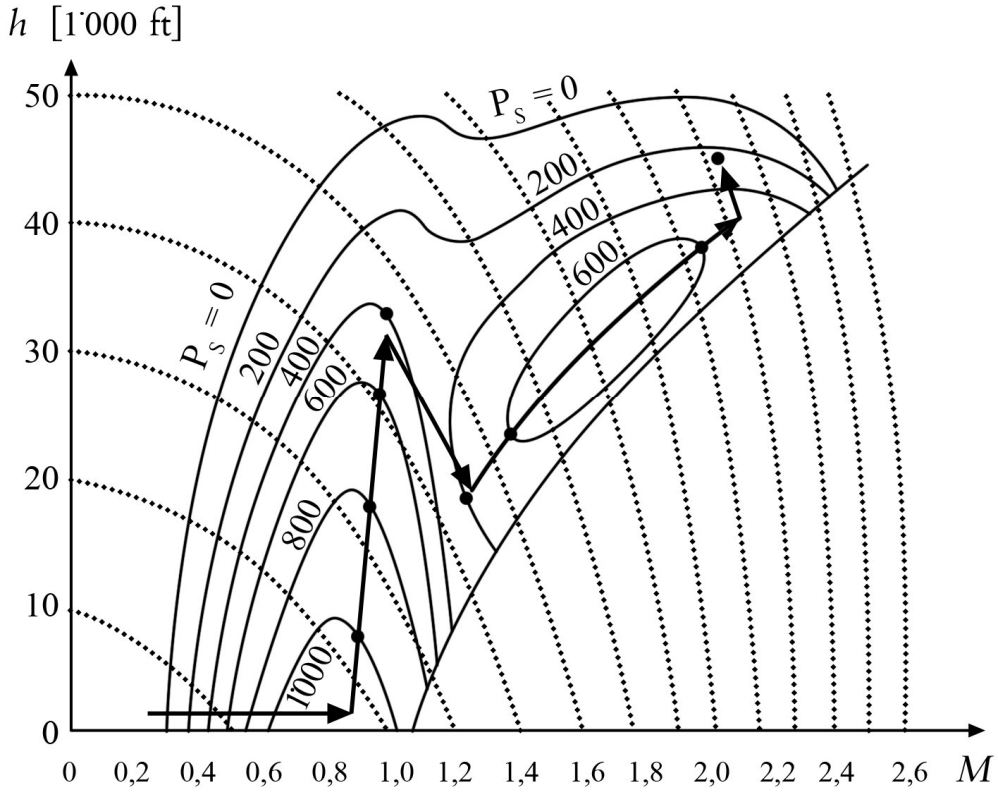


Figura 24

Il caccia accelera a quota costante fino a raggiungere la linea che inviluppa i punti di tangenza tra le due famiglie di curve a $P_S = \text{cost.}$ e ad $H = \text{cost.}$ e che fornisce come detto la legge di salita ottima, ed inizia a guadagnare quota mantenendo quasi costante la velocità (siamo ancora in regime subsonico) fino a circa 33·000 ft in cui P_S è 400 m/s; quindi accelera a velocità supersonica convertendo energia potenziale in energia cinetica: il velivolo cioè si getta in una picchiata perdendo così quota e guadagnando velocità[26], sino a raggiungere un numero di Mach supersonico mantenendo costante il valore di P_S. Osserviamo come la traiettoria seguita sia parallela alle linee ad $H = \text{cost.}$ e ciò significa che tale parte di traiettoria di salita è effettuata ad energia totale costante. A questo punto l'intercettore vola in regime supersonico, in una regione dove l'eccesso di potenza specifica è tornato ad essere grande (ricordiamo che il C_{D_0} decresce a Mach supersonici), quindi il pilota può riprendere

[26] In questo modo si riducono notevolmente i tempi necessari per passare da $M < 1$ a $M > 1$.

a muoversi lungo i punti di tangenza ed accelerare guadagnando quota, arrivando alla velocità finale prevista; l'ultima fase della salita prevede il fatto che il velivolo guadagni quota riducendo la velocità, cioè convertendo stavolta energia cinetica in energia potenziale. Tale esempio ci mostra come per velivoli di vecchia concezione la salita di tempo minimo è una manovra abbastanza complessa. Per i velivoli moderni invece le cose sono cambiate: possiamo confrontare le caratteristiche di salita dello F-104 della figura 24 con quelle di un moderno velivolo da combattimento, in figura 25, dotato sicuramente di un'aerodinamica più raffinata in regime transonico ed equipaggiato con propulsori in grado di fornire una spinta maggiore; se quindi applichiamo il metodo energetico ad un velivolo moderno, otterremo una traiettoria di salita molto più regolare.

Concludiamo aggiungendo solo due considerazioni riguardo alle approssimazioni insite nel metodo energetico discusso in questo §. La prima approssimazione l'abbiamo già citata: non siamo in grado di imporre delle condizioni iniziali e finali per la soluzione del problema di minimizzazione, perciò possiamo ragionare solo in termini di livelli energetici; in altre parole non siamo in grado di determinare la legge di salita di tempo minimo che ci porta dal punto iniziale al punto finale, ma siamo in grado di determinare la legge di salita di tempo minimo che ci porta da un livello energetico iniziale ad un livello energetico finale. Per quanto riguarda la seconda approssimazione, osserviamo come vi possano essere certe fasi della salita (lo abbiamo visto nell'esempio dell'F-104) che sono effettuate ad $H = \text{cost.}$, ma, in base all'espressione del Δt, il tempo impiegato a percorrere questi tratti di traiettoria è nullo; con questo metodo pertanto non riusciamo a tener conto, in termini di tempo, delle fasi di salita che si svolgono ad energia totale costante. Questo peraltro non è un problema vincolante e la semplicità di tale tecnica la rende valida almeno per studi di prima approssimazione.

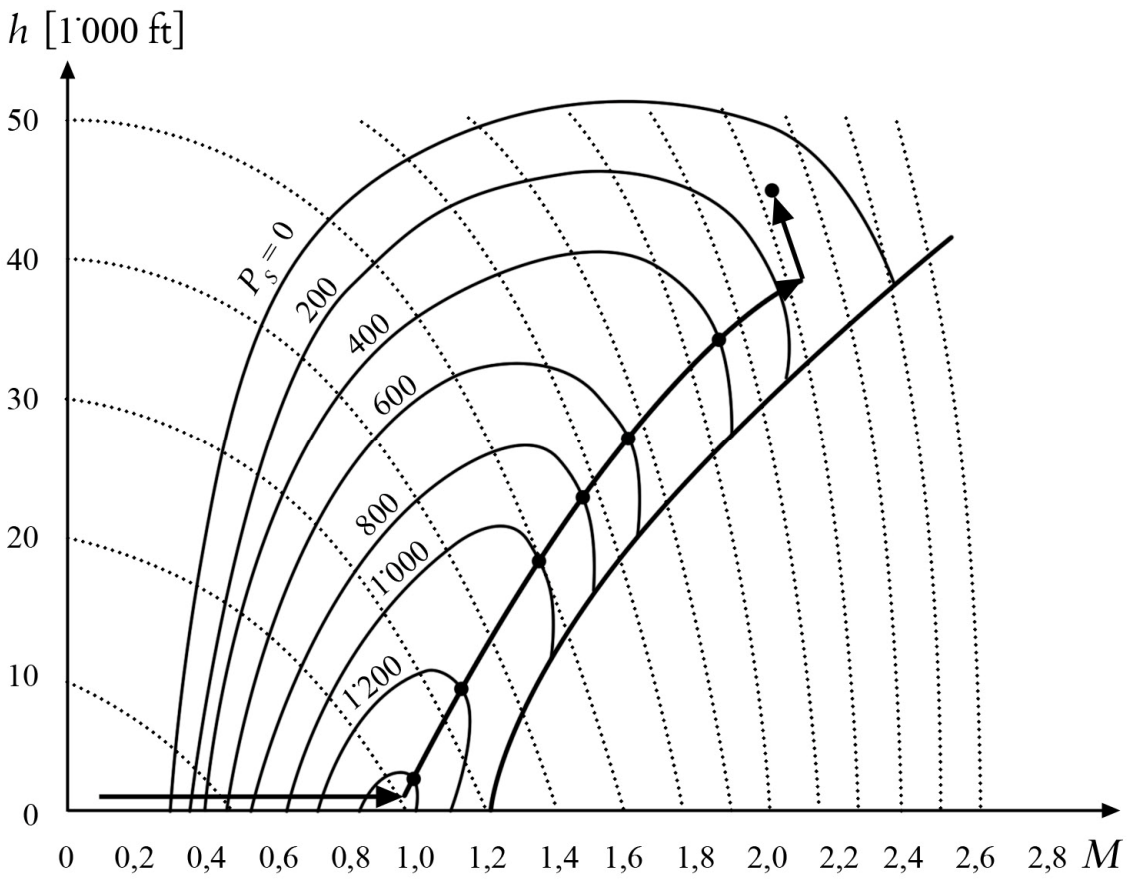

h [1'000 ft]
50
40
30
20
10
0
P_S = 0
200
400
600
800
1'000
1'200
0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 M

Figura 25

Capitolo 12

IL DECOLLO E L'ATTERRAGGIO

12.1 - VELOCITÀ CARATTERISTICHE IN DECOLLO: NORME FAR 25

Il decollo è una fase molto importante del volo, nella quale pochissimi gradi di libertà sono lasciati al pilota; ogni fase della manovra è infatti soggetta a determinate specifiche delle norme di aeronavigabilità che stabiliscono sia le caratteristiche del velivolo in fase di progetto e sia certi parametri, in particolare il peso, durante l'esercizio del velivolo stesso. Per quanto riguarda le norme FAR[1] (*Federal Aviation Regulation*), la manovra di decollo viene scomposta in due fasi principali: la prima fase inizia quando il velivolo, a partire da velocità nulla, comincia ad accelerare sulla pista e termina quando l'aereo ha raggiunto un'altezza caratteristica di 35 ft (10,668 m); la seconda fase è quella che riguarda la salita del velivolo dai 35 ft sino alla quota di 1'500 ft (457,2 m), alla quale il velivolo dovrebbe trovarsi in configurazione di crociera (quindi ipersostentatori e carrello retratti). Durante entrambe le fasi esistono un numero molto elevato di prescrizioni che permettono non solo il calcolo dello spazio di decollo, ossia la lunghezza di pista necessaria ad effettuare tale manovra, ma fissano anche una serie di parametri di volo minimi (in particolare angoli di rampa) che devono essere garantiti, per esempio nel caso di avaria totale ad uno dei motori, affinché anche in tali condizioni il velivolo sia in grado di completare in sicurezza il decollo. Ci occuperemo dell'analisi della prima fase, quella che termina quando il velivolo supera con una certa velocità

[1] Queste sono le norme di certificazione dei velivoli statunitensi; in Europa tali norme sono chiamate *Certification Specifications* (CS) e sono sostanzialmente corrispettive.

l'altezza di 35 ft e che porta alla definizione degli spazi di decollo, e faremo riferimento alle FAR 25, che sono le norme relative a velivoli da trasporto di dimensioni medio - grandi.

Per ogni determinato tipo di velivolo esistono due tipi di problemi: il primo in fase progettuale, perché si devono garantire che gli spazi di decollo che questo andrà ad impegnare, siano compatibili con le lunghezze di pista esistenti, mentre il secondo tipo di problema è più strettamente legato all'esercizio del velivolo e riguarda principalmente la definizione dei pesi massimi al decollo; il peso ammissibile è quello che permette al velivolo di decollare una volta verificato che lo spazio di pista necessario in corrispondenza di quel peso sia compatibile con la lunghezza della pista a disposizione. Il peso massimo al decollo non è influenzato unicamente dalla lunghezza di pista, ma anche dalle sue condizioni (pista asciutta o bagnata) e dall'eventuale pendenza (le piste non sono necessariamente in piano), nonché da altri fattori come ad esempio la presenza di vento e dalle caratteristiche dell'atmosfera (in termini di pressione e temperatura) poiché sappiamo come queste influenzino le prestazioni.

Prima di passare al calcolo dello spazio di decollo, analizziamo alcune prescrizioni regolamentari relative alla definizione di certe velocità caratteristiche durante la corsa di decollo.

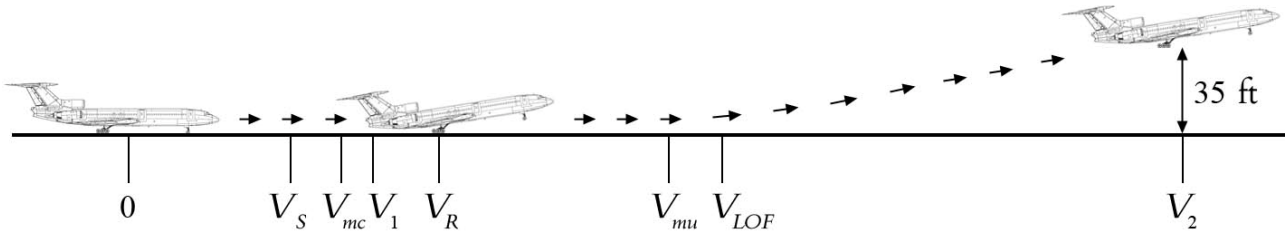


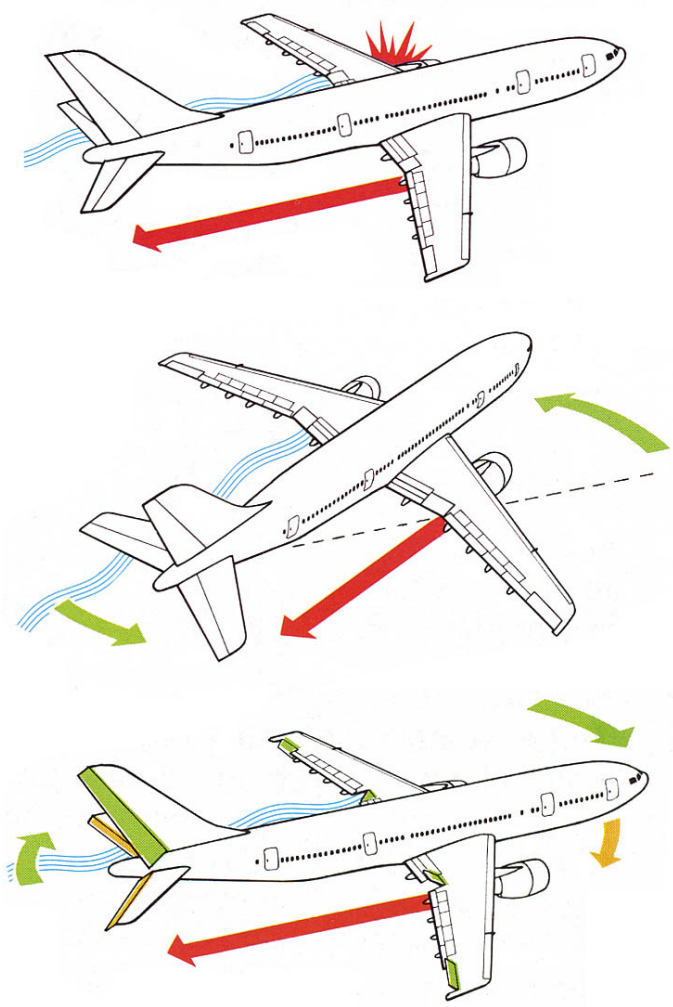
Figura 1

Inizialmente il velivolo si trova sulla soglia pista, a velocità nulla, ed in genere con i freni bloccati; a questo punto le manette vengono portate in avanti ed i motori iniziano ad erogare spinta, il pilota rilascia i freni ed il velivolo inizia ad accelerare. Seguendo un ordine che non è necessariamente l'unico, vediamo che durante la sua corsa a terra il velivolo raggiunge e supera una serie di velocità caratteristiche, le quali devono essere note al pilota e sono tipicamente riportate nei manuali di volo.

La prima velocità che incontriamo è la velocità di stallo calcolata nella configurazione di decollo, quindi con ipersostentatori parzialmente estesi.

La seconda velocità caratteristica riportata nello schema di figura 1 è indicata con V_{mc} e rappresenta la velocità minima di controllo: si tratta di un valore di velocità fondamentale che riguarda il controllo del velivolo nel caso di avaria del motore. In realtà la V_{mc} sta ad

indicare due velocità caratteristiche che indichiamo con V_{mc_A} e V_{mc_G}, le quali sono rispettivamente la *velocità minima di controllo in aria* e la *velocità minima di controllo a terra*. La V_{mc_A} è la minima velocità alla quale è possibile mantenere il velivolo in una traiettoria rettilinea (cioè senza angoli di imbardata) nel caso di avaria completa di un motore critico[2] e con gli altri motori in condizioni di spinta massima o, per essere più precisi, di spinta al decollo; non è possibile ridurre il momento di imbardata riducendo la spinta dei motori operativi, perciò il controllo è effettuato esclusivamente attraverso il timone. Questa condizione è in genere realizzata mantenendo un angolo di derapata pari a zero (entreremo nel dettaglio più avanti), un angolo di rollio non superiore ai 5° ed esercitando una forza sui pedali non superiore alle 180 lb (81,65 kg). La V_{mc_G} rappresenta la minima velocità alla quale è possibile mantenere l'aereo su traiettoria rettilinea su un piano orizzontale[3], nel caso di avaria al motore critico. Anche in questo caso non possiamo ridurre il momento di imbardata squilibrante agendo sulla spinta erogata dagli altri motori, i quali quindi continueranno ad erogare la spinta prevista per il decollo, ma il velivolo viene controllato agendo sul timone. Non è ammessa nel calcolo di questa velocità un'azione differenziale dei freni sulle ruote del carrello principale, mentre è ammesso il fatto che la rotazione del ruotino anteriore sia asservita alla rotazione del timone: il ruotino anteriore cioè può dare un contributo al mantenimento di una traiettoria rettilinea. Si capisce dunque che l'importanza di V_{mc_G} risiede nel fatto che il pilota sa che al di sopra di tale velocità è possibile controllare il velivolo all'imbardata nel caso di avaria del motore, sia a terra che in aria.



Aumentando ancora la velocità

[2] Il motore critico è quello posto a maggior distanza dal piano di simmetria del velivolo: per un quadrimotore occorre determinare tale velocità immaginando che abbia cessato di erogare spinta uno dei motori posti a maggior distanza dalla fusoliera, dato che un'avaria al motore critico produrrà un maggior momento di imbardata che squilibra il velivolo.

[3] Teniamo presente che il velivolo è ancora con il carrello a terra.

durante l'accelerazione si arriva alla velocità V_1, detta velocità di decisione: se l'avaria del motore critico avviene proprio alla V_1, il pilota può sia continuare il decollo e portarlo a compimento, sia interromperlo decelerando il velivolo fino all'arresto in condizioni di sicurezza, ossia entro la fine della pista. Questo significa in particolare che il pilota sa che se l'avaria del motore avviene a $V < V_1$, il decollo deve essere interrotto, mentre se l'avaria avviene a $V > V_1$ il decollo deve essere completato, cioè il velivolo va portato in aria anche con un motore in avaria.

La velocità successiva è la V_R e prende il nome di *velocità di rotazione*; essa deve essere maggiore di V_1, ed è legata alla V_{mc} da certe relazioni ($V_R \geq 1{,}03 V_{mc}$). La V_R corrisponde al momento in cui il pilota inizia a ruotare il velivolo sui carrelli principali, staccando quindi il ruotino anteriore da terra, per portare l'angolo d'attacco in pochi secondi al valore necessario per il distacco completo del velivolo da terra.

Arriviamo così alla V_{mu} che costituisce la velocità minima di distacco e che deve essere maggiore del 3% della V_S (cioè $V_{mu} \geq 1{,}03 V_S$); V_{mu} è quindi una velocità alla quale teoricamente il velivolo può essere staccato da terra; in realtà, per operare in condizioni di massima sicurezza, si fa alzare da terra il velivolo ad una velocità superiore a V_{mu}.

Si continua dunque ad accelerare fino alla velocità di decollo vera e propria che, per quanto riguarda le norme regolamentari, viene indicata con V_{LOF} (dove LOF sta per *lift off*, distacco). Tale velocità, nel caso in cui tutti i motori siano operativi, è superiore alla V_{mu} del 10% (cioè $V_{LOF} \geq 1{,}10 V_{mu}$) ed alla V_S del 20% (cioè $V_{LOF} \geq 1{,}20 V_S$), mentre nel caso in cui un motore sia in avaria, la V_{LOF} deve essere superiore alla V_{mu} solo del 5% (cioè $V_{LOF} \geq 1{,}05 V_{mu}$); quest'ultimo fatto è spiegabile tenendo conto che, nel caso in cui un motore sia in avaria, l'aereo accelera più lentamente e ciò significa che impegna maggior pista: le norme tengono conto di ciò lasciando la possibilità che il velivolo si stacchi da terra ad una velocità di decollo minore di quella richiesta nel caso in cui tutti i motori siano operativi, riducendo così il rischio che l'aereo giunga a fine pista senza essersi staccato dal suolo.

La fase del decollo che ci interessa termina quando l'aereo supera l'ostacolo critico teorico entro la fine della pista, con una velocità perlomeno pari ad un valore V_2 che prende il nome di velocità di sicurezza al decollo e che per le norme FAR 25 deve essere superiore almeno del 20% alla V_S (cioè $V_2 \geq 1{,}20 V_S$) ed almeno del 10% alla V_{mc} (cioè $V_2 \geq 1{,}10 V_{mc}$).

12.2 - DETERMINAZIONE DEI PRINCIPALI PARAMETRI IN GIOCO E LORO EFFETTO SULLO SPAZIO DI DECOLLO

Per mettere in evidenza quali siano i parametri caratteristici del velivolo e dell'atmosfera che influenzano lo spazio di decollo, determiniamo una soluzione approssimata. Iniziamo scrivendo le equazioni del moto del velivolo durante la fase di accelerazione a terra

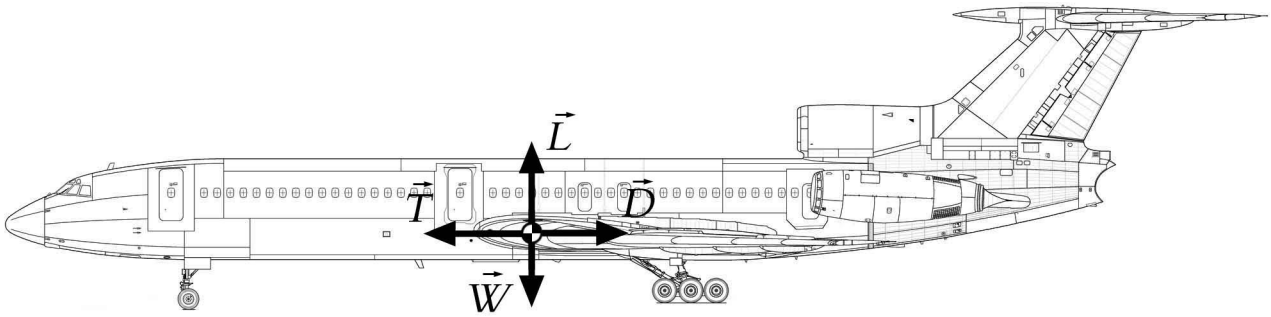


Figura 2

Le forze agenti sul velivolo, che per semplicità supponiamo tutte applicate nel baricentro, sono il peso $\vec{W}$, la spinta $\vec{T}$, la resistenza $\vec{D}$ e la portanza $\vec{L}$; c'è poi una forza $\vec{F}_a$ dovuta all'attrito di rotolamento delle ruote del carrello principale sulla pista (applicata quindi proprio sul carrello principale) data da

$$F_a = \quad (W - L)$$

in cui è il coefficiente di attrito, mentre il termine $W - L$ costituisce il carico gravante sul carrello. L'equazione longitudinale del moto è dunque

$$\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \quad (W - L).$$

Nell'ambito della ricerca di una soluzione approssimata possiamo fare l'ipotesi molto grossolana che la spinta sia notevolmente più grande sia della resistenza che della forza di attrito

$$\begin{cases} T \gg D \\ T \gg F_a \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T$$

il che significa

$$\frac{dV}{dt} = g\left(\frac{T}{W}\right)$$

indicando con x la distanza percorsa ed essendo

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}V = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx}$$

si ha

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx} = g\frac{T}{W} \qquad \Rightarrow \qquad dx = \frac{1}{2}dV^2\frac{W}{gT}.$$

Immaginiamo ora di trascurare sia la manovra di rotazione che il fatto che vi sia una parte in volo (quella da V_{LOF} a V_2) e supponiamo perciò che lo spazio di decollo che vogliamo determinare sia solo quello che intercorre dal momento in cui il velivolo inizia ad accelerare, fino al momento in cui ha raggiunto la velocità di decollo V_{LOF}; dalla precedente si ottiene

$$x_d = \frac{1}{2g}\int_0^{V_{LOF}} \frac{W}{T}dV^2$$

supponendo ora che anche alle basse velocità la spinta sia indipendente dalla velocità stessa (ipotesi poco aderente) possiamo integrare la precedente ed ottenere

$$x_d = \frac{1}{2g}\frac{W}{T}V_{LOF}^2.$$

Esprimiamo il rapporto peso/potenza immaginando che la spinta vari proporzionalmente alla densità

$$\frac{W}{T} = \left(\frac{W}{T}\right)_{LM}\frac{1}{\delta}$$

inoltre esprimiamo la V_{LOF} in termini della V_S in configurazione di decollo come[4]

$$V_{LOF} = 1{,}20\,V_S$$

sostituendo nella espressione di x_d

[4] Abbiamo visto nel §1 come le norme prevedano che $V_{LOF} = 1{,}20\,V_S$.

$$x_d = \frac{1}{2g}\left(\frac{W}{T}\right)_{LM}\frac{1}{\delta}(1{,}20V_S)^2$$

esplicitando la velocità di stallo

$$x_d = 1{,}44\frac{1}{2g}\left(\frac{W}{T}\right)_{LM}\frac{1}{\delta}\frac{2\,W/S}{\varrho C_{L_{max}}}$$

ed infine, essendo $\varrho = \delta\varrho_{LM}$, otteniamo

$$x_d = 1{,}44\frac{1}{g}\left(\frac{W}{T}\right)_{LM}\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{W}{S}\right)\frac{1}{\varrho_{LM}C_{L_{max}}}.$$

La precedente, pur fornendo una stima poco approssimata[5], presenta un'indicazione molto utile sulle grandezze che entrano in gioco riguardo le prestazioni del velivolo. Osserviamo come lo spazio di decollo sia inversamente proporzionale al rapporto spinta/peso, perciò se vogliamo ridurre lo spazio di decollo, una possibilità potrebbe essere quella di incrementare la spinta; ciò però presenta dei problemi dato che aumentare la spinta vuol dire aumentare non solo il peso del motore, ma anche il rumore da esso prodotto[6] ed i consumi durante la crociera[7]. Osserviamo poi l'effetto della densità, ossia quanto lo spazio di decollo sia influenzato dalla quota (il rapporto tra le densità δ compare al quadrato). Notiamo poi l'effetto del carico alare: se vogliamo migliorare le prestazioni in decollo dovremmo, in base alla equazione precedente, ridurre il carico alare, ma sappiamo che ciò renderebbe meno efficiente la crociera del nostro apparecchio[8]. Abbiamo infine l'influenza del coefficiente di portanza massimo e tanto maggiore sarà il $C_{L_{max}}$ tanto minore sarà la distanza di decollo, in quanto sarà più bassa la velocità di decollo V_{LOF}; anche in questo caso troviamo controindicazioni: abbiamo già detto che l'ala ha una forma che ottimizza le prestazioni in crociera, perciò al decollo si utilizzano gli ipersostentatori, i quali aggiungono peso e complessità meccanica notevolissima; ricordiamo inoltre come non possiamo utilizzare completamente gli ipersostentatori per rendere massimo il C_L in decollo poiché, se da una parte riduciamo la V_S, dall'altra penalizziamo fortemente le prestazioni in salita.

---

[5] In particolare è sottostimata.

[6] Il rumore prodotto da un motore è diventato un parametro critico nel progetto di velivoli da trasporto.

[7] Un motore più potente funzionerà, in genere, in modo meno efficiente per la spinta erogata in crociera, che, come già specificato, è minore di quella erogata durante il decollo.

[8] Ricordiamo che, per avere grosse autonomie, un getto deve avere elevati carichi alari.

Notiamo in conseguenza di ciò che agire al fine di minimizzare gli spazi di decollo ha sempre degli effetti su altre caratteristiche del velivolo ed in particolare su quelle di volo in crociera.

12.3 - ANALISI DEGLI SPAZI DI DECOLLO

Prima di passare all'analisi vera e propria degli spazi di decollo, confrontiamo tra loro tre diversi tipi di aerei, per avere un'idea dell'ordine di grandezza con cui abbiamo a che fare. Teniamo presente che i valori che daremo rappresentano uno spazio di riferimento comprensivo di tutte le fasi del decollo, perciò non è certamente il valore che otterremmo con la equazione di x_d scritta nel § precedente, ma è un valore ragionevole che tiene conto del fatto che il decollo termina alla velocità V_2 ed alla quota minima di 35 ft. Il primo esempio riguarda un aviogetto da trasporto a lungo raggio, avente un carico alare di circa 5'000 N/m^2, un rapporto massimo spinta/peso pari a 0,25 ed un $C_{L_{max}}$ di 1,8 al livello del mare; per tale velivolo lo spazio di pista impegnata è di circa 2'500 - 3'000 m. Il secondo esempio è invece relativo ad un velivolo da combattimento di dimensioni contenute, avente un carico alare minore di quello del getto da trasporto per esigenze legate soprattutto alla manovrabilità, un rapporto spinta/peso con postbruciatore acceso pari ad 1,3 ed un $C_{L_{max}}$ di 1,2[9]: in questo caso lo spazio di decollo è di 480 - 600 m[10]. L'ultimo esempio che citiamo è un motoelica bimotore, con motori turbocompressi, da 6 - 8 passeggeri; il carico alare è notevolmente più basso rispetto al getto, il rapporto potenza/peso è dell'ordine di 0,1 CV/lb, il $C_{L_{max}}$ è pari ad 1,8 ed il rendimento η_P è di 0,85 al livello del mare: lo spazio di pista impegnato è di 760 - 900 m.

Vediamo adesso come si determinano gli spazi di decollo, utilizzando una trattazione semplificata ma abbastanza soddisfacente in termini di risultati (non integreremo perciò le equazioni del moto) ed indicando semplicemente con V_d la velocità di decollo, schematizziamo la fase di decollo che abbiamo descritto nel § 1 in tre fasi distinte: la prima fase rappresenta la corsa di rullaggio[11], nella quale il velivolo passa da $V = 0$ a $V = V_d$; la seconda fase è quella di rotazione e la velocità resta costante: il velivolo varia l'angolo d'attacco alzando il muso e mantenendo il carrello principale a terra; la terza fase è quella in aria e si conclude quando il velivolo ha superato i 35 ft con una velocità che deve essere almeno pari a V_2, ma che nel nostro schema resta pari a V_d.

---

[9] In genere i velivoli da combattimento, soprattutto quelli più moderni, hanno dei sistemi di ipersostentamento molto limitati a causa del fatto che l'ala debba essere impiegata in campo supersonico.

[10] È fondamentale che questi velivoli possano decollare impegnando lunghezze di pista estremamente ridotte.

[11] Circolazione o corsa a terra di un aeromobile sulle ruote, per il decollo o per l'atterraggio.

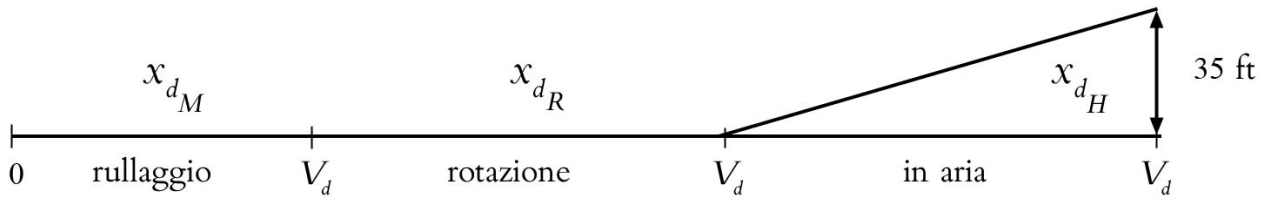


Figura 3

Lo spazio totale di decollo è perciò

$$x_d = x_{d_M} + x_{d_R} + x_{d_H} .$$

Occupiamoci di determinare la distanza x_{d_M} relativa alla prima fase. Facciamo riferimento all'equazione del moto $\frac{W}{g}\frac{dV}{dt} = T - D - \quad (W - L)$ che riscriviamo come

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dx} = \frac{g}{W}\left[T - D - \quad (W - L)\right]$$

osserviamo che il 2° membro della precedente ha le dimensioni di un'accelerazione, perciò possiamo indicarlo con $\dot{V}$, funzione di V poiché le forze aerodinamiche L e D, ed in genere anche la spinta T, dipendono dalla velocità. Lo spazio relativo alla fase di rullaggio a terra è quindi dato da

$$x_{d_M} = \frac{1}{2}\int_0^{V_d} \frac{dV^2}{\dot{V}(V)}$$

che, essendo nota la dipendenza di resistenza e portanza dalla velocità, possiamo integrare se conosciamo la legge di variazione di T con V (che in fase di decollo in genere non possiamo trascurare). Anche qui però si cerca di semplificare il più possibile e perciò si sfrutta un risultato che può essere verificato analiticamente, ma che certamente è verificato sperimentalmente: esiste una proporzionalità di tipo lineare tra $\dot{V}^{-1}$ e V^2

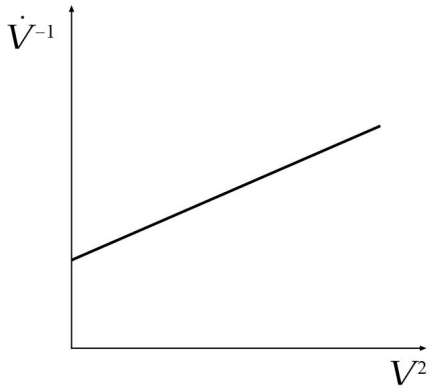


Figura 4

il che significa

$$\dot{V} = \left(A + BV^2\right)^{-1}$$

nella quale, per il nostro scopo, non è importante determinare i coefficienti A e B (ciò sarà chiaro tra poco). Sostituendo la precedente nella $x_{d_M} = \frac{1}{2}\int_0^{V_d} \frac{dV^2}{\dot{V}\left(V^2\right)}$ otteniamo

$$x_{d_M} = \frac{1}{2}\int_0^{V_d} \left(A + BV^2\right) dV^2$$

che integrata fornisce

$$x_{d_M} = \frac{1}{2} V_d^2 \left(A + \frac{B}{2} V_d^2\right)$$

che possiamo porre nella forma

$$x_{d_M} = \frac{V_d^2}{2\dot{\bar{V}}}$$

dove $\dot{\bar{V}}$ è un'accelerazione media data dal valore di $\dot{V}$ calcolato in corrispondenza di $V^2 = \frac{V_d^2}{2}$

$$\dot{\bar{V}} = \dot{V}\left(\frac{V_d^2}{2}\right) = \frac{g}{W}\left[T\left(\frac{V_d}{\sqrt{2}}\right) - D\left(\frac{V_d}{\sqrt{2}}\right) - \left(W - L\left(\frac{V_d}{\sqrt{2}}\right)\right)\right].$$

L'espressione approssimata dello spazio corrispondente alla fase di rullaggio può essere ottenuta in forma chiusa, senza dunque fare integrazioni, dalla $x_{d_M} = \frac{V_d^2}{2\dot{\bar{V}}}$, nella quale compare un valore medio di $\dot{V}$, la cui esistenza abbiamo dimostrato attraverso la $\dot{V} = \left(A + BV^2\right)^{-1}$, avendo accettato la proporzionalità tra $\dot{V}^{-1}$ e V^2, ed il cui valore possiamo ricavare dalla equazione precedente. A proposito del calcolo di $\dot{\bar{V}}$ possiamo dire che un valore indicativo del coefficiente di attrito su pista in cemento è 0,02 mentre su terreno erboso (ma è comprensibile che ciò non riguardi il decollo dei trasporti a getto) è 0,1; v'è poi un effetto importante di cui occorre tener conto nel momento in cui si calcola quel valore di accelerazione, il cosiddetto *effetto suolo*: una ridotta distanza dal terreno (come nel caso della corsa di decollo) produce una notevole riduzione delle velocità indotte verso il basso associate al sistema vorticoso a staffa dell'ala e responsabili della resistenza indotta, la quale dunque è più bassa di quella che avremmo in assenza di tale effetto[12]. Il parametro caratteristico che definisce l'entità dell'effetto suolo è il rapporto *h/b* tra l'altezza del piano alare e l'apertura alare: quando tale rapporto è pari a 0,1, il rapporto tra la resistenza indotta in effetto suolo e resistenza indotta senza effetto suolo, è pari a circa 0,2, quindi la riduzione della resistenza indotta è notevole; quando invece il rapporto *h/b* è pari a 0,3, il rapporto tra i coefficienti di resistenza indotta diventa 0,7:

$$\frac{h}{b} = 0{,}1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(C_{D_i}\right)_{\text{effetto suolo}}}{\left(C_{D_i}\right)_{\text{senza effetto suolo}}} = 0{,}2$$

$$\frac{h}{b} = 0{,}3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(C_{D_i}\right)_{\text{effetto suolo}}}{\left(C_{D_i}\right)_{\text{senza effetto suolo}}} = 0{,}7.$$

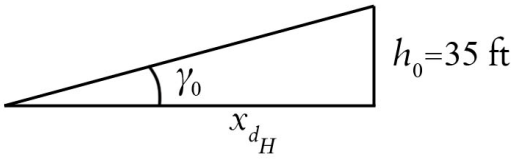
Passiamo ora al calcolo dello spazio associato alla fase di rotazione, il quale viene immediatamente ricavato come

$$x_{d_R} = \Delta t V_d$$

[12] Un esempio di effetto suolo lo si può vedere nei vecchi filmati, i quali mostrano bene come i primi aerei, non appena si staccavano da terra, tendevano a tornare giù; ciò è legato al fatto che a quell'epoca la spinta disponibile era appena sufficiente: finché l'aereo era a terra interveniva l'effetto suolo a ridurre la resistenza indotta e di conseguenza la spinta necessaria, perciò l'aereo riusciva a prendere quota, ma una volta alzatosi da terra l'effetto suolo svaniva e la resistenza indotta aumentava di colpo facendo sì che la spinta disponibile non fosse più sufficiente a tenere in volo livellato il velivolo.

dove in genere $V_d = 1,2V_S$ e $\Delta t = 2s$. Per quanto riguarda infine lo spazio x_{d_H} relativo all'ultima fase, avendo supposto che la velocità si mantenga costante, si ottiene

$$\frac{h_0}{x_{d_H}} = \tan\gamma_0$$



dove

$$\gamma_0 = \text{arcsen}\left[\frac{T(V_d)}{W} - \frac{D(V_d)}{W}\right]$$

e quindi in definitiva

$$x_{d_H} = \frac{h_0}{\tan\gamma_0}$$

lo spazio così ottenuto è quello meno affidabile, nel senso che il fatto di non considerare variazioni di velocità durante questa fase (e ricordiamo che in realtà il velivolo passa dalla velocità di decollo alla velocità V_2) produce in genere una rilevante sottostima dello spazio relativo.

12.4 - DECOLLO CON AVARIA DEL MOTORE: PISTA BILANCIATA

Le FAR 25 prevedono che la lunghezza di pista impegnata da un certo velivolo in una determinata condizione ambientale, debba essere determinata anche nel caso in cui uno dei motori vada in avaria; questo serve a garantire che, nel momento in cui si presenti l'avaria di un motore (in particolare di quello critico) durante la fase di decollo, il decollo possa essere interrotto o portato a compimento in sicurezza. Per un velivolo quadrimotore l'avaria ad un propulsore non comporta una penalizzazione eccessiva delle prestazioni in decollo, mentre per un velivolo bimotore la penalizzazione è consistente, anche perché come vedremo, oltre a ridursi del 50% la spinta disponibile, vi è anche un certo aumento della spinta necessaria (ossia della resistenza), aumento legato al fatto che occorrerà mantenere in equilibrio il velivolo nel volo a spinta non simmetrica attraverso un'opportuna rotazione delle superfici aerodinamiche di controllo. Le norme prevedono che, nel caso di decollo con avaria ad un motore, si debbano calcolare gli spazi impegnati relativamente a due diverse situazioni o procedure

- ACCELERATE AND GO: questa prima procedura prevede che, una volta che si sia verificata un'avaria durante la corsa di decollo, questo sia portato a compimento, ossia che il pilota acceleri l'aeromobile sino ad un'opportuna velocità e lo stacchi da terra per iniziare il volo. Una volta in volo verranno attivate le procedure per riportare l'aeromobile a terra. In questo caso si considera un primo segmento che indichiamo con x'_{d_M}, dato da

$$x'_{d_M} = \frac{1}{2}\int_0^{V'} \frac{dV^2}{\dot{V}}$$

e che rappresenta lo spazio di pista impegnato dal momento in cui il velivolo inizia ad accelerare partendo da velocità nulla, fino al momento in cui il velivolo raggiunge la velocità V' in corrispondenza della quale si verifica l'avaria del motore; il primo segmento di pista impegnato dunque corrisponde ad una situazione in cui tutti i motori sono operativi. Il secondo segmento lo indichiamo con x''_{d_M} ed è dato da

$$x''_{d_M} = \frac{1}{2}\int_{V'}^{V'_d} \frac{dV^2}{\dot{V}}$$

con $V'_d = 1{,}15V_S$ (dove ricordiamo che la V_S è calcolata in configurazione di decollo); tale segmento dunque rappresenta la distanza percorsa durante la corsa di rullaggio per portare il velivolo dalla V' alla velocità di decollo V'_d con un motore non operativo; notiamo come le norme ammettano che, in caso di avaria ad un motore, il velivolo possa essere staccato da terra ad una velocità più bassa di quella che avremmo se tutti i motori fossero operativi, così da limitare la lunghezza di pista impegnata. Per il calcolo di questi primi due segmenti vale il medesimo discorso fatto al riguardo di $\dot{V}$, in particolare riguardo alla definizione di un valore medio $\bar{\dot{V}}$. Il terzo segmento corrisponde ad una fase di rotazione e lo indichiamo con x'_{d_R}; esso è dato semplicemente da

$$x'_{d_R} = \Delta t V'_d$$

dove in genere $\Delta t = 2$ s. L'ultimo segmento lo indichiamo con x'_{d_H} ed è quello corrispondente alla fase in volo; esso viene calcolato esattamente come visto alla fine del § 3, tenendo però conto che abbiamo un motore in meno. In definitiva lo spazio totale di decollo nella procedura *accelerate and go* è

$$(x_d)_{AG} = x'_{d_M} + x''_{d_M} + x'_{d_R} + x'_{d_H}.$$

Notiamo come per il calcolo dello spazio di decollo in questa procedura il parametro caratteristico sia proprio la velocità V' alla quale avviene l'avaria; è quindi utile verificare l'andamento di $(x_d)_{AG}$ in funzione della velocità V'.
È comprensibile che se la velocità V' è bassa, avremo lunghezze di pista necessaria maggiori. Il caso limite è $V' = 0$: come il pilota dà manetta uno dei motori va in avaria e quindi tutto il decollo dovrà essere effettuato con gli altri motori. Viceversa, tanto maggiore è V' e tanto minori saranno gli spazi di pista impegnati (se difatti V' è alta significa che abbiamo fatto buona parte della corsa di decollo con tutti i motori operativi).

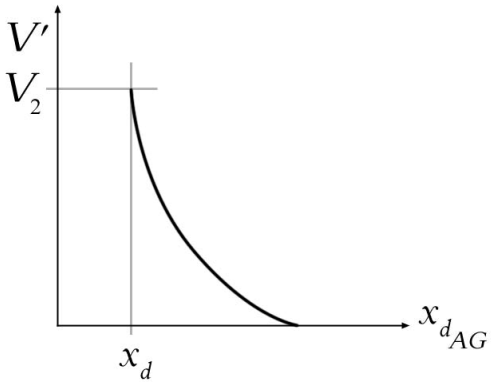


Figura 5

- ACCELERATE AND STOP: questa seconda procedura prevede il fatto che, una volta verificatasi l'avaria al motore, il pilota interrompa il decollo decelerando l'apparecchio fino a portarlo in condizioni di arresto nel minor tempo possibile. Lo spazio corrispondente è dato da

$$(x_d)_{AS} = x'_{d_M} + x'''_{d_M} + x''''_{d_M}$$

dove x'_{d_M} è la medesima distanza della procedura precedente, ovvero è il segmento di pista impegnato quando ancora non si è presentata alcuna avaria. Alla velocità V' abbiamo un'avaria e da quel momento il pilota compie una serie di operazioni: le FAR 25 prevedono che nel calcolo dello spazio di decollo in questo caso si tenga conto di un segmento x'''_{d_M} che corrisponda alla distanza percorsa prima che il pilota si renda conto che un motore sia in avaria e che quindi occorrerà interrompere il decollo. Tale segmento viene espresso semplicemente come

$$x'''_{d_M} = \Delta t_p V'$$

dove Δt_p è detto *tempo di percezione*, il tempo necessario perché il pilota si accorga dell'avaria, porti a zero la spinta dei motori operativi ed inizi ad agire sui freni; tale intervallo di tempo viene in genere posto pari a 2 s.
L'ultimo segmento, indicato con x''''_{d_M} ed è quello che corrisponde alla fase di decelerazione del velivolo

$$x''''_{d_M} = \frac{1}{2}\int_{V'}^{0} \frac{dV^2}{\dot{V}}$$

dove ricordiamo che

$$\dot{V} = \frac{g}{W}\left[T - D - \quad (W - L)\right]$$

ma, rispetto al caso in cui il velivolo è in accelerazione, $T = 0$ ed il coefficiente di attrito $\approx 0{,}5$, è quello del caso in cui il velivolo stia frenando. Anche in questo caso, a parità di tutti gli altri parametri, lo spazio di frenata è funzione della velocità

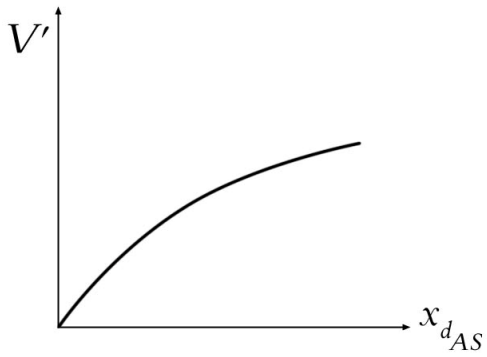


Figura 6

Notiamo che, nel caso in cui l'avaria si verifichi proprio quando il velivolo stia per iniziare la corsa di decollo, lo spazio corrispondente nella procedura *accelerate and stop* è nullo. Lo spazio impiegato sarà invece tanto maggiore quanto maggiore è la V'.

Per quanto riguarda il caso di avaria ad un motore, le FAR 25 prevedono che, in dipendenza dalla velocità di decisione V_1, la distanza di decollo da prendere in considerazione,

per quel dato velivolo in quella certa condizione di carico, sia la maggiore tra $(x_d)_{AG}$ e $(x_d)_{AS}$; chiariamo con un esempio. Ricordiamo anzitutto che la velocità di decisione V_1, rappresenta quella velocità tale che, se l'avaria del motore avviene proprio a $V' = V_1$, il decollo può essere interrotto oppure portato a compimento in sicurezza; perciò se l'avaria del motore avviene a $V' < V_1$ il pilota deve interrompere il decollo, mentre se l'avaria avviene a $V' > V_1$ il pilota deve portare a compimento il decollo. È chiaro quindi che, alla luce di quanto prescrivono le norme, la scelta della velocità di decisione, che viene lasciata alle compagnie aeree è fondamentale ai fini della determinazione della lunghezza di pista impiegata; supponiamo infatti che sia stata selezionata una velocità di decisione elevata che indichiamo con V_1': le FAR 25 impongono di scegliere la maggiore tra le distanze associate alle due procedure, perché il pilota può decidere di fermare l'aeroplano e perciò in questo caso la distanza da considerare è $\overline{x}_d'$.

Se viceversa la compagnia fissa una velocità di decisione V_1'' molto bassa, la distanza da tenere in considerazione è $\overline{x_d''}$, relativa alla procedura di *accelerate and go*: in questo caso dunque abbiamo un basso impegno di pista per arrestare il velivolo ed uno spazio elevato per portare a compimento il decollo. Osserviamo quindi come al variare della V_1, dovendo sempre scegliere la maggiore delle due distanze, finiamo di fatto per muoverci lungo la linea a tratto continuo di Figura 7 e quindi, al crescere di V_1, lo spazio di decollo inizialmente decresce, raggiunge un minimo e poi cresce nuovamente. È evidente dunque che conviene scegliere come velocità di decisione quella a cui è associato il minor spazio necessario di pista $\overline{x}_{d_{min}}$, ossia quando la distanza di decollo per la procedura *accelerate and go* e la distanza di decollo la procedura *accelerate and stop* risultino uguali; in questo modo infatti, nel caso di avaria a velocità V_1, sia che il pilota decida di continuare il decollo, sia che decida invece di interromperlo, la distanza di pista necessaria è la stessa: in questa situazione abbiamo la cosiddetta *lunghezza di pista bilanciata*. Non c'è nulla che impedisca la scelta di una velocità di decisione elevata, ma potrebbe accadere che per un determinato tipo di aeromobile, in un determinato giorno, in un determinato aeroporto e con una determinata condizione di carico, lo spazio di decollo imposto dalle norme non risulti compatibile con la lunghezza di pista sulla quale il velivolo si accinga a decollare.

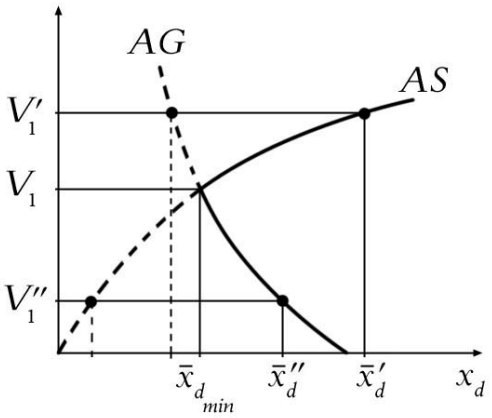


Figura 7

Per determinare la velocità di decisione nella situazione di pista bilanciata dobbiamo semplicemente uguagliare gli spazi di decollo nelle due procedure

$$(x_d)_{AG} = (x_d)_{AS} \qquad \Rightarrow \qquad x''_{d_M} + x'_{d_R} + x'_{d_H} = x'_{d_M} + x'''_{d_M} + x''''_{d_M}$$

in questa equazione l'incognita è proprio V_1, nota la quale, possiamo calcolare la distanza corrispondente. Le FAR 25 in realtà prevedono una terza situazione che va tenuta in considerazione poiché impongono che lo spazio di decollo da considerare sia il maggiore tra i due che abbiamo appena descritto e lo spazio di pista necessario a compiere il decollo con tutti i motori operativi maggiorato del 15 %, ossia $\bar{x}_d = max\{(x_d)_{AG}; (x_d)_{AS}; 1{,}15x_d\}$. Questo terzo elemento riguarda soprattutto i velivoli quadrimotore, il cui spazio di decollo risulta poco influenzato da un'avaria; come risultato si è quindi concluso che le condizioni sulle procedure *accelerate and go* ed *accelerate and stop* avrebbero garantito dei margini di sicurezza troppo ridotti, poiché tali distanze risultano troppo vicine alla distanza impiegata con tutti i motori operativi. Da quanto ora detto è chiaro che la condizione più penalizzante per un velivolo quadrimotore è quasi sempre la terza, mentre per un velivolo bimotore lo sono le prime due.

12.5 - EFFETTO DEL VENTO SUGLI SPAZI DI DECOLLO

Per concludere il discorso sulla determinazione degli spazi di decollo dobbiamo analizzare l'influenza del vento, che sarà chiaramente diversa a seconda che il vento provenga dalla prua o dalla coda del velivolo. È intuitivo che un vento di prua riduce lo spazio di decollo poiché riduce la velocità di decollo rispetto al suolo: se infatti per assurdo il velivolo si trovi fermo sulla pista con un vento di prua pari proprio alla sua velocità di decollo, basterebbe che il pilota ruoti il velivolo affinché questo si stacchi da terra con uno spazio di pista impe-

gnato nullo; viceversa un vento di coda aumenta lo spazio di decollo. Le FAR 25 prevedono che si tenga conto della presenza del vento calcolando la distanza in funzione del 50% del valore misurato di vento a prua e del 150% del valore misurato di vento a sfavore (cioè di coda), questo per mantenersi in condizioni di sicurezza.

12.6 - L'ATTERRAGGIO

F-16 belga in atterraggio

Nella fase di atterraggio le norme prevedono che il velivolo arrivi sulla soglia della pista con un'altezza minima di 50 ft, lungo una traiettoria rettilinea inclinata di –3° rispetto all'orizzonte, la quale rappresenta il radiosentiero[13] definito dagli apparati di assistenza al volo; a questo punto il pilota effettua una manovra di *flare*[14] che consiste di fatto in un raccordo tra la traiettoria di discesa e la traiettoria orizzontale, la quale permette poi al velivolo, riducendo ulteriormente la velocità, di posare il carrello principale prima ed il ruotino anteriore poi, sulla pista.

[13] L'angolo di rampa determinato dal radiofaro dello ILS (*Instrumental Landing System*, sistema di atterraggio stumentale) è in tutta Europa di –3°.

[14] L'inizio della manovra di *flare* avviene ad una quota che in genere è intorno ai 40-50 ft e che dipende molto dal tipo di velivolo.

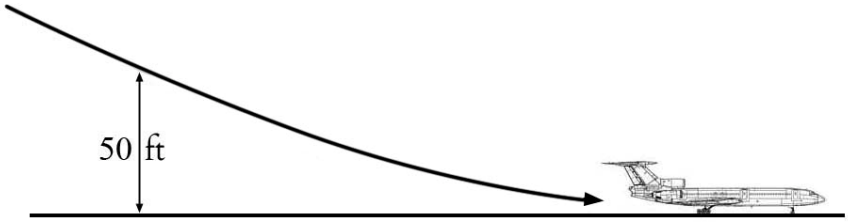


Figura 8

Vediamo a questo punto come viene schematizzata tale manovra per il calcolo degli spazi di pista necessari. Anche in questo caso, così come accade per il decollo, le norme dividono lo spazio x_a in tre segmenti

$$x_a = x_{a_H} + x_{a_R} + x_{a_M}$$

cioè un segmento in volo (x_{a_H}), un primo segmento a terra (x_{a_R}) che corrisponde alla fase in cui il velivolo, con il carrello principale già al suolo, porta a terra anche il carrello di prua, ed infine un terzo segmento (x_{a_M}) che corrisponde alla decelerazione del velivolo sulla pista. Per quanto riguarda la determinazione di x_{a_M} faremo dei ragionamenti di tipo energetico, che, senza entrare nel merito dell'accuratezza ottenuta, ci indicheranno quali parametri intervengano.

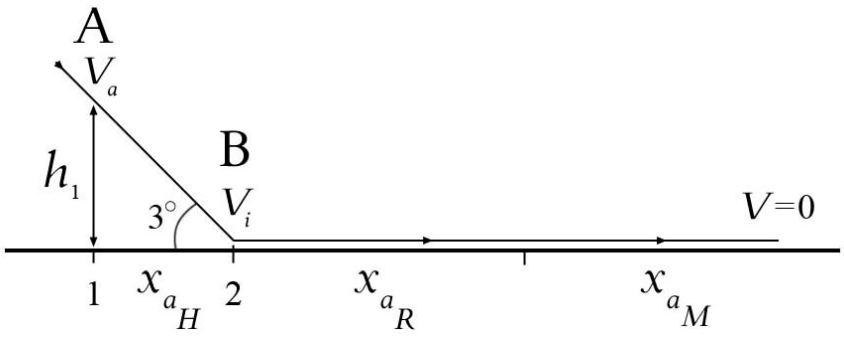


Figura 9

In corrispondenza dell'ostacolo critico si assume che l'aeromobile abbia una velocità V_a, detta velocità di avvicinamento, pari a

$$V_a = 1,30 V_S$$

dove V_S è calcolata in configurazione di atterraggio, cioè con carrello fuori e ipersostentatori completamente estesi. Nel momento in cui nel nostro schema il velivolo tocca terra, la velocità viene detta *velocità di impatto*[15] e viene assunta pari a

$$V_i = 1{,}15 V_S .$$

L'energia associata all'aeromobile all'inizio del segmento (cioè nel punto A) è quindi

$$W\left(h_1 + \frac{V_a^2}{2g}\right)$$

mentre l'energia associata al velivolo al termine del segmento (cioè nel punto B) è

$$W\frac{V_i^2}{2g}.$$

La variazione di energia per passare dal punto A al punto B sarà perciò

$$\Delta\varepsilon = W\left(h_1 + \frac{V_a^2 - V_i^2}{2g}\right)$$

e sarà pari al lavoro $L_F = \vec{F}\cdot\vec{x}_{a_H}$, fatto da una forza che per ora chiamiamo in modo molto generico forza ritardatrice, nella quale al posto della distanza effettiva $\overline{\mathrm{AB}}$ percorsa lungo la traiettoria, abbiamo considerato proprio x_{a_H} poiché l'angolo di rampa è molto piccolo e quindi tali due distanze sono molto vicine tra loro. Dall'uguaglianza $\Delta\varepsilon = L_F$ abbiamo dunque

$$Fx_{a_H} = W\left(h_1 + \frac{V_a^2 - V_i^2}{2g}\right).$$

Notiamo che la forza ritardatrice è di fatto la resistenza del velivolo, $F = D$, ed inoltre, tenendo sempre conto che l'angolo di rampa è piccolo, l'equazione di sostentamento, che deve sempre essere verificata, mostra $W \approx L$; dalla precedente abbiamo quindi

[15] Questo è vero però solo nel nostro schema perché, in realtà, il velivolo non tocca terra alla velocità di impatto; nel caso reale infatti la velocità di impatto corrisponde all'incirca alla velocità a cui viene iniziato il flare.

$$x_{a_H} = E\left(h_1 + \frac{V_a^2 - V_i^2}{2g}\right)$$

e questa è la relazione che ci permette di esprimere in forma approssimata la lunghezza del primo segmento. L'elemento più interessante che deriva dalla precedente risiede nel fatto che in questa compare l'efficienza aerodinamica. Osserviamo come tanto maggiore è E e tanto più grande è lo spazio impiegato in questa fase; fisicamente ciò è spiegabile tenendo conto che l'efficienza aerodinamica può essere vista dal punto di vista fisico come l'inverso di un coefficiente di attrito (si veda § 2.22) poiché in questa fase del volo il problema principale è quello di dissipare energia, è immediato che tanto più la configurazione è poco efficiente, dal punto di vista aerodinamico, e tanto minore sarà lo spazio richiesto per dissipare l'energia che il velivolo possiede nel momento in cui inizia la manovra di atterraggio. Per questo motivo è piuttosto importante che in questa fase gli ipersostentatori siano estratti alle massime angolazioni; ciò infatti non solo produrrà un aumento notevole del $C_{L_{max}}$, il quale consente di ridurre le velocità che intervengono nella manovra, ma determinerà anche un notevole aumento del coefficiente di resistenza che consente di minimizzare lo spazio impiegato.

Per quanto riguarda la fase di rotazione, lo spazio impiegato viene calcolato come

$$x_{a_R} = \Delta t V_i$$

mentre per il terzo segmento, quello a terra con tutti i carrelli, in modo analogo a quanto già visto, troviamo

$$x_{a_M} = \frac{1}{2}\int_{V_i}^{0} \frac{dV^2}{\dot{V}}$$

dove $\dot{V}$ (che è negativa) è espressa come

$$\dot{V} = \frac{g}{W}\left[T - D - \quad (W - L)\right].$$

Analizziamo i vari termini dell'equazione precedente. Per quanto riguarda la spinta, possiamo porre $T \leq 0$, valori negativi della spinta si ottengono mediante i sistemi di inversione. In figura 10 sono rappresentati gli inversori di spinta, in inglese *thrust reversal*, accessori del motore, solitamente posizionati nella parte posteriore della gondola, la quale viene ruotata in modo tale che il getto venga indirizzato in avanti ed eserciti così un'azione frenante, la quale, in termini di spinta inversa, può arrivare fino al 20 - 30 % della spinta massi-

ma erogata dal motore. Troviamo alcuni di questi sistemi anche su velivoli militari, come ad esempio il Tornado; sui velivoli più recenti con motori ad alto rapporto di diluizione, per motivi legati alle prestazioni dei sistemi meccanici abbastanza complessi che intervengono in questo tipo di applicazioni, i sistemi di inversione funzionano in modo da agire solo sulla parte fredda del flusso, per questo motivo l'efficacia ne è notevolmente ridotta.

Per quanto riguarda invece il termine $(W - L)$ sappiamo che nei casi di pista asciutta[16] il valore del coefficiente è intorno a 0,5; possiamo però intervenire sulla differenza $W - L$: tanto più questa differenza è alta e tanto più efficace sarà l'azione frenante: a tale scopo vengono usati i deflettori[17]: i deflettori possono essere azionati dal pilota oppure automaticamente non appena dei sensori posti sui carrelli registrano il peso dell'apparecchio gravante sui carrelli stessi; gli angoli di cui vengono ruotati i deflettori arrivano quasi a 90°.

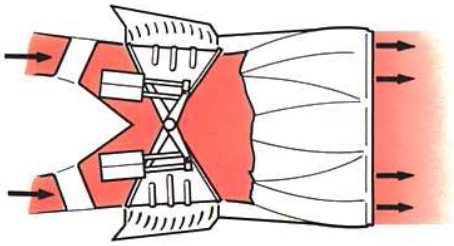
L'effetto non è unicamente quello di un aerofreno (è comprensibile vi sia un notevole aumento della resistenza), bensì anche quello di produrre la separazione del flusso su una parte molto estesa della superficie alare: in tal modo la portanza si riduce notevolmente ed il carrello risulta in tal modo più caricato, rendendo così più efficace l'azione frenante sulle ruote.

Panavia Tornado, si notino i vistosi inversori di spinta ed i deflettori. È possibile notare il getto diretto in avanti. Gli elevatori sono angolati per mantenere un assetto composto in frenata del cacciabombardiere.

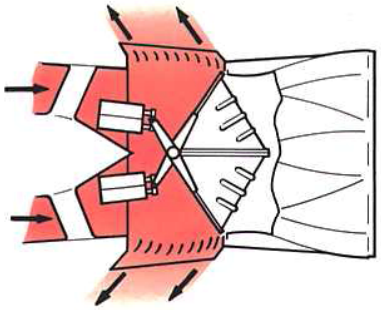
[16] In questo caso infatti si riduce l'azione frenante delle ruote.

[17] Alcuni aviogetti impiegano sia deflettori di manovra che deflettori di frenata.

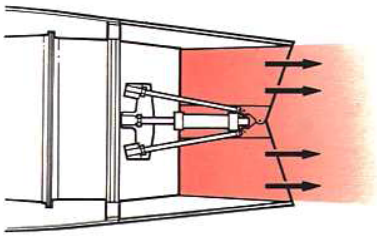
Airbus A340 con gli inversori di spinta ed i deflettori attivati.



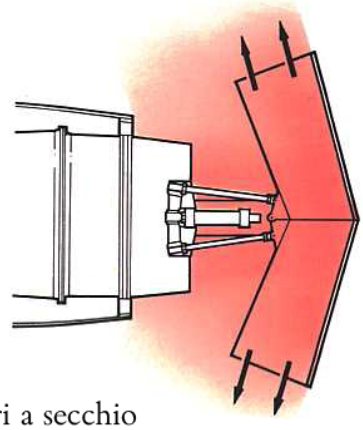
Inversori a guscio
posizione chiusa



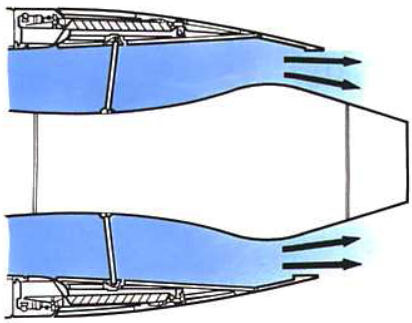
Inversori a guscio
posizione estratta



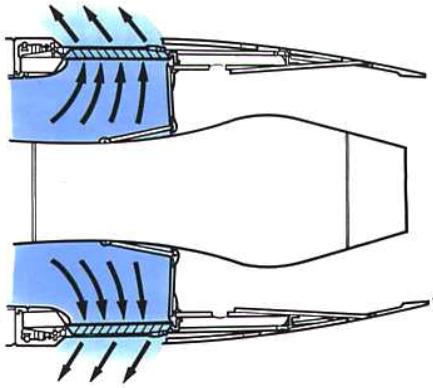
Inversori a secchio
posizione chiusa



Inversori a secchio
posizione estratta



Inversori di flusso freddo
posizione chiusa



Inversori di flusso freddo
posizione estratta

Inversori di spinta - Figura 10

Capitolo 13

IL VOLO IN MANOVRA

13.1 - FATTORE DI CARICO: INVILUPPO DI VOLO IN MANOVRA

Analizziamo il volo in manovra per studiare le caratteristiche di volo più importanti, riguardanti in particolare le manovre di virata e di richiamata. Prima di entrare nel dettaglio di tali manovre dobbiamo introdurre e discutere il parametro mediante il quale si caratterizzano fasi di volo in presenza di accelerazioni (che corrispondono in genere a fasi di volo manovrato); tale parametro caratteristico prende il nome di *fattore di carico*. Il fattore di carico è una grandezza vettoriale che indichiamo con $\vec{n}$ e che per definizione è data dalla risultante delle forze di massa agenti sull'aereo (quindi forza peso e forza d'inerzia) per unità di peso; dato che a noi interesserà avere le componenti di $\vec{n}$ nella terna di assi vento, conviene fare uso direttamente di tale terna, quindi, tenendo conto dell'equazione

$$m\left(\dot{\vec{v}}_c + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_W = \left(\vec{F}_A + \vec{F}_P + \vec{F}_T\right)_W$$

di bilancio della quantità di moto scritta in assi vento (si veda § 4.10), abbiamo

$$\vec{n} = \frac{\vec{F}_P - m\left(\dot{\vec{v}}_c + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}_W \vec{v}_c\right)_W}{\left|\vec{F}_P\right|}$$

dove $\left|\vec{F}_P\right| = W$; confrontando le due equazioni precedenti otteniamo

$$\vec{n} = -\frac{\vec{F}_A + \vec{F}_T}{\left|\vec{F}_P\right|}.$$

Il primo passo che dobbiamo compiere è scrivere, sempre con riferimento a condizioni di volo simmetrico, le componenti longitudinale (cioè lungo l'asse x_W) e normale (cioè lungo l'asse z_W) del fattore di carico. A tale scopo teniamo presenti le due equazioni scalari

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}\dot{V} = T - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma \\ -\dfrac{W}{g}\dot{\gamma}V = -L + W\cos\gamma \end{cases}$$

dedotte dall'equazione vettoriale scritta all'inizio del § (si veda la fine del § 4.10); per la componente longitudinale abbiamo

$$n_x = -\left(\mathrm{sen}\,\gamma + \frac{\dot{V}}{g}\right) = -\frac{T-D}{W}$$

mentre per la componente normale si ha

$$n_z = \cos\gamma + \frac{V}{g}\dot{\gamma} = \frac{L}{W}.$$

Delle due componenti ora determinate, quella per noi più importante è sicuramente n_z, anzitutto perché è quella che ha un maggior effetto sullo stato fisico del pilota e dell'equipaggio[1], poi perché il fattore di carico normale è rappresentativo di accelerazioni (e di conseguenza di sollecitazioni sulla struttura) in una direzione che approssimativamente è ortogonale al piano alare e quindi strettamente legato a momenti flessionali agenti alla radice dell'ala. Notiamo come avendo scelto una rappresentazione in assi vento il fattore di carico normale assuma la fondamentale e semplice espressione appena scritta: il fattore di carico normale è cioè per definizione pari al rapporto tra portanza e peso; osserviamo inoltre come, nelle condizioni stazionarie di volo, su traiettoria rettilinea a quota e velocità costanti che abbiamo trattato fino a questo punto, i valori di $\vec{n}$ siano

$$\begin{aligned} n_{x_e} &= 0 \\ n_{z_e} &= 1 \end{aligned}$$

[1] Un pilota addestrato e attrezzato con una tuta *anti-g* può tollerare al massimo valori del fattore di carico normale pari ad 8 g positivi (cioè nella direzione testa - piedi) e 3 g negativi (cioè nella direzione piedi - testa) per pochi secondi. La resistenza ad accelerazioni tangenziali è invece molto superiore, possono infatti essere tollerate accelerazioni di 10 g anche per qualche minuto.

lo possiamo dedurre immediatamente dalle condizioni di equilibrio relative a tali situazioni.

Dobbiamo ora determinare il cosiddetto inviluppo di volo in manovra, il quale rappresenta l'inviluppo nel piano $h;V$ di tutte le possibili condizioni di volo a fattore di carico (in particolare normale) contante; esso è cioè un grafico che permette di identificare le condizioni di volo stabilizzato (dove stabilizzato indica a velocità costante e fattore di carico costante) in funzione della quota e delle velocità. Tale grafico viene costruito seguendo un procedimento molto simile a quello che ci ha portato all'inviluppo di volo a livello, cioè a fattore di carico $n_z = 1$; partiremo dall'equazione che uguaglia T_d e T_n, relativamente però a condizioni di volo a $n_z > 1$. Consideriamo per semplicità in una situazione in cui $n_x = 0$, che corrisponde all'assenza di accelerazioni nella direzione del moto; in tale situazione la spinta necessaria è data da

$$T_n = D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{D_0} + \frac{1}{2}\varrho V^2 S K C_L^2 .$$

Per esprimere il C_L dobbiamo tener presente che nel volo in manovra non abbiamo più $L = W$ poiché vale la $n_z = \frac{L}{W}$ con $n_z > 1$; pertanto abbiamo

$$C_L = \frac{2W}{\varrho V^2 S} n_z$$

che, sostituito nella precedente, diviene

$$T_n = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{D_0} + \frac{K W^2}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S} n_z^2$$

e introducendo i coefficienti A e B già definiti diventa

$$T_n = A V^2 + \frac{B}{V^2} n_z^2$$

osserviamo come il fattore di carico normale intervenga a moltiplicare il termine di resistenza indotta con lo stesso esponente del peso: è come se il peso effettivo del velivolo non fosse pari a W, ma fosse diventato Wn_z.

Conviene ora introdurre la cosiddetta espressione della *spinta disponibile generalizzata*, cioè la spinta disponibile scritta in forma generale e quindi valida per ogni tipo di velivolo

$$T_d = \delta_T T_{d_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{x_V} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{x_\varrho}$$

quindi la spinta disponibile si rappresenta in generale tenendo conto della variabile di controllo δ_T (che varia tra 0 e 1), di un valore T_{d_0} di riferimento (che corrisponde al valore della spinta per $V = V_0$ e $\varrho = \varrho_0$, dove il pedice 0 sta ad indicare condizioni di riferimento) e degli effetti di velocità e quota mediante gli esponenti x_V ed x_ϱ che dipendono dal tipo di propulsore[2].

Uguagliando la precedente con la T_n abbiamo

$$\delta_T T_{d_0} \left(\frac{V}{V_0} \right)^{x_V} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{x_\varrho} = \frac{1}{2} \varrho V^2 S C_{D_0} + \frac{2KW^2}{\varrho V^2 S} n_z^2$$

che riscriviamo come

$$\left[\frac{\delta_T T_{d_0}}{V_0^{x_V} \varrho_0^{x_\varrho}} \frac{S}{2KW^2} \right] \varrho^{(x_\varrho + 2)} V^{(x_V + 2)} - \left[\frac{1}{4} \frac{S^2 C_{D_0}}{KW^2} \right] \varrho^2 V^4 = n_z^2$$

avendo così esplicitato il fattore di carico normale mettendo in evidenza i termini di densità e velocità. Facendo riferimento ad un propulsore a getto ($x_V = 0$) riscriviamo la precedente in una forma più compatta

$$c_1 \varrho^{(x_\varrho + 2)} V^2 - c_2 \varrho^2 V^4 = n_z^2$$

dove nei coefficienti c_1 e c_2 abbiamo aggregato tutti quei termini che non dipendono da quota e velocità; quindi dal punto di vista funzionale $n_z = n_z(h; V)$. Per un determinato tipo di velivolo, di cui conosciamo le caratteristiche del propulsore, i coefficienti della polare ed il carico alare, siamo in grado di tracciare la precedente nel piano n-V con parametro ϱ (e quindi h).

[2] Per esempio nel caso del getto $x_V = 0$ poiché abbiamo sempre fatto l'ipotesi che T_d non dipenda dalla velocità di volo.

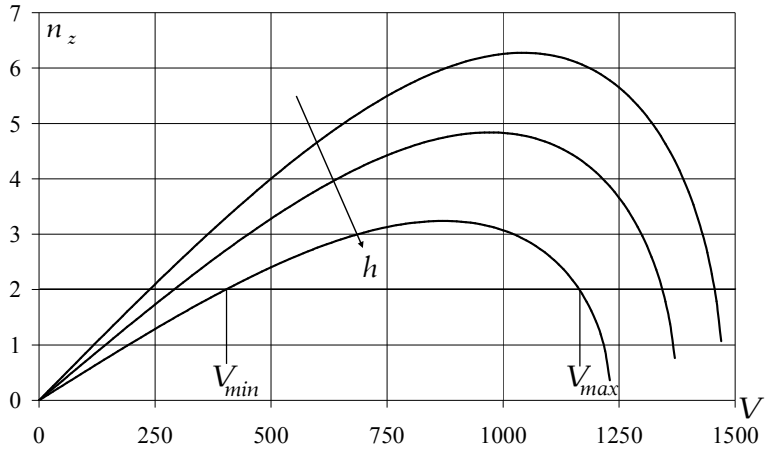


Figura 1

Il problema della determinazione dell'inviluppo di volo in manovra (cioè di un grafico che identifica condizioni di volo stabilizzato a diversi valori della quota e della velocità) sembrerebbe a questo punto quasi risolto: per un dato $\bar{n}_z$ possiamo individuare i valori di V_{min} e V_{max} per ogni quota. Tuttavia in tale grafico, pur avendo considerato correttamente le caratteristiche del propulsore, manca l'informazione fondamentale relativa al $C_{L_{max}}$, perché abbiamo utilizzato una polare di tipo parabolico (quindi approssimata). Per introdurre questa limitazione aerodinamica partiamo dalla definizione $n_z = \frac{L}{W}$; per ogni valore della velocità di volo il massimo valore di n_z è quello che si ha per

$$n_z = \frac{\frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{L_{max}}}{W}$$

se tentassimo di ottenere, per quel valore di V, un maggiore fattore di carico il velivolo stallerebbe. Possiamo esprimere tale valore limite del fattore di carico normale come

$$n_z = \left(\frac{C_{L_{max}}}{2\, W/S} \right) \varrho V^2 = c_3 \varrho V^2$$

dove c_3 è un termine costante per un determinato velivolo (trascurando gli effetti della compressibilità, perché altrimenti il $C_{L_{max}}$ dipenderebbe dalla velocità tramite il numero di Mach). La precedente esprime, a parità di ϱ, una dipendenza di tipo parabolico tra n_z e V che possiamo riportare sul grafico di figura 1, ottenendo quello di figura 2.

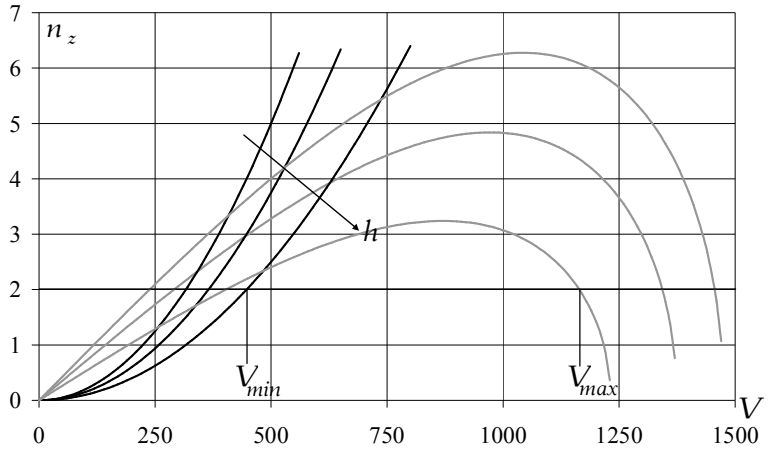


Figura 2

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per tracciare l'inviluppo di volo. Vediamo anzitutto come si determinano le velocità V_{min} e V_{max} in corrispondenza di un certo valore di n_z e di un certo valore di h; fissiamo dunque $h = \overline{h}$ e tracciamo la curva dell'equilibrio tra T_d e T_n e quella relativa alla limitazione aerodinamica.

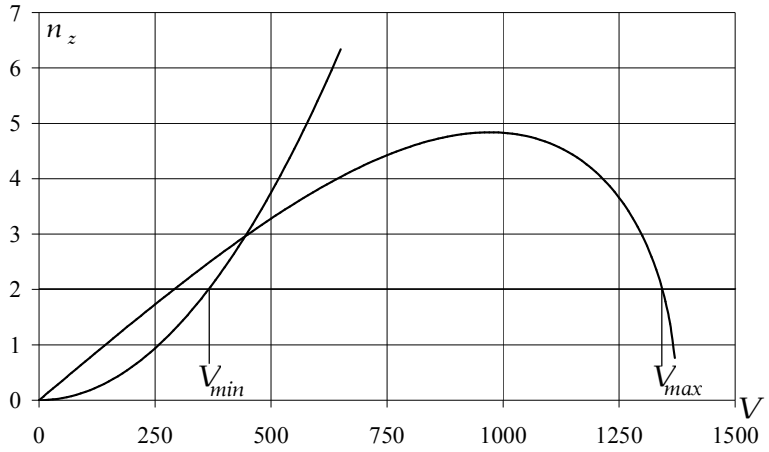


Figura 3

Fissato un generico valore $\overline{n}_z$ del fattore di carico, possiamo tracciare la retta orizzontale $n_z = \overline{n}_z$ ed individuare così i valori di V_{min} e V_{max}; facciamo attenzione al fatto che nel caso di figura 3 la V_{min} è determinata dalla limitazione aerodinamica: dal punto di vista unicamente propulsivo potremmo volare a $V < V_{min}$, ma ciò non sarà possibile dacché non siamo in grado di sviluppare il C_L necessario. Non è detto però che la V_{min} sia sempre determinata dalla limitazione aerodinamica: per un altro valore della quota ed in dipendenza dal tipo di velivolo, la V_{min} può essere determinata dalle caratteristiche propulsive (ciò accade se la curva della limitazione aerodinamica si trova a sinistra della curva dell'equilibrio tra spinta

necessaria e spinta disponibile). Ripetendo tale procedimento per tutti i valori della quota ai quali sussiste una soluzione del problema, e per tutti i valori di n_z per i quali il problema ha soluzione, otteniamo il seguente grafico.

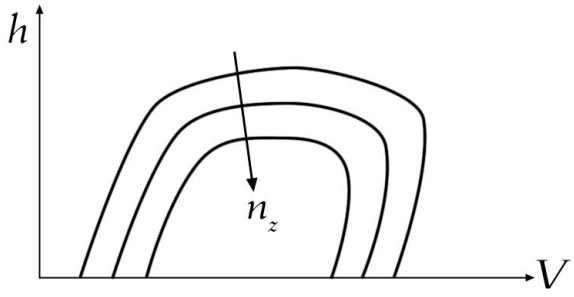


Figura 4

Possiamo osservare che tanto più grande è n_z e tanto più l'inviluppo di volo si restringe, sino a ridursi ad un punto, il quale ci permette di identificare il valore massimo di n_z al quale l'aeromobile può volare in condizioni stabilizzate. Si faccia attenzione però che tale valore di n_z non tiene conto di quella che è la resistenza strutturale del velivolo.

Prima di andare avanti soffermiamoci un attimo sul significato di *manovra stabilizzata*; per manovra stabilizzata intendiamo una manovra con n_z e V costanti, cioè una condizione di volo in cui i parametri del moto si mantengano costanti pur essendo presenti delle accelerazioni; ad esempio in una virata stabilizzata (che illustreremo poco più avanti) la velocità nel sistema di assi corpo è costante e, se la traiettoria è circolare, anche le accelerazioni (che sono di tipo centripeto).

Un altro problema interessante e di semplice soluzione è quello della determinazione della T_n in funzione di n_z; questo problema ha un suo interesse non tanto per determinare quantitativamente l'entità della variazione di T_n, quanto piuttosto per definire quale tipo di fenomeno è responsabile di quello che possiamo già anticipare sarà un aumento della spinta necessaria. Definiamo il parametro adimensionale

$$\sigma = \frac{T_n\left(n_z > 1\right)}{T_n\left(n_z = 1\right)}$$

il quale, tenendo conto della $T_n = A\,V^2 + \dfrac{B}{V^2} n_z^2$, diventa

$$\sigma = \frac{A\,V^2 + \dfrac{B}{V^2} n_z^2}{A\,V^2 + \dfrac{B}{V^2}} = \frac{\dfrac{A}{B} V^4 + n_z^2}{\dfrac{A}{B} V^4 + 1} = 1 + \frac{n_z^2 - 1}{\dfrac{A}{B} V^4 + 1}$$

che è la soluzione del nostro problema; rappresentiamo l'andamento di σ in funzione di V, avendo a parametro n_z

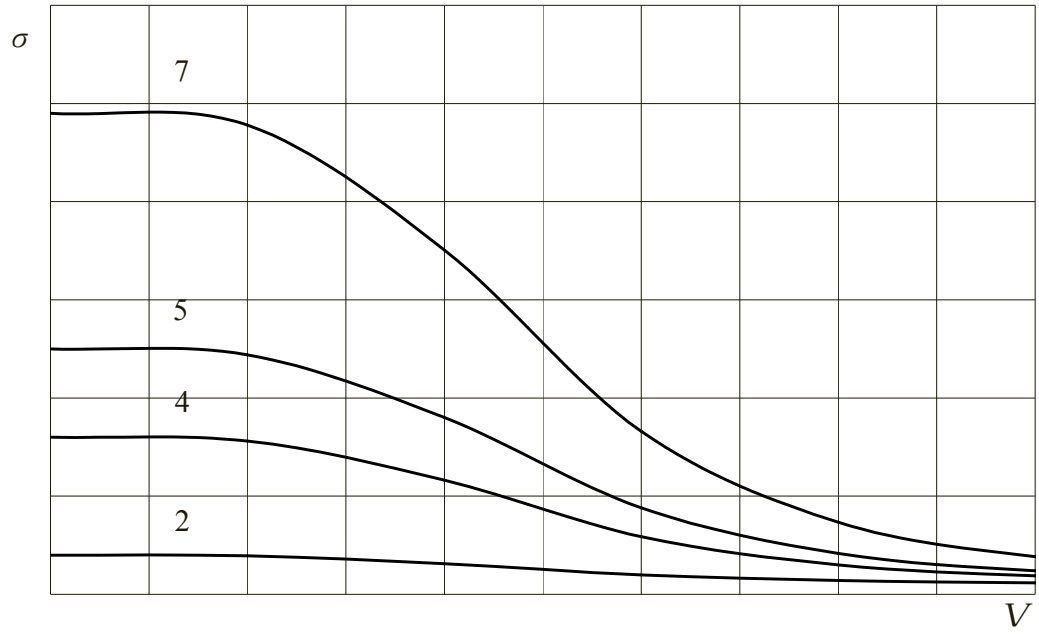


Figura 5

troviamo che alle basse velocità di volo la T_n aumenta molto per condizioni di volo $n_z > 1$, mentre all'aumentare di V l'incremento di T_n tende a diminuire piuttosto rapidamente. Tale effetto è legato alla resistenza indotta: se vogliamo aumentare n_z, a parità di peso, dobbiamo aumentare L ($n_z = \frac{L}{W}$); alle basse velocità di volo dunque realizzare valori elevati di n_z significa produrre aumenti notevoli del C_L e ciò determina un notevole aumento della resistenza indotta; alle alte velocità invece il C_L è basso e quindi un suo aumento produce una variazione relativamente contenuta della resistenza indotta. Quindi quando effettuiamo delle manovre ad un certo valore di n_z abbiamo degli effetti sia in termini di aerodinamica che in termini di spinta erogata dal motore. Quando voliamo a basse velocità, dobbiamo avere, per sviluppare valori elevati di n_z, sia una buona aerodinamica che ci permetta di realizzare i valori necessari del $C_{L_{max}}$, sia un motore potente in modo tale che la spinta, se parliamo di un getto, permetta di equilibrare l'aumento di resistenza indotta (e quindi di T_n).

13.2 - DIAGRAMMA DI MANOVRA

Parlando di fattore di carico non possiamo fare a meno di citare il *diagramma di manovra*: esso[3] rappresenta un grafico che riporta n_z in funzione di V_{EAS} ed è fondamentale per il dimensionamento strutturale del velivolo; la figura 6 è un esempio di tale diagramma, tipico di un getto da trasporto[4].

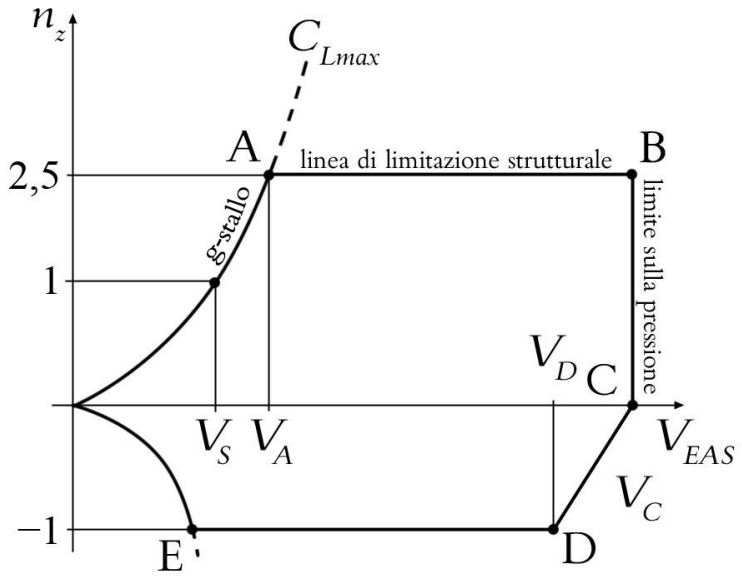


Figura 6

Il progettista usa tale diagramma per definire le sollecitazioni massime sulle componenti strutturali dell'aeromobile e utilizza tali informazioni per il dimensionamento strutturale del velivolo. La prima curva limite di tale diagramma, quella che va dalla V_S alla V_A, corrisponde alla limitazione aerodinamica ($n_z = c_3 \rho V^2$): non possiamo sviluppare con tale velivolo valori del fattore di carico normale superiori a quelli definiti da tale curva perché altrimenti si entra in *g-stallo*[5]; la velocità V_A prende il nome di *velocità di manovra* (tale velocità viene spesso indicata come *corner velocity*) e, per definizione delle FAR 25, è la massima velocità alla quale è possibile ruotare alla massima angolazione, le superfici di comando (in particolare l'equilibratore) senza che si verifichino deformazioni strutturali permanenti sulle strutture dell'aeroplano: ad esempio prendiamo in considerazione una manovra di richiamata a partire da una traiettoria avente un certo angolo di rampa; il pilota tira a se la barra, aumentando così l'angolo d'attacco e sviluppando così una portanza superiore al peso; in questo modo modifichiamo la traiettoria e nel far questo il fattore di carico aumenta. Se effettuiamo tale operazione ad una velocità inferiore alla V_A, non raggiungiamo il massimo limi-

[3] Notare che tale grafico non ha nulla a che vedere né con l'inviluppo di volo né con il grafico di figura 3.

[4] Le FAR 25 indicano un valore massimo del fattore di carico pari a $2,5$ ed un valore minimo pari a -1.

[5] Un tipo di stallo dove l'ala non produce abbastanza portanza per supportare il carico dovuto al peso ed al fattore di carico. Per esempio tutte le manovre a $n_z = 2$ aumenteranno la velocità di stallo del 40%.

te sul fattore di carico previsto per quel aeromobile (nella peggior ipotesi avviene uno g-stallo); se invece effettuiamo la stessa richiamata al di sopra della V_A possiamo raggiungere valori di n_z che si trovano lungo la linea tratteggiata di figura 6 (che rappresenta la continuazione della parabola della limitazione aerodinamica) e quindi potremmo sovraccaricare la struttura del velivolo, danneggiandola.

Le velocità V_C e V_D prendono il nome di *velocità di progetto in crociera* (V_C) e *velocità limite in affondata* (V_D). Ricordando che il *momento torcente* che sollecita le strutture dipende dalla massima velocità che il velivolo può raggiungere, la *rigidezza torsionale* dei piani orizzontali, in particolare dell'ala, alla velocità limite, dovrebbe essere alquanto elevata. Ciononostante potrebbe risultare compromessa un'eventuale *richiamata* al termine dell'*affondata,* a causa dell'elevato *fattore di carico* normale. Poiché esistono, inoltre, invalicabili limitazioni fisiologiche alla *sopportazione*, anche per piloti muniti di tuta *anti-g,* i *regolamenti* impongono precisi limiti al valore della *velocità massima* operativa. In particolare per velivoli civili la velocità massima da considerare deve essere quella raggiungibile a piena potenza in una picchiata a 30°, mentre per quelli militari o della categoria acrobatica, il 50% della limite in una picchiata in candela. Queste velocità devono essere scrupolosamente osservate dal pilota durante l'uso del velivolo, pena il cedimento delle strutture.

Il diagramma di manovra viene usato dal progettista, il quale, tenendo conto di un opportuno coefficiente di sicurezza (che le norme FAR 25 fissano in genere ad 1,5), progetterà il velivolo in modo tale che, laddove le sollecitazioni dipendano dal fattore di carico normale, le strutture siano dimensionate in modo che non riportino deformazioni permanenti in corrispondenza di un valore del fattore di carico pari al valore massimo moltiplicato per il coefficiente di sicurezza. Il diagramma di manovra però non è importante solo nella fase di progetto ma anche nella fase di certificazione del velivolo: durante tale fase vengono infatti effettuate delle prove di volo con le quali viene verificato che, volando in una serie di punti critici del diagramma (tipicamente i punti di intersezione tra le diverse linee), effettivamente le deformazioni restino in campo elastico. Sappiamo ad esempio che lungo la linea orizzontale, detta linea di limitazione strutturale, che corrisponde al massimo valore di n_z, anche se il fattore di carico si mantiene costante, cambia lo stato di sollecitazione della struttura; in particolare, parlando dell'ala, nel punto A il C_L è pari al valore massimo, mentre nel punto B sarà certamente molto più basso poiché ci troviamo ad una velocità prossima a quella massima ammissibile per quel velivolo: quindi in A il centro di pressione sull'ala è spostato in avanti, mentre il B esso è certamente più arretrato e dunque lo stato di sollecitazione dell'ala è sicuramente diverso. Il limite costituito dalla retta $\overline{BC}$ prende il nome di limite sulla pressione dinamica; in particolare in C si ha $n_z = 0$ e quindi deve essere nullo anche il C_L; in un velivolo chiaramente non da trasporto tale punto potrebbe corrispondere ad una picchiata a candela, cioè in verticale: in tale situazione effettivamente il C_L è nullo, ma la pressione dinamica è massima, perciò tale punto corrisponde alla situazione più critica per quanto riguarda lo stato di sollecitazione torsionale dell'ala. I punti D ed E corrispondono invece

a condizioni di volo in cui $n_z < 0$, il che può essere ottenuto (e certamente neanche questo è il caso dei velivoli da trasporto) in volo rovescio, oppure realizzando delle manovre in cui il fattore di carico assume valore negativo; una manovra di questo tipo è ad esempio l'affondata: il pilota comanda una picchiata e la risultante delle forze di massa è diretta verso la testa del pilota.

Un'altra osservazione interessante è la seguente: abbiamo già detto come il diagramma di manovra non abbia nulla a che fare con il diagramma dell'inviluppo di volo in manovra; una differenza che è opportuno mettere in evidenza è che l'inviluppo di volo in manovra è relativo a condizioni di volo stabilizzate, quindi fasi di volo nelle quali, realizzando un equilibrio tra forze, il fattore di carico si mantiene costante, mentre quando effettuiamo le prove di volo per verificare le caratteristiche di resistenza strutturale del velivolo nei vari punti del diagramma di manovra, parliamo di manovre che sono dette istantanee: è cioè importante che la manovra raggiunga il valore previsto del fattore di carico alla velocità prevista, ma non c'è nessuna ragione che la manovra sia stabilizzata.

L'ultima osservazione sul diagramma di manovra riguarda la dipendenza del numero di Mach. Parlando di sollecitazioni strutturali, la cosa fondamentale che vogliamo rappresentare è relativa alla pressione dinamica e quindi ci conviene ragionare in termini di velocità equivalente V_{EAS}, in questo caso il diagramma di manovra non presenta alcuna dipendenza dalla quota; facciamo ad esempio riferimento alla limitazione aerodinamica: ricordiamo che l'andamento di tale limitazione è una parabola la cui equazione è data dalla $n_z = c_3 \varrho V^2$ la quale, in termini di V_{EAS}, può essere scritta come

$$n_z = \frac{\varrho_{LM} S}{2W} C_{L_{max}} V_{EAS}^2 = c V_{EAS}^2$$

che evidenzia appunto come non ci sia dipendenza dalla quota. Questo però vale solo per velivoli che operino in un regime subsonico, perché per velivoli supersonici, il diagramma di manovra viene tracciato in funzione del numero di Mach e riporta una famiglia di curve con parametro l'altezza (la pressione); quindi nel caso in cui vi sia dipendenza dal numero di Mach, questa introduce anche una dipendenza dalla quota. Lo stesso diagramma per un velivolo supersonico può quindi assumere la seguente forma.

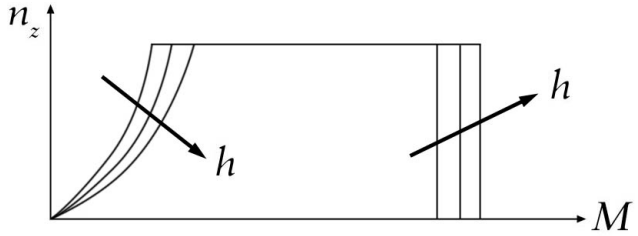


Figura 7

Notiamo l'influenza della quota sulla limitazione aerodinamica: in questo caso vale ancora la $n_z = c_3 \varrho V^2$, ma questa volta dobbiamo tener presente che il C_L è funzione del numero di Mach; riscrivendo perciò tutto in termini di M abbiamo

$$n_z = \frac{\varrho S V^2}{2W} C_{L_{max}}(M) = \frac{\gamma P S M^2}{2W} C_{L_{max}}(M)$$

ed ora compare la pressione, la quale è funzione della quota.

Per quanto riguarda la limitazione strutturale, dalla definizione del numero di Mach:

$$M^2 = \frac{V_{EAS} \cdot \frac{1}{\delta}}{a^2} = \frac{V_{EAS}^2}{\gamma \frac{P}{\varrho_{LM}}}$$

da quest'ultima si evince che restando costante V_{EAS} e diminuendo la pressione con la quota, il numero di Mach deve aumentare.

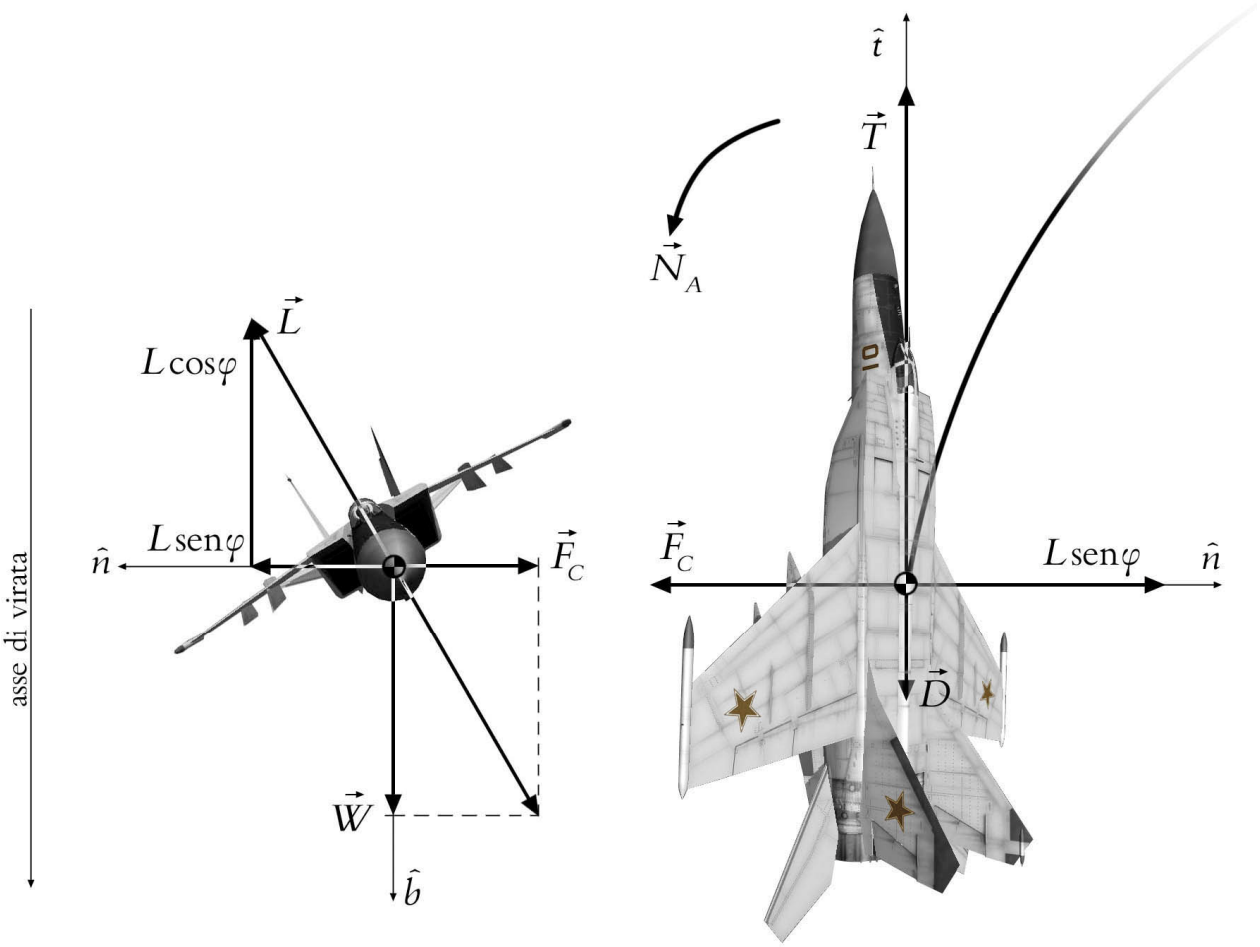
13.3 - LA VIRATA CORRETTA

La manovra di virata è quella che permette di variare la direzione del vettore velocità dell'aeroplano; nello studio delle caratteristiche si volo parleremo sempre di virate nel piano orizzontale e faremo riferimento alla cosiddetta *virata corretta*: la virata corretta è per definizione una virata nella quale la risultante delle forze di massa (cioè forza peso e forza centrifuga), che individua la *verticale apparente*, giace nel piano di simmetria del velivolo.

Ciò significa che se ad esempio su di un piano sull'apparecchio è posto un bicchiere con dell'acqua, durante una virata corretta il livello dell'acqua si mantiene parallelo al piano. In questa condizione di volo la forza che fa equilibrio alla risultante delle forza di massa è soltanto la portanza. Se la virata è corretta e se la manovra è di tipo stabilizzato[6], la traiettoria descritta dall'aeromobile è una traiettoria circolare nel piano orizzontale.

[6] Molto spesso si fa confusione tra *manovra stazionaria* e *manovra stabilizzata*; per manovra stazionaria noi intenderemo una manovra nella quale non ci sono accelerazioni; per manovra stabilizzata invece intendiamo una manovra nella quale pur essendo presenti delle accelerazioni, i parametri del moto restano costanti. In una virata stabilizzata ad esempio la non stazionarietà deriva dal fatto che nel riferimento inerziale il vettore velocità non è costante e ciò determina la presenza di accelerazioni; se però la traiettoria è circolare, nel riferimento corpo le accelerazioni esistono ma sono costanti ed inoltre la velocità è costante in modulo.

Osserviamo che la figura 8b non è una vista in pianta del velivolo e lo possiamo intuire dal fatto che è presente la componente $L\text{sen}\,\varphi$ che equilibra la forza centrifuga F_C; l'angolo φ (che non è un angolo di rollio) prende il nome di *angolo di sbandamento* ed è definito come l'angolo tra il piano verticale e il piano di simmetria dell'aereo.



MiG-25PD in virata corretta - Figura 8

Il volo in virata rappresenta l'unica situazione in cui useremo un sistema di riferimento diverso da quello di assi vento; tale sistema di riferimento prende di solito il nome di *terna intrinseca della traiettoria* poiché strettamente legato alla traiettoria. Tale terna è costituita da un asse tangente alla traiettoria (di versore $\hat{t}$), da un asse ortogonale alla traiettoria (di versore $\hat{n}$ e positivo verso il centro di curvatura) ed un terzo asse (detto della binormale e di versore $\hat{b}$) che forma con gli altri due una terna destra. Prima di scrivere le equazioni del moto dell'aereo citiamo alcuni effetti, di cui non terremo però conto: ricordiamo che tutto lo studio delle prestazioni viene compiuto modellando il velivolo come punto materiale; facciamo però delle precisazioni: esistono degli effetti, sia inerziali che aerodinamici, legati proprio al fatto che il velivolo non è un punto materiale. In particolare osserviamo come nel ca-

so della virata, la semiala sinistra avrà il baricentro più lontano dal centro di rotazione rispetto alla semiala destra.

Ciò significa che la forza centrifuga $(F_C)_{SX}$ agente sulla semiala sinistra è in generale maggiore della forza centrifuga $(F_C)_{DX}$ che agisce sulla semiala destra; questo effetto (di cui parleremo più avanti) è tanto più rilevante quanto maggiore è l'apertura alare rispetto al raggio di virata, definito come la distanza tra il baricentro del velivolo ed il centro di rotazione. Il risultato è un momento di rollio di tipo inerziale che indichiamo con L_i (e che nel nostro esempio è negativo), il quale tende a livellare le ali. Gli effetti di tipo aerodinamico sono invece legati al fatto che, sempre nel nostro esempio, la semiala sinistra, più lontana dal centro di rotazione della semiala destra, è investita dalla corrente fluida con una velocità maggiore[7] e quindi sviluppa forze aerodinamiche maggiori; il risultato è un momento di rollio aerodinamico positivo che si oppone dunque a quello inerziale, ma è anche presente un momento di imbardata di origine aerodinamica, il quale tende ad opporsi alla virata. Tali effetti vengono equilibrati attraverso un'opportuna azione sui comandi.

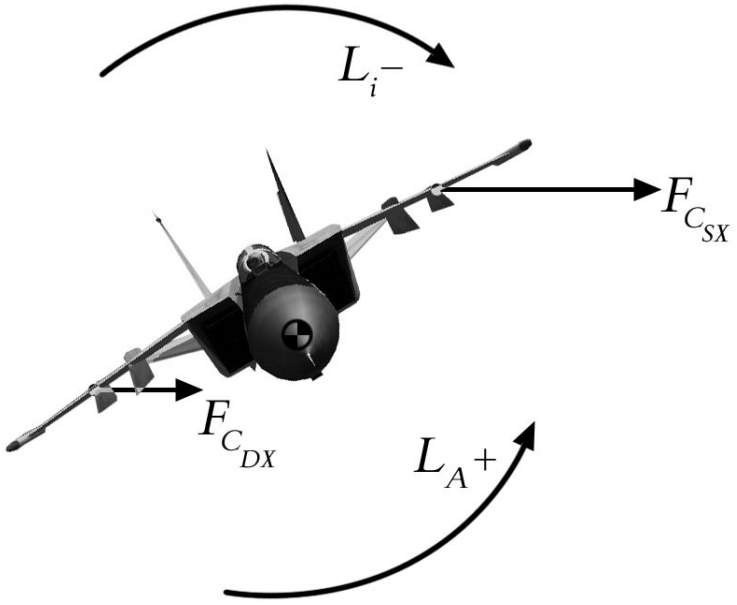


Figura 9

Possiamo a questo punto scrivere le equazioni di equilibrio per il volo in virata, sui tre assi della terna intrinseca

$$\text{lungo } \hat{b} \qquad L\cos\varphi = W$$

[7] La velocità di ciascun punto della semiala è proporzionale alla distanza dal centro di rotazione (il moto è circolare uniforme), quindi mediamente la semiala più lontana sarà investita da una corrente a velocità maggiore.

$$\text{lungo } \hat{n} \qquad L\,\text{sen}\,\varphi = F_C = \frac{W}{g}\frac{V_V^2}{r}$$

$$\text{lungo } \hat{t} \qquad T_d = T_n \quad \Rightarrow \quad T = D$$

Supponiamo che la virata sia eseguita a partire da una condizione di volo su traiettoria rettilinea e mantenendo costante (rispetto a tale condizione) l'angolo di incidenza: è la cosiddetta *virata ad incidenza costante*. Cominciamo con una descrizione qualitativa di ciò che avviene: per effettuare la virata dobbiamo far sbandare il velivolo per produrre una forza laterale che modifichi la traiettoria; nel momento in cui si produce un angolo di sbandamento, solo la componente $L\cos\varphi$ equilibra il peso, perciò occorrerà aumentare la portanza per mantenere[8] costante la quota di volo.

Se la manovra è effettuata senza variare l'angolo d'attacco, l'unico modo per aumentare la portanza è aumentare la velocità; quindi la virata ad angolo di incidenza costante viene effettuata aumentando la velocità di volo rispetto alla condizione di volo rettilineo. Tutto ciò è confermato dall'espressione che possiamo ricavare dalla $L\cos\varphi = W$ ossia

$$\frac{1}{2}\varrho V_V^2 S C_L \cos\varphi = \frac{1}{2}\varrho V_0^2 S C_L \quad \Rightarrow \quad V_V = \frac{V_0}{\sqrt{\cos\varphi}}$$

dove V_0 è il valore della velocità lungo la traiettoria rettilinea. La precedente permette anche di scrivere la variazione della T_n rispetto alle condizioni di volo su traiettoria rettilinea nel caso di virata ad incidenza costante

$$(T_n)_V = \frac{1}{2}\varrho V_V^2 S C_D = \frac{(T_n)_0}{\cos\varphi}$$

dove $(T_n)_0$ è il valore di spinta necessaria nel volo su traiettoria rettilinea. Se abbiamo a che fare con velivoli ad elica possiamo, analogamente a quanto fatto per T_n, esprimere la Π_n in virata come

$$(\Pi_n)_V = \frac{1}{2}\varrho V_V^3 S C_D = \frac{(\Pi_n)_0}{\cos^{3/2}\varphi}$$

Le tre equazioni precedenti forniscono, per il tipo di virata considerata, la variazione rispettivamente di velocità, spinta necessaria e potenza necessaria in funzione dell'angolo di

[8] Notiamo che se aumentiamo la portanza, in base alla $n_z = L/W$ il fattore di carico assume valori maggiori di 1.

sbandamento. L'altra quantità fondamentale da ricavare è il fattore di carico normale: in base alla sua definizione e tenendo conto della $n_z = L/W$ si ottiene

$$n_z = \frac{1}{\cos\varphi}$$

e questo risultato merita qualche osservazione; in figura 10 è riportato l'andamento della precedente, da cui notiamo come n_z si mantenga piuttosto piccolo sino a valori relativamente elevati di φ: difatti fino a $\varphi = 60°$ il fattore di carico non supera i 2 g e ciò è compatibile con il massimo valore di n_z ammesso per i trasporti di dimensioni medio - grandi. Osserviamo invece come n_z varia molto rapidamente per valori elevati di φ: a $\varphi = 75°$ siamo a 4 g e salendo di soli 7° il fattore di carico diventa 8 g.

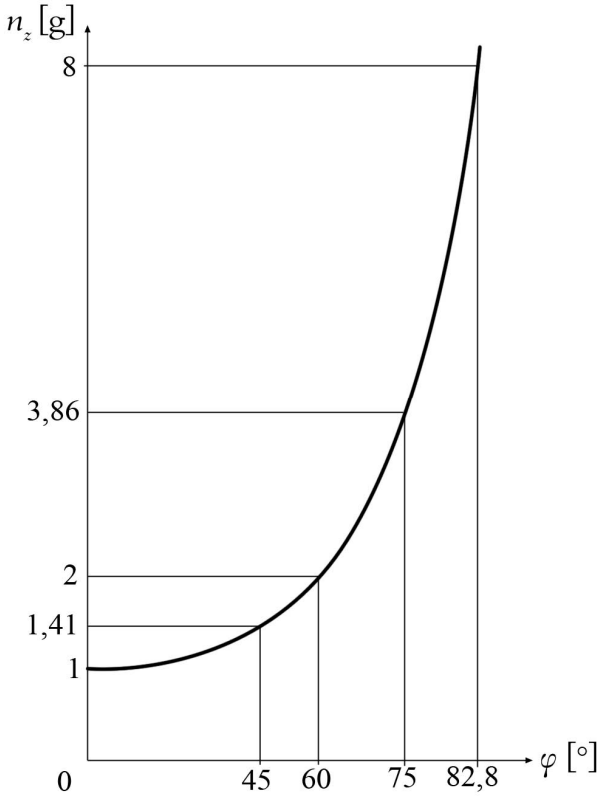


Figura 10

Quindi se per motivi di prestazioni è necessario effettuare virate ad angoli di sbandamento elevati, il velivolo deve essere progettato per sostenere valori elevati del fattore di carico. Osserviamo anche come per una virata a coltello, cioè con angolo di sbandamento pari a 90°, otterremmo un fattore di carico infinito.

Questo accade semplicemente perché il tipo di modello che stiamo considerando non può trattare una situazione di questo tipo. In effetti in una virata a coltello ciò che equilibra

il peso è il piano di coda verticale e la fusoliera, attraverso le quali si riesce a generare una forza laterale di devianza che indichiamo con $\vec{C}$, ponendo il velivolo ad un angolo di derapata diverso da zero.

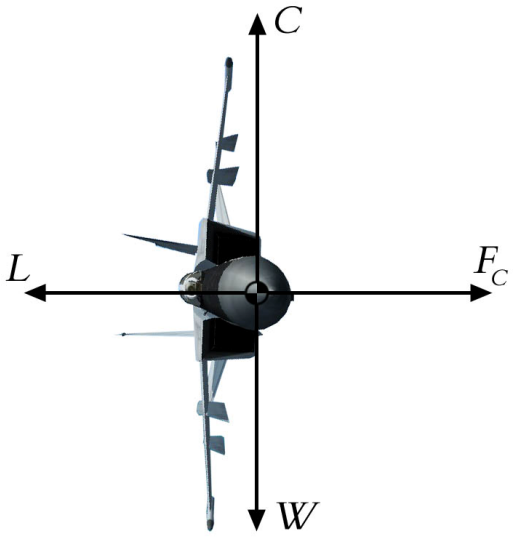
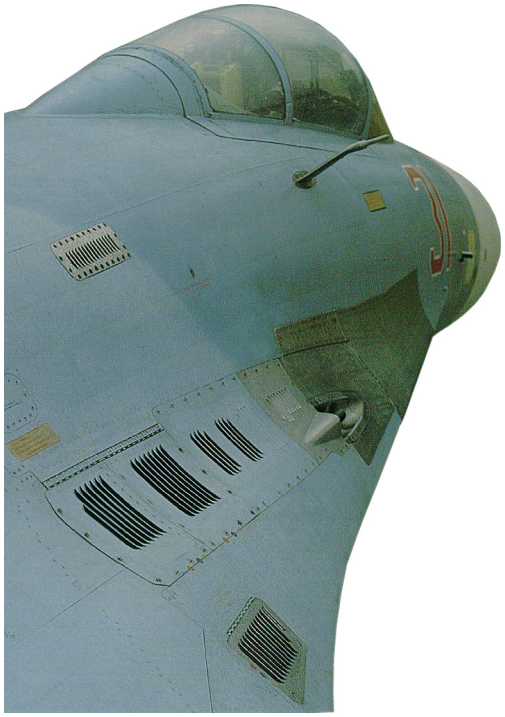


Figura 11

13.4 - RAGGIO DI VIRATA E VELOCITÀ ANGOLARE IN VIRATA



LERX di un Su-27

Caratteristiche di volo importanti nello studio della virata sono il *raggio di virata* e la *velocità angolare in virata*. Il raggio di virata compare nella seconda equazione di equilibrio ($L\operatorname{sen}\varphi = \frac{W}{g}\frac{V_V^2}{r}$) ed è proprio questa che utilizziamo per determinarlo

$$r = \frac{2W/S}{g\varrho C_L}\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

se perciò vogliamo rendere minimo il raggio di virata (una caratteristica di progetto principale per gli aerei da caccia) dobbiamo conseguire carichi alari bassi[9], bassa quota di volo, valori elevati del C_L (il che significa grande $C_{L_{max}}$), valori elevati di φ, il che significa ancora grande fattore di carico e quindi resistenza strutturale, ottima aerodinamica e perciò elevati valori del $C_{L_{max}}$, notevole disponibilità di spinta propulsiva poiché volare ad alti fattori di carico, comporta comunque un aumento di potenza necessaria. Queste sono tutte caratteristiche proprie dei velivoli da combattimento, i quali hanno tipicamente una resistenza strutturale molto elevata[10], dei motori potentissimi ed un'aerodinamica molto curata[11], si può infatti notare la presenza di un raccordo molto raffinato tra ala e fusoliera[12] (LERX *leading edge root extension*, estensione della radice del bordo d'attacco) oppure la presenza di alette canard.

Risulta senz'altro conveniente esprimere il raggio di virata in termini del fattore di carico e per farlo utilizziamo la prima e la seconda equazione di equilibrio, che dividiamo membro a membro

$$\begin{cases} L\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{WV_V^2}{gr} \\ L\cos\varphi = W \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tan\varphi = \frac{V_V^2}{gr} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{V_V^2}{g\tan\varphi} = \frac{V_V^2}{g}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}}}$$

[9] Ricordiamo che parlando del decollo abbiamo osservato che un velivolo da combattimento possiede un carico alare minore di quello di un getto da trasporto, giustificammo ciò dicendo che questo accade per esigenze, tra l'altro, di manovrabilità.

[10] Tali velivoli hanno in genere una forma tozza e molto compatta con un basso allungamento ed ali a delta.

[11] Quindi come parametro di progetto tali velivoli hanno la possibilità di sviluppare angoli d'attacco (e di conseguenza $C_{L_{max}}$) elevati.

[12] Zona nella quale sono presenti piccole superfici che agiscono come generatori di vortici.

la quale tenuto conto che $n_z = 1/\cos\varphi$ si scrive

$$r = \frac{V_V^2}{g}\frac{1}{\sqrt{n_z^2 - 1}}.$$

Questa espressione non fornisce nuove informazioni rispetto alla prima equazione del § (anche perché chiaramente potevamo ottenerla anche a partire da tale relazione), ma ci conferma che se vogliamo virare con ridotti raggi di virata, la velocità dovrà essere ridotta e con il fattore di carico maggiore possibile.

L'altra caratteristica di volo in virata, fondamentale per i velivoli ad alte prestazioni, è la *velocità angolare di virata* che indichiamo con $\dot{\chi}$ e che per definizione è data da

$$\dot{\chi} = \frac{V_V}{r} = \frac{g\sqrt{n_z^2 - 1}}{V_V}.$$

Per un velivolo da combattimento è importante avere $\dot{\chi}$ il più alto possibile e per ottenerlo è necessario volare ad alti valori del fattore di carico ed a bassa velocità; è inoltre possibile dimostrare che il massimo di $\dot{\chi}$ si realizza proprio in corrispondenza della velocità di manovra V_A.

Occorre ora determinare a quali condizioni (e soprattutto a quale velocità) si verifichino i valori ottimi dei due parametri appena introdotti. Per determinare la velocità per una virata di raggio minimo, note le caratteristiche propulsive ed aerodinamiche del velivolo, imponiamo la condizione di minimo

$$\frac{dr}{dV_V} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2V_V\sqrt{n_z^2 - 1} - \frac{V_V^2 n_z}{\sqrt{n_z^2 - 1}}\frac{dn_z}{dV_V} = 0$$

da cui

$$n_z^2 - 1 - n_z\frac{V_V}{2}\frac{dn_z}{dV_V} = 0.$$

In tale relazione l'incognita è proprio la velocità di raggio minimo, che indichiamo con V_{TT} (dove TT sta per *tightest turn*, virata più stretta), ma non possiamo determinarla solo con la formula precedente perché non sappiamo che espressione abbia la derivata dn_z/dV_V; ricordiamoci però che per scrivere la precedente abbiamo utilizzato solo le prime due equa-

zioni di equilibrio e perciò possiamo sfruttare ancora la terza: in effetti dobbiamo determinare le condizioni per una manovra ottima e stabilizzata e quindi la soluzione dovrà tener conto del fatto che la spinta e la resistenza si facciano equilibrio. Per comodità scriviamo la terza equazione di equilibrio ($T_d = T_n$) come

$$\frac{T}{W} = \frac{D}{W} = a V_V^2 + \frac{b}{V_V^2} n_z^2$$

poiché il rapporto spinta/peso è un parametro di progetto caratteristico del velivolo. Da tale relazione otteniamo un $n_z(V_V)$ e di conseguenza anche la derivata cercata; sostituendo tali due espressioni nella $n_z^2 - 1 - n_z \frac{V_V}{2} \frac{dn_z}{dV_V} = 0$ otteniamo subito la V_{TT}, nota la quale possiamo poi ricavare tutte le altre grandezze che ci possono interessare, come ad esempio n_z e C_L.

La virata ad angolo d'attacco costante non è l'unico tipo di virata che possiamo effettuare; in figura 12 possiamo osservare un grafico che rappresenta la T_n in virata in funzione della velocità di volo: osserviamo come siano riportate tre curve corrispondenti a tre diversi valori dell'angolo di sbandamento e perciò corrispondenti a tre diversi valori del fattore di carico. Notiamo come la spinta necessaria nella virata vari esattamente come varierebbe in funzione del peso[13], quindi nel tracciare tali curve vale ciò che abbiamo detto a proposito dell'effetto di una variazione del peso sulla T_n (in particolare vediamo una grossa variazione alle basse velocità ed una variazione che diventa sempre meno importante alle alte velocità). Il caso finora trattato di virata ad incidenza costante corrisponde a muoversi lungo una linea a C_L = cost. (linea DEC): se vogliamo aumentare l'angolo di sbandamento mantenendo costante l'angolo d'attacco dobbiamo aumentare la velocità con la legge $V_V = \frac{V_0}{\sqrt{\cos\varphi}}$ che in termini di n_z può essere scritta come

$$V_V = V_0 \sqrt{n_z}$$

ed analogamente per tutte le altre velocità caratteristiche nel volo in virata; per la velocità di stallo e per la velocità di separazione tra i due regimi (che nel caso di un getto è la V_E) avremo

$$V_S = (V_S)_0 \sqrt{n_z}$$

[13] Ricordiamo che volare a fattore di carico maggiore di 1 corrisponde a volare con un peso maggiore di quello effettivo del velivolo.

$$V_E = (V_E)_0 \sqrt{n_z}$$

e per completare possiamo aggiungere che anche T_n e Π_n variano in modo proporzionale rispettivamente ad n_z e $n_z^{3/2}$), confermando così una proporzionalità analoga a quella rispetto al peso. Se perciò la virata viene effettuata ad incidenza costante (non è la situazione più frequente), si mantengono dei margini su tutte le velocità caratteristiche, quindi, ad esempio, se ci troviamo nel I regime (come in questo caso), continueremo a restarci indipendentemente dal valore di φ.

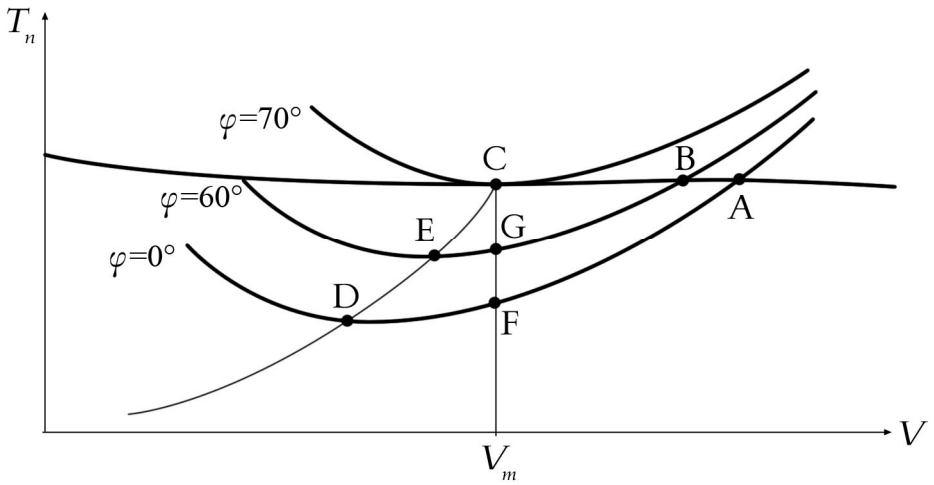


Figura 12

Un altro tipo di virata che possiamo considerare e probabilmente quella più frequente nella pratica, è la virata effettuata a velocità costante rispetto alla condizione di volo orizzontale; in questo caso man mano che φ aumenta il pilota deve aumentare l'angolo d'attacco agendo sulla barra. L'aumento di spinta, se l'apparecchio si trova ad operare nel primo regime, è minore di quello richiesto per una virata ad $\alpha = \text{cost.}$, però possiamo vedere come nell'esempio riportato in figura 12 la virata a $V = \text{cost.}$ inizia in F, nel I regime, e termina in C, che cade invece esattamente nel punto di separazione tra I e II regime; dobbiamo perciò tener conto dell'aumento delle velocità caratteristiche in funzione del fattore di carico.

L'ultima modalità di effettuazione della virata è quella a $T = \text{cost.}$, indicata dalla linea ABC; partendo da A e senza toccare la manetta, il pilota comanda una rollata ed una richiamata, riducendo la velocità ed aumentando l'angolo di sbandamento.

Osserviamo che se riduciamo ancora la velocità rispetto al punto C non siamo più in grado di stringere ulteriormente la virata: arrivati cioè alla velocità di minima spinta necessaria per quel fattore di carico, se continuiamo a ridurre la velocità, o dobbiamo ridurre φ oppure semplicemente non riusciamo a realizzare condizioni di volo stazionarie e quindi il velivolo perde quota (non stiamo più realizzando una manovra stabilizzata).

Il fatto che in manovra le velocità caratteristiche aumentino proporzionalmente a $\sqrt{n_z}$ è molto importante; le norme definiscono delle velocità minime, dette velocità di evoluzione, le quali garantiscono che in certe fasi di volo (tipicamente l'avvicinamento all'aeroporto) il velivolo, costretto per qualche motivo ad effettuare delle manovre, non abbia problemi. Supponiamo ad esempio di volare ad una velocità di avvicinamento $V_V = 100$ kt, durante la fase finale di avvicinamento all'aeroporto, supponiamo che la velocità di separazione tra i due regimi sia $V_E = 90$ kt ed ipotizziamo che per qualche motivo si debba effettuare una virata con un angolo di sbandamento pari a 60°, cui corrisponde un fattore di carico $n_z = 2$. Il nuovo valore della velocità di massima efficienza (che è anche quella di separazione) è quindi dato da

$$V_E(\varphi = 60°) = V_E(\varphi = 0)\sqrt{n_z} \cong 127 \text{ kt}$$

se dunque la virata è effettuata mantenendo costante la velocità, passiamo dal I regime al II regime, perché la velocità di separazione non è più di 90 nodi ma di 127 e noi stiamo volando ancora alla velocità di 100 kt. Le prescrizioni regolamentari fissano quindi delle *velocità minime di evoluzione* che tengono conto proprio di questi aspetti del problema, facendo sì che non possa accadere che in fasi di volo manovrato il velivolo venga a trovarsi in un regime di velocità instabili. Teniamo presente altresì che certi margini vanno mantenuti anche rispetto alla V_S poiché anche questa aumenta in modo proporzionale a $\sqrt{n_z}$. Un'altra situazione in cui interviene un problema simile è la definizione della velocità V_2 in decollo: ricordiamo che le norme prescrivono che tale velocità sia almeno del 20% superiore alla V_S, cioè si deve avere almeno

$$V_2 = 1{,}2 V_S .$$

Per capirne il motivo immaginiamo che il velivolo debba effettuare una virata a $\varphi = 45°$ subito dopo che si è staccato da terra ed ha passato l'ostacolo critico di decollo; in questa situazione abbiamo

$$\varphi = 45° \qquad \Rightarrow \qquad n_z = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos\varphi} = 1{,}41$$

ma ricordando che siamo in decollo (quindi il C_L è massimo) alla velocità V_2, si ha

$$L = \frac{1}{2}\varrho V_2^2 S C_{L_{max}}$$

inoltre dalla definizione di velocità di stallo abbiamo

$$W = \frac{1}{2}\varrho V_S^2 S C_{L_{max}}$$

perciò in definitiva

$$\frac{V_2^2}{V_S^2} = 1{,}41 \qquad \Rightarrow \qquad V_2 \approx 1{,}2 V_S$$

si capisce quindi che il fatto di volare ad un 20% al di sopra della V_S garantisce la possibilità di effettuare virate con angoli di sbandamento fino a 45° (valore indicativo) immediatamente dopo il decollo.

13.5 - VIRATA PIATTA.

La virata piatta è per definizione una virata effettuata mantenendo le ali livellate; in tale manovra, supponendo che la traiettoria sia circolare, il velivolo è posto ad un angolo di derapata diverso da zero poiché occorre generare una forza laterale di devianza $\vec{C}$ che faccia equilibrio alla forza centrifuga; notiamo inoltre (si veda figura 13, la quale diversamente dalla figura 8b, è una vista in pianta perché in questo caso il velivolo non sbanda) la presenza di una componente della spinta che contribuisce ad equilibrare $\vec{F}_C$.

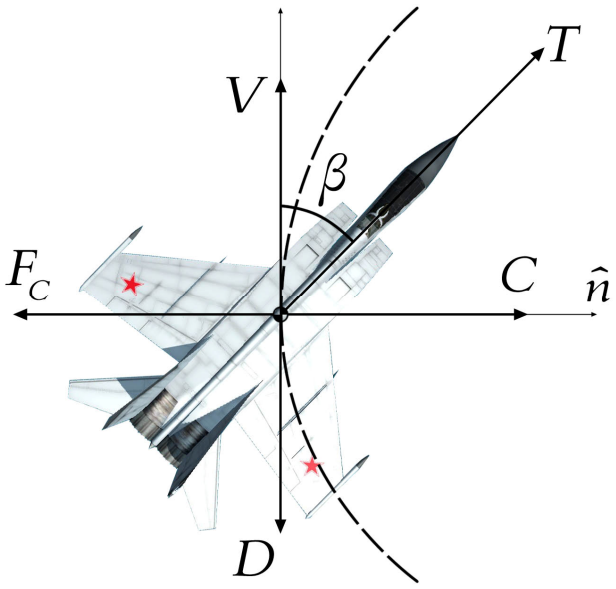


Figura 13

Dunque l'equilibrio lungo $\hat{n}$ è

$$F_C = \frac{W}{g}\frac{V_V^2}{r} = T\,\mathrm{sen}\,\beta + C$$

supponiamo però che il contributo $T\,\mathrm{sen}\,\beta$ della spinta sia trascurabile poiché comunque l'angolo β è piccolo (non superiore ai 10°) e scriviamo la devianza come

$$C = \frac{1}{2}\varrho V_V^2 S C_C$$

dove C_C è il coefficiente di devianza. Sostituendo abbiamo

$$\frac{W}{g}\frac{V_V^2}{r} = \frac{1}{2}\varrho V_V^2 S C_C .$$

Possiamo così esprimere il raggio di virata in una virata piatta

$$r = \frac{2W/S}{g\varrho C_C} .$$

Sviluppiamo ora il C_C in serie ed arrestiamo lo sviluppo al primo ordine

$$C_C = C_{C_0} + \frac{dC_C}{d\beta}\beta$$

notiamo però che in condizioni simmetriche $(\beta = 0)$ in genere la devianza è nulla e quindi la costante C_{C_0} vale zero; dunque abbiamo

$$C_C = \frac{dC_C}{d\beta}\beta$$

che sostituita nella espressione di *r* diviene

$$r = \frac{2W/S}{g\varrho\dfrac{dC_C}{d\beta}\beta}$$

per avere un'idea dei raggi di virata che si possono ottenere con una virata piatta facciamo riferimento ad un trasporto di grandi dimensioni per il quale abbiamo

$$\frac{W}{S} = 5000 \text{ N/m}^2 \qquad \frac{dC_C}{d\beta}\beta \cong 0{,}1$$

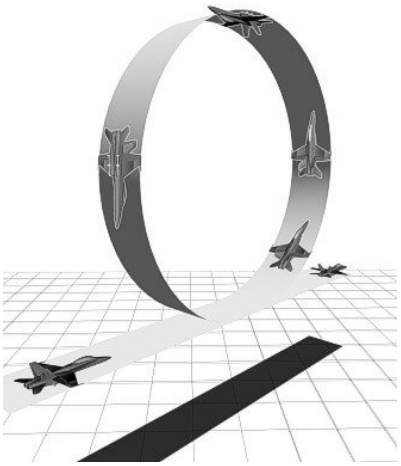
essendo inoltre $g = 9{,}81$ m/s^2 e $\varrho = 1{,}225$ kg/m^3 si ricava

$$r = 10000 \text{ m}$$

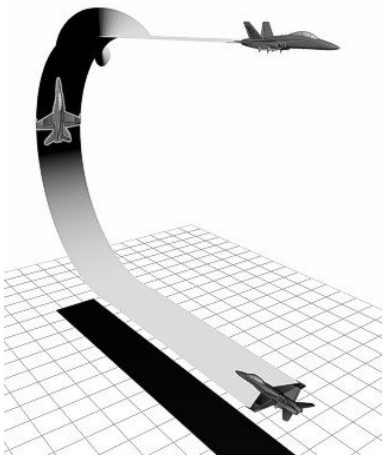
un valore eccessivo, per questo motivo la virata piatta non viene effettuata se non quando sia necessario effettuare dei piccoli aggiustamenti della traiettoria di volo (tipicamente per allineare il velivolo alla pista): è opportuno infatti che tali aggiustamenti non richiedano angoli di sbandamento i quali diminuirebbero la componente della portanza utile al sostentamento. Quindi in fase di atterraggio piccole correzioni di rotta possono essere effettuate con la tecnica della virata piatta agendo sul timone, mettendo il velivolo in derapata e mantenendo le ali livellate.

13.6 - LA RICHIAMATA: MANOVRE CARATTERISTICHE, RAGGIO MINIMO

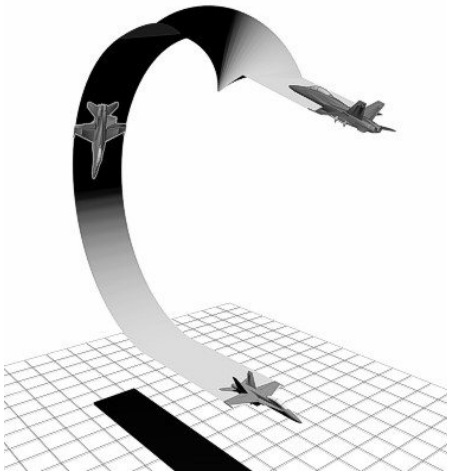
La manovra di richiamata rientra fra le manovre di virata nel piano verticale (cioè una manovra in cui il vettore velocità viene modificato unicamente nel piano verticale); ci troviamo in una condizione in cui, partendo da volo rettilineo oppure da volo in discesa, il pilota tira a sé la barra, aumentando così la portanza del velivolo e quindi producendo una rotazione verso l'alto del muso del velivolo stesso. Sempre nell'ambito di manovre di virata nel piano verticale troviamo anche la manovra di affondata, che costituisce la manovra opposta della richiamata (il pilota invece di tirare a sé la barra, la muove in avanti aumentando la pendenza della traiettoria).



Giro della morte



Virata imperiale



S interrotta

Esistono poi delle manovre di tipo acrobatico, come ad esempio il giro della morte (in inglese *looping*), la virata imperiale (anche detta *virata Immelmann*[14]) e la S interrotta (in inglese *split S*). Nella manovra detta giro della morte, partendo da una traiettoria orizzontale, il pilota comanda una richiamata, il velivolo sale, si trova in volo rovescio nella parte più alta della traiettoria, poi scende ed infine esce dalla manovra e torna in una condizione di volo orizzontale, dunque un'evoluzione che avviene tutta nel piano verticale.

La virata imperiale ci consente di variare la direzione di volo di 180°: la prima parte della manovra è identica al *looping*, poiché da una traiettoria orizzontale si arriva in volo rovescio; a questo punto si compie una rollata[15] di 180° e poi si riporta il velivolo in assetto dritto.

Altra manovra tipica, soprattutto per i velivoli ad alte prestazioni o nel caso di manovre acrobatiche, è di nuovo una virata che avviene nel piano verticale alla quale si associa una diminuzione di quota: da una condizione di volo dritto ci si porta in volo rovescio con una rollata di 180°, dopo di che si effettua una manovra uguale a quella di uscita dal looping, alla fine ci si ritrova in direzione opposta a quella iniziale con il velivolo in volo dritto; tale manovra prende il nome di *split S*.

Passiamo ad occuparci più approfonditamente della manovra di richiamata e cerchiamo di scrivere le equazioni del moto; supponiamo che il velivolo si trovi in traiettoria di discesa ed immaginiamo che le forze siano tutte applicate nel baricentro

[14] Max Immelmann, nato a Dresda il 21 settembre 1890, abbattuto a Sallaumines il 18 giugno 1916, asso della prima guerra mondiale, ingegnere meccanico.

[15] Rollare vuol dire compiere un movimento di rollio, detto di nave o di aeromobile.

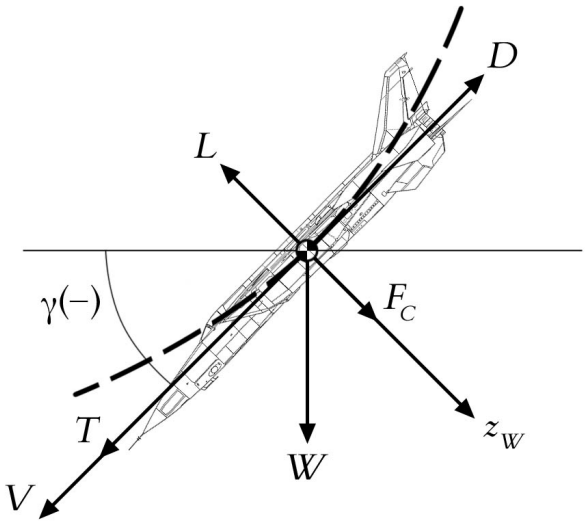


Figura 17

ragionando nel riferimento di assi vento, le forze con cui abbiamo a che fare sono la portanza (diretta come z_W, ma in verso opposto), il peso (che chiaramente è verticale), la spinta (allineata per semplicità con la velocità di volo) la resistenza (in verso opposto alla spinta) e la forza centrifuga (diretta nello stesso verso di z_W). L'inclinazione del vettore velocità con l'orizzonte è indicata dall'angolo di rampa γ, il quale è negativo. Le equazioni del moto nelle due direzioni x_W e z_W (cioè nel piano verticale) sono rispettivamente

$$\begin{cases} \dfrac{W}{g}\dot{V}_R = T - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma \equiv T - D + W\,\mathrm{sen}\,|\gamma| \\ -\dfrac{W}{g}V_R\dot{\gamma} = -\dfrac{W}{g}\dfrac{V_R^2}{r} = -L + W\cos\gamma \end{cases}$$

dove $-L + W\cos\gamma$ è il termine inerziale che corrisponde alla forza centrifuga. Evidenziamo il fatto che la definizione di richiamata stabilizzata non può avvenire sulla base del concetto di manovra stabilizzata così come lo abbiamo introdotto nel caso della virata; nelle equazioni di equilibrio della manovra di richiamata, infatti, compaiono le derivate rispetto al tempo sia di V che di γ e ciò evidenzia l'impossibilità di ottenere una soluzione in cui la velocità, la velocità angolare, il fattore di carico e tutti gli altri parametri caratteristici del moto si mantengano costanti per valori costanti degli angoli di controllo: non essendo costante γ, durante la manovra i termini $W\,\mathrm{sen}\,\gamma$ e $W\cos\gamma$ varieranno, per cui dalla prima delle precedenti si ricava immediatamente che ad esempio, volendo effettuare una manovra di richiamata a velocità costante, dovremmo agire sulla manetta per variare T. Inoltre è piuttosto difficile che la costanza di velocità e velocità angolare permetta di mantenere costante il fattore di carico. In conclusione possiamo parlare di richiamata come manovra stabilizzata

con riferimento solo a sezioni limitate della traiettoria: se consideriamo un tratto della manovra potremmo dire che in quel tratto, con una certa approssimazione, sono mantenute costanti le grandezze del moto e la traiettoria è circolare, con un certo raggio[16].

Ciò premesso, possiamo dire che la caratteristica di volo più interessante da valutare nello studio della richiamata è il raggio minimo. Supponiamo che per un certo tratto di traiettoria siano realizzate condizioni di volo stabilizzate; dividendo ambo i membri della seconda delle precedenti per il peso otteniamo

$$-\frac{V_R^2}{gr} = -n_z + \cos\gamma$$

da cui

$$r = \frac{V_R^2}{g\left(n_z - \cos\gamma\right)}$$

il raggio di richiamata risulta quindi minimo quando $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ed n_z è pari al suo valore massimo. Quindi la prima condizione limite sul raggio è

$$r'_{min} = \frac{V_R^2}{g n_{z_{max}}}$$

questa limitazione viene definita limitazione strutturale poiché dipende dal valore massimo di n_z tollerabile dal velivolo[17]. C'è però un'altra limitazione per il raggio minimo: riscriviamo la seconda equazione del moto esplicitando L

$$-\frac{W}{g}\frac{V_R^2}{r} = -\frac{1}{2}\varrho V_R^2 S C_L + W\cos\gamma$$

da cui

$$V_R = \sqrt{\frac{W\cos\gamma}{\frac{1}{2}\varrho S C_L - \frac{W}{gr}}}$$

[16] Per esempio è impossibile mantenere queste condizioni nell'esecuzione di un *looping*.

[17] Ricordiamo che tale valore va da 2,5 per un velivolo da trasporto, fino a 9 per velivoli da combattimento, limite dovuto alla sopportazione fisica umana.

affinché la precedente abbia soluzione nel campo reale, il denominatore deve essere positivo (il numeratore è positivo poiché γ è tale che il suo coseno sia sempre positivo); quindi

$$\frac{1}{2}\varrho S C_L > \frac{W}{gr}$$

da cui

$$r'' > \frac{2W/S}{g\varrho C_L}$$

questo valore di r si ottiene perciò in base ad una limitazione di tipo aerodinamico. Per un certo valore del carico alare e della quota il raggio minimo è pertanto dato da

$$r''_{min} > \frac{2W/S}{g\varrho C_{L_{max}}}$$

che, introducendo la velocità di stallo, diviene

$$r''_{min} = \frac{V_S^2}{g}$$

il problema è ora quello di stabilire in quali casi è più stringente la limitazione di tipo aerodinamico e in quali quella di tipo strutturale; tenendo conto delle equazioni di r'_{min} e r''_{min} abbiamo

$$r'_{min} > r''_{min} \qquad \Rightarrow \qquad V_R > V_S\sqrt{n_{z_{max}}}$$
$$r'_{min} < r''_{min} \qquad \Rightarrow \qquad V_R < V_S\sqrt{n_{z_{max}}}$$

questo significa che se durante la richiamata voliamo ad una velocità $V_R > V_S\sqrt{n_{z_{max}}}$ prevale la limitazione strutturale perciò non possiamo scendere al di sotto di r'_{min} perché altrimenti si supera il massimo fattore di carico previsto per quel velivolo, mentre se durante la richiamata voliamo ad una velocità $V_R < V_S\sqrt{n_{z_{max}}}$ il limite sarà di tipo aerodinamico, perciò non possiamo scendere al di sotto di r''_{min} perché altrimenti superiamo la velocità di stallo. Ciò si presta ad una lettura piuttosto intuitiva se lavoriamo sul diagramma di manovra

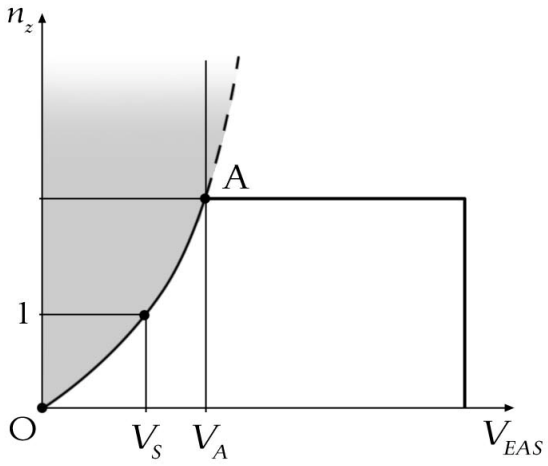


Figura 18

la velocità del punto A è proprio la $V_S\sqrt{n_{z_{max}}}$; lungo la curva $\widehat{OA}$, infatti, il C_L è sempre uguale al suo valore massimo, perciò possiamo scrivere

$$n_z = \frac{1}{2}\frac{\varrho_{LM} V_{EAS}^2 S C_{L_{max}}}{W} = \frac{V_{EAS}^2}{V_{S_{EAS}}^2}$$

e questa relazione porta a dire che in A abbiamo proprio $\left(V_A = V_S\sqrt{n_{z_{max}}}\right)_{EAS}$. Se siamo quindi ad una velocità $V > V_S\sqrt{n_z}$ ed il pilota tira a sé al massimo la barra, si arriverebbe nella zona tratteggiata di figura 18, la quale si trova al di sopra della curva a $C_{L_{max}}$; se la velocità di volo è maggiore di V_A, prima di raggiungere tale curva, il velivolo oltrepassa la linea di limitazione strutturale (ossia raggiunge e supera il fattore di carico massimo) e ciò potrebbe portare a danni strutturali: la limitazione è dunque di tipo strutturale; se invece la velocità di volo è minore di V_A il velivolo non può oltrepassare la curva $\widehat{OA}$ perché stallerebbe (o meglio *g-stallerebbe*) e quindi non può raggiungere il valore massimo del fattore di carico: la limitazione è in questo caso di tipo aerodinamico.

Capitolo 14

LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STAZIONARIO NEL PIANO DI SIMMETRIA

14.1 - LA SOLUZIONE STAZIONARIA DELLE EQUAZIONI DEL MOTO: VOLO SIMMETRICO, RETTILINEO ED UNIFORME

Sia nel caso della stabilità statica che nel caso della stabilità dinamica, l'analisi viene condotta per una certa condizione di volo di riferimento, o condizione di volo stazionario, che, nel caso in cui la velocità angolare sia nulla, rappresenta un volo su traiettoria rettilinea oppure una condizione di riferimento in manovra stabilizzata, come ad esempio una virata. Non trattando quest'ultimo caso, determineremo una condizione di equilibrio (e questo va fatto prima di parlare della stabilità) in un caso molto semplice come quello di volo su traiettoria rettilinea, utilizzando tale caso per mettere in evidenza certi sviluppi delle azioni aerodinamiche che ritorneranno frequentemente sia nello studio della stabilità statica che in quello della stabilità dinamica. Anche nello studio delle caratteristiche di volo abbiamo fatto riferimento a condizioni di volo stazionario, ma in quel caso abbiamo utilizzato un modello dinamico semplificato che prescinde dalla dinamica di assetto (moto del velivolo attorno al suo baricentro). Da questo punto in poi considereremo solo il modello completo del velivolo e quindi avremo a che fare non solo con equilibri di forze, ma anche con equilibri di momenti; parlando di dinamica, parleremo perciò sia di dinamica del centro di massa che di dinamica di assetto. Per affrontare il problema del calcolo di una soluzione stazionaria riscriviamo le equazioni del moto del velivolo in assi di stabilità

$$\begin{cases} m\left(\dot{\vec{v}}_c + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}\,\vec{v}_c\right)_S = \left(\vec{F}_P + \vec{F}_A + \vec{F}_T\right)_S \\ \left(\underline{\underline{I}}\dot{\vec{\omega}} + \tilde{\underline{\underline{\omega}}}\,\underline{\underline{I}}\vec{\omega}\right)_S = \left(\vec{G}_A + \vec{G}_T\right)_S \end{cases}$$

ricordiamo che gli assi di stabilità sono solidali al velivolo e nell'istante di riferimento coincidono con gli assi vento. La condizione di volo stazionario è per definizione una condizione di volo in cui le variabili del moto sono costanti

$$\left(\dot{\vec{v}}_c\right)_e = 0$$
$$\left(\dot{\vec{\omega}}\right)_e = 0$$

ed inoltre se la condizione di riferimento è quella di volo su traiettoria rettilinea, si ha anche

$$(\vec{\omega})_e = 0$$

in cui il pedice *e* indica che la condizione di riferimento è una condizione di equilibrio.

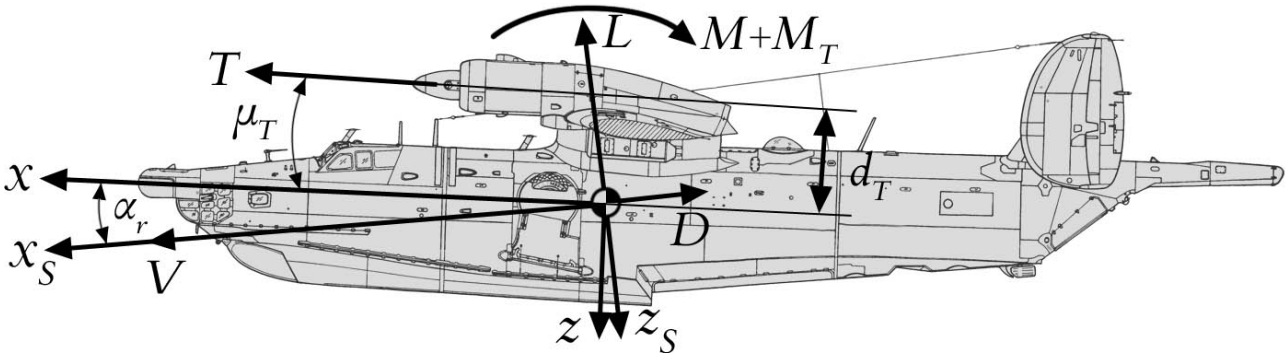


Figura 1

In questa situazione le equazioni vettoriali dell'equilibrio si scrivono

$$\begin{cases} \vec{F}_{P_e} + \vec{F}_{A_e} + \vec{F}_{T_e} = 0 \\ \vec{G}_{A_e} + \vec{G}_{T_e} = 0 \end{cases}$$

e questo è il sistema che dobbiamo risolvere. Facciamo riferimento allo schema riportato in figura 1 per passare delle equazioni vettoriali sopra scritte alle equazioni scalari: l'idrovolante si trova in una condizione di volo di riferimento simmetrica, perciò l'asse x_S è allineato con la direzione del vettore velocità del velivolo; è inoltre riportata una direzione caratteristica che non riguarda la formulazione delle equazioni del moto, ma che in genere viene definita sul velivolo: tale direzione è rappresentata dall'asse *x*, detto *asse della fusoliera*, e rappresenta un asse giacente sul pavimento della cabina[1]; l'introduzione di tale asse porta alla definizione dell'angolo α_r, detto *angolo d'attacco del velivolo* poiché rappresenta un angolo di incidenza riferito alla fusoliera, il quale non va però confuso con l'angolo α_x il quale rappresenta l'incidenza effettiva del velivolo, riferita all'asse di portanza nulla. Notiamo inoltre la presenza dell'angolo $_T$ che definisce l'orientamento dell'asse di spinta rispetto all'asse della fusoliera; per di più l'asse di spinta può non passare per il baricentro (indichiamo con d_T la distanza tra l'asse di spinta ed il baricentro) e dunque avremo un contributo al momento dato dalla forza propulsiva. Quindi le equazioni del moto, in assi di stabilità, in tale

[1] Quindi quando l'asse *x* è orizzontale, il piano della cabina è orizzontale.

condizione di volo simmetrica, in cui cioè non sono considerati forze e momenti associati a gradi di libertà fuori del piano di simmetria, sono

$$\begin{aligned}
&\text{lungo } x_S && 0 = -mg\,\mathrm{sen}\,\gamma_e - D_e + T_e\cos\left(\alpha_{r_e} + \mu_T\right)\\
&\text{lungo } z_S && 0 = mg\cos\gamma_e - L_e - T_e\,\mathrm{sen}\left(\alpha_{r_e} + \mu_T\right)\\
&\text{attorno a } y_S && 0 = M_e - T_e d_T
\end{aligned}$$

14.2 - ESPRESSIONE LINEARIZZATA DEI COEFFICIENTI C_D, C_L, E C_M

Per risolvere il sistema precedente dobbiamo sapere come varino L, D ed M in funzione delle grandezze che intervengono nel problema. Dato che cercheremo di ottenere delle espressioni lineari che leghino le grandezze aerodinamiche alle variabili da cui dipendono, non possiamo più fare affidamento sulla polare perché questa è un'espressione quadratica. Cominciamo dalla resistenza: sviluppiamo in serie di Taylor il C_D, a partire da una condizione iniziale in cui $\alpha_r = i_t = \delta_E = 0$ (dove $\alpha_r \neq$ cost. ed i_t è l'angolo di calettamento del piano di coda, si veda figura 2), arrestando lo sviluppo al primo ordine

$$C_D = C_{D_0} + \left.\frac{\partial C_D}{\partial \alpha_r}\right|_0 \alpha_r + \left.\frac{\partial C_D}{\partial i_t}\right|_0 i_t + \left.\frac{\partial C_D}{\partial \delta_E}\right|_0 \delta_E$$

che possiamo riscrivere come[2]

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\alpha_r}}\alpha_r + C_{D_{i_t}} i_t + C_{D_{\delta_E}}\delta_E$$

dove

$$C_{D_\alpha} = C_{D_{\alpha_r}} = \left.\frac{\partial C_D}{\partial \alpha_r}\right|_0 \qquad C_{D_{i_t}} = \left.\frac{\partial C_D}{\partial i_t}\right|_0 \qquad C_{D_{\delta E}} = \left.\frac{\partial C_D}{\partial \delta_E}\right|_0$$

[2] Si faccia attenzione che l'angolo α_r differisce dall'angolo di incidenza α per una costante, rappresentata dall'angolo di calettamento dell'ala sulla fusoliera, perciò, in termini di retta di portanza, $C_{L_{\alpha_r}} = C_{L_\alpha}$.

sono dunque costanti e sono dette *derivate aerodinamiche*; si noti che C_{D_0} non è lo stesso usato nello studio delle prestazioni, ma rappresenta il C_D quando $\alpha_r = i_t = \delta_E = 0$. La resistenza dunque è data da

$$D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\left(C_{D_0} + C_{D_{\alpha_r}}\alpha_r + C_{D_{i_t}} i_t + C_{D_{\delta_E}}\delta_E\right)$$

In maniera analoga, per la portanza abbiamo

$$L = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\left(C_{L_0} + C_{L_{\alpha_r}}\alpha_r + C_{L_{i_t}} i_t + C_{L_{\delta_E}}\delta_E\right)$$

facciamo però un passo avanti e rappresentiamo separatamente il contributo dell'ala e del piano di coda

$$L = L_{WB} + L_t = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{L_{WB}} + \frac{1}{2}\varrho_t V_t^2 S_t C_{L_t}.$$

Notiamo come la pressione dinamica sul piano di coda non sia necessariamente la stessa sull'ala; per esempio la pressione dinamica in corrispondenza dell'impennaggio orizzontale, sarà maggiore di quella all'infinito se il piano di coda si trova nella scia dell'elica o del turbogetto; sarà minore di quella all'infinito se l'impennaggio orizzontale si trova ad alti angoli d'attacco nella scia dell'ala: in tal caso infatti il piano di coda potrebbe trovarsi in ombra, perciò se il flusso sull'ala è separato, la pressione dinamica sull'impennaggio orizzontale può risultare minore di quella all'infinito. Per il C_L abbiamo dunque

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S} = C_{L_{WB}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t}$$

dove η_t rappresenta l'*efficienza del piano di coda*, definita come il rapporto tra la pressione dinamica sull'impennaggio orizzontale e pressione dinamica all'infinito[3]. Linearizzando separatamente i due coefficienti di portanza abbiamo

$$C_{L_{WB}} = C_{L_{0_{WB}}} + C_{L_{\alpha_{WB}}}\alpha_r$$
$$C_{L_t} = C_{L_{\alpha_t}}\alpha_t$$

[3] Per quanto detto, η_t sarà maggiore di 1 quando l'impennaggio di coda si trovi, ad esempio, nella scia dei motori; minore di 1 se invece l'impennaggio di coda si trova in ombra rispetto all'ala in una situazione di volo ad alta incidenza.

dove α_t e $C_{L_{\alpha_t}}$ sono rispettivamente l'angolo d'attacco e la pendenza della retta di portanza del piano di coda orizzontale. Vediamo come esprimere α_t: in corrispondenza del piano di coda esiste il problema delle velocità indotte dirette verso il basso prodotte dal sistema vorticoso dell'ala; tali velocità producono una variazione locale dell'incidenza sulla coda, caratterizzata dall'angolo di *downwash*

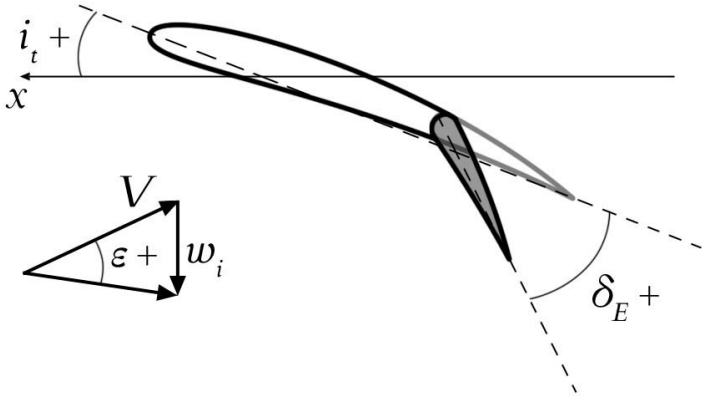


Figura 2

quindi

$$\alpha_t = \alpha_r + i_t - \varepsilon + \tau_E \delta_E$$

dove τ_E è detto *efficacia dell'equilibratore* ed è definito come

$$\tau_E = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta_E}$$

perciò rappresenta la rotazione dell'asse di portanza nulla dell'impennaggio orizzontale per una rotazione unitaria dell'equilibratore; quindi il termine $\tau_E \delta_E$ tiene conto dell'effetto della rotazione dell'equilibratore[4]. Anche l'angolo di *downwash* si può esprimere in forma linearizzata come

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha_r}\right|_0 \alpha_r \,.$$

[4] La rotazione dell'equilibratore determina una variazione della curvatura del profilo e quindi, a parità di incidenza geometrica, un aumento dell'incidenza effettiva sul piano di coda.

Osserviamo come anche per l'angolo di *downwash*, che dipende dall'angolo d'attacco alare poiché appunto dipende dal sistema vorticoso a staffa che si instaura sull'ala, viene generalmente usata una forma linearizzata nella quale compaiono due costanti: ε_0 (valore dell'angolo di *downwash* per $\alpha_r = 0$) e $\left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha_r}\right|_0$; questi coefficienti per calcoli di prima approssimazione sono noti poiché in genere sono espressi mediante tabelle o grafici in funzione della forma in pianta dell'ala e della posizione dell'impennaggio di coda rispetto all'ala. Quindi l'angolo di *downwash* dipenderà oltre che dall'angolo d'attacco anche dalla forma in pianta dell'ala e dalla posizione relativa del piano di coda rispetto all'ala stessa. Sostituendo la precedente nella espressione di α_t si ha:

$$\alpha_t = \alpha_r \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha_r}\right|_0 \right) + i_t - \varepsilon_0 + \tau_E \delta_E .$$

Dunque per il coefficiente di portanza totale si ha

$$C_L = C_{L_{WB}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t} = C_{L_{0_{WB}}} + C_{L_{\alpha WB}} \alpha_r + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \left[\alpha_r \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha_r}\right|_0 \right) + i_t - \varepsilon_0 + \tau_E \delta_E \right]$$

e quindi

$$L = \frac{1}{2} \varrho V^2 S C_L = \frac{1}{2} \varrho V^2 S \left\{ C_{L_{0_{WB}}} + C_{L_{\alpha WB}} \alpha_t + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_t} \left[\alpha_r \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha_r}\right|_0 \right) + i_t - \varepsilon_0 + \tau_E \delta_E \right] \right\}.$$

Dal confronto tra questa espressione e l'espressione della portanza presentata poco prima, otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned}
C_{L_0} &= C_{L_{0_{WB}}} - \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \varepsilon_0 \\
C_{L_\alpha} &= C_{L_{\alpha WB}} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \right) \\
C_{L_{i_t}} &= \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \\
C_{L_{\delta_E}} &= \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \tau_E .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il momento M di beccheggio, ultimo termine aerodinamico che compare nelle equazioni di equilibrio, abbiamo

$$M = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\bar{c} C_M = \frac{1}{2}\varrho V^2 S\bar{c}\left(C_{M_0} + C_{M_\alpha}\alpha_r + C_{M_{i_t}} i_t + C_{M_{\delta_E}}\delta_E\right)$$

ci limitiamo per adesso a tale forma generale, ma in seguito esprimeremo dettagliatamente ciascuno di questi coefficienti, con un procedimento logico analogo a quello seguito per la portanza.

Sostituendo le espressioni appena ricavate nelle equazioni di equilibrio otteniamo

$$\begin{aligned}
mg \operatorname{sen}\gamma_e &= -\frac{1}{2}\varrho_e V_e^2 S\left(C_{D_0} + C_{D_{\alpha_r}}\alpha_{r_e} + C_{D_{i_t}} i_{t_e} + C_{D_{\delta_E}}\delta_{E_e}\right) + T_e \cos\left(\alpha_{r_e} + \mu_T\right) \\
mg \cos\gamma_e &= \frac{1}{2}\varrho_e V_e^2 S\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_{t_e} + C_{L_{i_t}} i_{t_e} + C_{L_{\delta_E}}\delta_{E_e}\right) + T_e \operatorname{sen}\left(\alpha_{r_e} + \mu_T\right) \\
\frac{1}{2}\varrho_e V_e^2 S\bar{c}\left(C_{M_0} + C_{M_\alpha}\alpha_{r_e} + C_{M_{i_t}} i_{t_e} + C_{M_{\delta_E}}\delta_{E_e}\right) &= T_e d_T
\end{aligned}$$

14.3 - CALCOLO DI UNA CONDIZIONE DI VOLO STAZIONARIO, RETTILINEO E SIMMETRICO IN TERMINI DI α_{r_e}, δ_{E_e}, γ_e SOLUZIONE IN FORMA MATRICIALE.

Il sistema di equazioni che dobbiamo risolvere è il precedente; le incognite sono

$$T_e,\ \alpha_{r_e},\ i_t,\ \delta_{E_e},\ \varrho_e,\ V_e,\ \gamma_e\ .$$

Per risolvere questo problema 3×7 dobbiamo considerare note un certo numero di grandezze; in una situazione pratica che ha un certo interesse ed anche al fine di semplificare al massimo la soluzione del problema immaginiamo che siano note

$$T_e,\ i_t,\ \varrho_e,\ V_e$$

quindi le variabili del problema sono

$$\alpha_{r_e},\ \delta_{E_e},\ \gamma_e\ .$$

Questa scelta, interessante sotto l'aspetto applicativo perché questo tipo di problema capita molto frequentemente, permette di arrivare ad una espressione chiusa della soluzione

in una forma molto semplice. Facciamo l'ipotesi di piccoli angoli di rampa[5], quindi $\cos\gamma_e \approx 1$ e $\operatorname{sen}\gamma_e \approx \gamma_e$; inoltre il termine $T_e \operatorname{sen}\left(\alpha_{r_e} + \mu_T\right)$, che rappresenta la componente della forza propulsiva parallela alla portanza, è piccolo rispetto alla portanza[6]. Avendo fatto queste due ipotesi la 2ª e la 3ª equazione si disaccoppiano dalla 1ª (l'angolo di rampa non compare nella 2ª e nella 3ª) quindi queste due equazioni rappresentano un sistema di due equazioni nelle due incognite α_{r_e} e δ_{E_e}. Possiamo esprimere la soluzione di questo sistema 2×2 in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} C_{L_\alpha} & C_{L_{\delta_E}} \\ C_{M_\alpha} & C_{M_{\delta_E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{r_e} \\ \delta_{E_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{mg}{\frac{1}{2}\varrho_e V_e^2 S} - C_{L_0} - C_{L_{i_t}} i_{t_e} \\ \dfrac{T_e}{\frac{1}{2}\varrho_e V_e^2 S}\dfrac{d_T}{\overline{c}} - C_{M_0} - C_{M_{i_t}} i_{t_e} \end{bmatrix}$$

risolto tale sistema, possiamo sostituire i valori ottenuti per l'angolo d'attacco e l'angolo dell'equilibratore nella 1ª equazione del sistema, e ricaviamo così l'angolo di rampa.

Quindi con le ipotesi fatte otteniamo la soluzione del problema, relativamente alle variabili scelte, risolvendo un sistema lineare. Anche se questo è un caso molto semplice ha una notevole importanza applicativa: teniamo presente che la determinazione di una condizione di equilibrio per il velivolo implica, a meno che non si operi opportunamente come abbiamo fatto, la risoluzione di un sistema non lineare. Abbiamo ottenuto questa soluzione in termini dell'angolo α_r il quale non è l'incidenza effettiva di volo cioè non è l'angolo d'attacco vero e proprio, il quale è dato da

$$C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_r = C_{L_\alpha}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \alpha - \alpha_r = \frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}}.$$

[5] Ipotesi del tutto legittima risolvendo questo problema per un velivolo in crociera.

[6] Un velivolo sarà realizzato generalmente per avere in crociera l'asse di spinta allineato con la velocità.

Capitolo 15

STABILITÀ STATICA LONGITUDINALE[1]

15.1 - RIGIDEZZA DI BECCHEGGIO: CONCETTI GENERALI SU C_{M_0} E C_{M_α}

Abbiamo già discusso alcuni fondamenti quando abbiamo parlato della stabilità del profilo (si veda § 2.7); ricordiamo che un profilo è in una condizione di stabilità statica positiva quando è centrato anteriormente al centro aerodinamico. Abbiamo anche indicato quale sia il criterio relativo alla stabilità statica longitudinale: supponiamo di avere la nostra configurazione[2] in equilibrio con un certo angolo d'attacco.

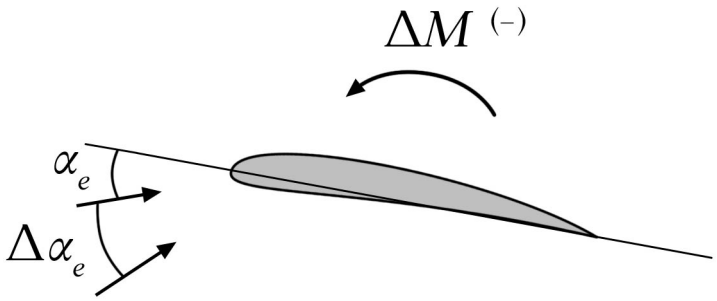


Figura 1

Un aumento dell'angolo d'attacco deve produrre l'insorgere di una coppia aerodinamica che tenda a ridurre α_e; in termini matematici la condizione appena enunciata si scrive

$$\frac{\partial C_M}{\partial \alpha} = C_{M_\alpha} < 0 .$$

Nell'ambito dello studio della stabilità statica longitudinale questa è una condizione basilare; il valore negativo di quella derivata viene indicato come *rigidezza di beccheggio positiva*: un aeromobile che possieda una rigidezza di beccheggio positiva è un velivolo che è sta-

[1] Nel capitolo si è usato il verbo italiano stabilizzare al posto del termine, divenuto di uso comune, "trimmare".

[2] Si mostrerà in seguito che per profilo, ala o velivolo completo il discorso sarà sempre lo stesso.

ticamente stabile dal punto di vista longitudinale. Il comportamento relativo all'equilibrio dei momenti del velivolo assimila il velivolo ad un sorta di sistema che possiede un elemento di richiamo elastico, ovverosia l'effetto legato ad un $C_{M_\alpha} < 0$ risulta molto simile all'effetto di una molla torsionale che, appena viene fatto ruotare attorno al baricentro, tende a riportare il velivolo nella condizione di equilibrio. Vedremo, però, come una rigidezza di beccheggio positiva non costituisca né una condizione necessaria né una condizione sufficiente per la stabilità statica. Sottolineeremo in particolare come in certe situazioni non vi sia stabilità statica anche con un $C_{M_\alpha} < 0$, quindi anche se l'aeroplano possiede una rigidezza di beccheggio positiva[3]. Tuttavia bisogna aggiungere che la condizione basata sulla rigidezza di beccheggio rappresenta un elemento di progetto fondamentale per cui, indipendentemente da altri aspetti, si cercherà sempre di realizzare un velivolo che abbia $C_{M_\alpha} < 0$.

C'è un altro aspetto da sottolineare: supponiamo che la configurazione del velivolo sia stata resa stabile longitudinalmente con mezzi opportuni; possiamo rappresentare la relazione fra C_{M_α} ed α, semplificando, con un andamento più o meno rettilineo con derivata negativa.

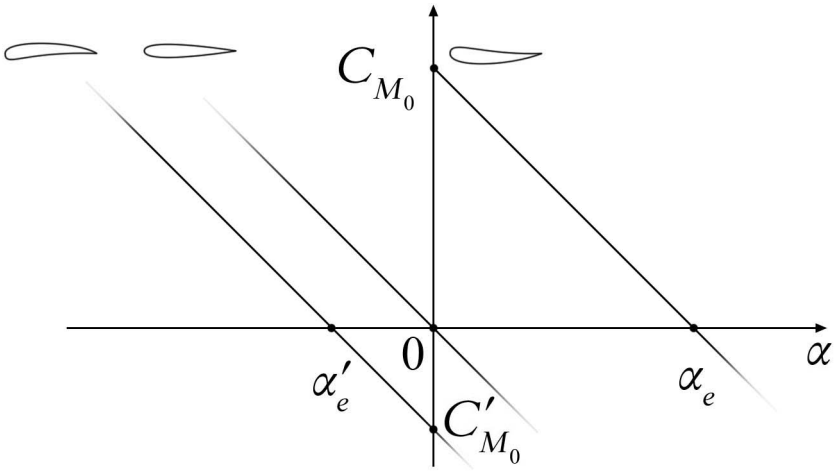


Figura 2

Ricordiamo che per equilibrare longitudinalmente il velivolo, cioè per avere l'equilibrio dei momenti longitudinali, dobbiamo volare ad un certo valore dell'angolo d'attacco per il quale il coefficiente di momento sia pari a zero. Consideriamo due casi: nel primo equilibriamo l'apparecchio attorno ad un α_e di equilibrio positivo, nel secondo attorno ad un α'_e negativo; entrambe le posizioni soddisfano il criterio di stabilità basato sulla rigidezza di beccheggio, ma l'unica che abbia senso è la prima perché l'angolo d'attacco è positivo (non pos-

[3] In casi molto particolari come proiettili di artiglieria, corpi ad elevato allungamento della fusoliera, il C_{M_α} può essere nullo o addirittura positivo ed il sistema è stabilizzato in modo giroscopico mettendo in rotazione attorno ad un asse opportuno il corpo stesso.

siamo infatti sviluppare portanza ad incidenze negative). Dunque il C_{M_0} dovrà essere positivo, dove C_{M_0} rappresenta il valore del coefficiente di momento per un angolo d'attacco nullo. Quindi, quando parliamo di stabilità statica longitudinale, non dobbiamo dimenticare il fatto che esista un problema relativo all'equilibrio dell'apparecchio, equilibrio che deve avvenire ad angoli d'attacco positivi; in breve al criterio $C_{M_\alpha} < 0$ relativo alla stabilità statica si aggiunge il fatto che il coefficiènte C_{M_0} debba essere positivo: per un profilo (o per un'ala) ottenere un $C_{M_\alpha} < 0$ è semplice poiché basterà avere il centro aerodinamico a valle del baricentro; quindi posizionando opportunamente il baricentro, o meglio l'ala rispetto al baricentro, siamo sempre in grado di avere il valore desiderato per la rigidezza di beccheggio. Non è altrettanto semplice avere un $C_{M_0} > 0$ e questo è il motivo per il quale non si vedono frequentemente aeroplani con una singola superficie aerodinamica (dette *configurazioni tutt'ala* quali ad esempio il Mirage 2000 od il B-2B): supponiamo che il profilo che costituisca l'ala sia un profilo convenzionale a curvatura positiva; in questo caso abbiamo un C_{M_0} picchiante, di conseguenza non c'è modo di equilibrare il velivolo a valori dell'angolo d'attacco positivi (infatti $C_{M_\alpha}; C_{M_0} < 0$); nel caso in cui invece il profilo sia simmetrico avremo $C_{M_0} = 0$, perciò (si veda la linea centrale in figura 2) l'unico angolo d'attacco di equilibrio che possiamo avere è quello corrispondente all'origine del grafico, cioè $\alpha = 0$; supponiamo, infine, di installare un profilo a curvatura rovescia, il quale possiede un $C_{M_0} > 0$; questo tipo di profilo è quello che in teoria permetterebbe ad un tutt'ala di volare.

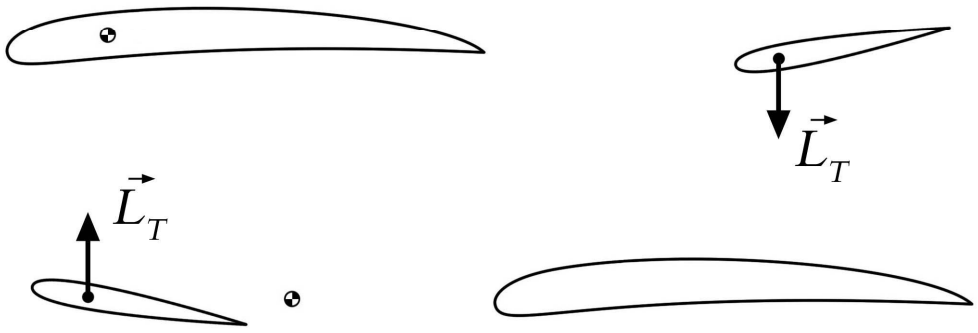


Figura 3

Illustriamo adesso esempi di velivoli con due superfici portanti: ala e stabilizzatore; in questo caso si possono ottenere due possibili configurazioni, una convenzionale ed una Canard (si veda figura 3). Per quanto riguarda la configurazione tradizionale, supponiamo che l'ala abbia profilo a curvatura positiva; osserviamo che la posizione del baricentro è posta molto vicina al quarto di corda, tipicamente un po' più a valle, e che il piano di coda è nor-

malmente inclinato ad incidenze negative. La forza di portanza negativa prodotta dalla coda produce un momento orario rispetto al baricentro e quindi un contributo positivo al C_{M_0}; questa configurazione dunque, pur avendo un profilo a curvatura positiva realizza la condizione di avere un $C_{M_0} > 0$. Nel caso di configurazione Canard, invece, l'impennaggio è posizionato anteriormente all'ala; osserviamo che in questo caso tale superficie è disposta ad angolo positivo, quindi fornisce un contributo positivo alla portanza totale. Il C_{M_0} totale della configurazione è positivo. Notiamo (in base anche a quanto detto nel § 2.7 sulla stabilità di un profilo) che l'aletta Canard fornisce un contributo destabilizzante alla configurazione perché se ad esempio l'angolo d'attacco aumenta, l'aletta produrrà un momento cabrante. La configurazione completa è resa stabile utilizzando una posizione del baricentro sufficientemente avanzata rispetto al centro aerodinamico dell'ala.

Piaggio P-180 Avanti - Figura 4

Un esempio di velivolo con configurazione Canard è il Piaggio P-180 Avanti[4] (figura 4) in cui possiamo notare la posizione arretrata dell'ala rispetto al corpo della fusoliera e quindi un baricentro piuttosto avanzato rispetto al c.a. dell'ala.

Torniamo a parlare del velivolo tutt'ala: abbiamo visto che l'unica possibilità di avere soddisfatta la condizione per volare in volo equilibrato ad angoli d'attacco positivi è avere un profilo a curvatura negativa; questo è vero però solo nel caso di un'ala rettangolare; se l'ala è

[4] Quella del P-180 non è propriamente una configurazione Canard perché vi sono tre superfici portanti: piani di coda convenzionali, ala e superfici Canard.

a freccia e svergolata (si veda figura 5) possiamo realizzare sia la condizione $C_{M_\alpha} < 0$ sia la condizione $C_{M_0} > 0$: la prima condizione è soddisfatta posizionando il baricentro del velivolo in un punto avanzato rispetto al c.a. dell'ala; la seconda è soddisfatta svergolando l'ala con angoli di svergolamento positivi; la configurazione in figura mostra un'ala svergolata quindi anche se la portanza complessiva è uguale a zero, la parte più vicina alla radice dell'ala produce una portanza positiva, mentre l'estremità dell'ala genera una portanza negativa; il risultato è una coppia aerodinamica positiva. Riassumendo possiamo avere un velivolo tutt'ala, con un'ala costituita da profili convenzionali se l'ala possiede un angolo di freccia ed è svergolata. La configurazione più recente è quella del Northrop B-2B (si veda figura 6): notiamo l'assenza totale anche della coda verticale (fatto che riduce la visibilità ai radiolocalizzatori del bombardiere). Il controllo sui tre assi è assicurato su questo aereo da quattro superfici di governo aerodinamico per ogni semiala, le quali vengono ruotate in modo che funzionino da alettone, da equilibratore, da timone (producendo resistenza differenziale sulle due semiali) ed anche da ipersostentatori: le superfici di estremità si possono aprire una verso l'alto ed una verso il basso, agendo così da timone in quanto aumentano la resistenza su una semiala producendo dei momenti di imbardata; inoltre tali superfici funzionano da aerofreni quando si aprono completamente nella fase di atterraggio del velivolo.

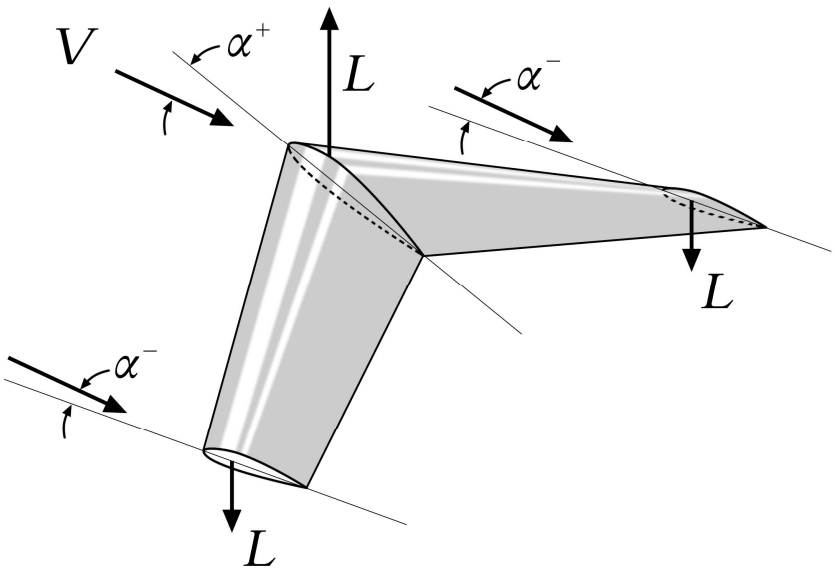
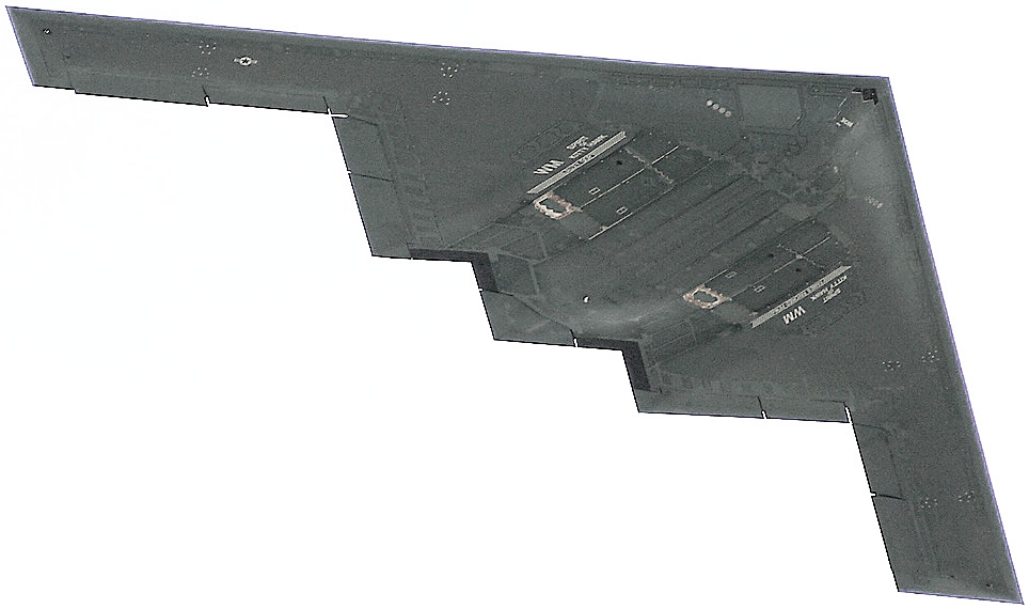


Figura 5



Northrop B-2B - Figura 6

15.2 - CONTRIBUTO DELL'ALA, DEI PIANI DI CODA E DELLE SUPERFICI CANARD

Abbiamo discusso l'aspetto concettuale del problema, adesso dobbiamo arrivare ad una valutazione analitica del contributo delle diverse parti dell'aeromobile fondamentali per la stabilità e per l'equilibrio longitudinali. Considereremo perciò principalmente il C_M, il quale è funzione dell'angolo d'attacco e del numero di Mach, nonché fortemente influenzato dalle caratteristiche dell'apparato propulsivo, cioè dalla spinta; infatti l'apparato propulsivo non solo produce momenti (perché in genere l'asse di spinta non passa per il baricentro), ma genera anche delle perturbazioni del campo aerodinamico del velivolo e quindi produce degli effetti molto complessi che vengono analizzati in dettaglio attraverso prove in galleria del vento su modelli motorizzati. Un altro elemento che gioca un ruolo importante sul coefficiente di momento e quindi sulla stabilità statica del velivolo, è un termine che possiamo rappresentare come un termine di pressione dinamica; ciò comporta che il coefficiente di momento diventa dipendente dalle caratteristiche strutturali (ma noi non trattiamo questi effetti e studiamo il velivolo come se fosse rigido).

Determiniamo anzitutto il contributo dell'ala al C_{M_0} ed al C_{M_α}.

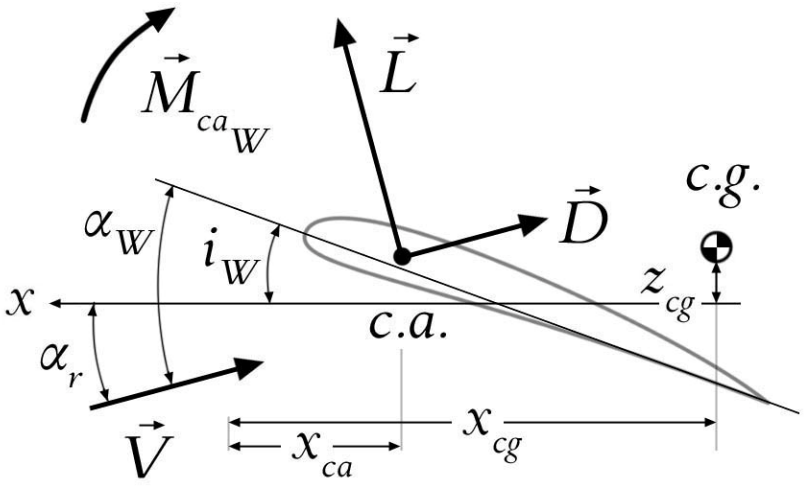


Figura 7

Definiamo α_W l'angolo d'attacco dell'ala riferita alla corda della radice alare ed indichiamo con i_W l'angolo di calettamento dell'ala, inteso come angolo di inclinazione della corda alla radice dell'ala rispetto all'asse x giacente sul pavimento della cabina. D'ora in poi non utilizzeremo più l'angolo α_r ed inoltre osserviamo che per ora abbiamo disegnato nel suo verso positivo il momento M_{ca}, riservandoci di precisarne il verso effettivo in seguito. Scriviamo il bilancio dei momenti attorno al baricentro

$$M_{cg_W} = L_W \cos(\alpha_W - i_W)(x_{cg} - x_{ca}) + D_W \operatorname{sen}(\alpha_W - i_W)(x_{cg} - x_{ca})$$
$$+L_W \operatorname{sen}(\alpha_W - i_W)(z_{cg} - z_{ca}) - D_W \cos(\alpha_W - i_W)(z_{cg} - z_{ca}) + M_{ca_W}$$

questa è l'espressione completa di tutte le azioni che concorrono a formare il momento attorno al baricentro. È possibile semplificare tale espressione considerando le seguenti ipotesi:

$$\begin{aligned} &L_W \gg D_W \\ &(\alpha_W - i_W) \ll 1 \qquad \Rightarrow \quad \cos(\alpha_W - i_W) \approx 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\alpha_W - i_W) \approx 0 \\ &z_{cg} = z_{ca} \approx 0 \end{aligned}$$

l'equazione quindi si modifica

$$M_{cg_W} \approx L_W (x_{cg} - x_{ca}) + M_{ca_W}$$

che, scritta in termini di coefficienti non dimensionali, diventa

$$C_{M_{cgW}} = \frac{M_{cgW}}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S\overline{c}} = C_{L_W}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right) + C_{M_{caW}}$$

con C_{L_W} dato da

$$C_{L_W} = C_{L_{0W}} + C_{L_{\alpha W}}\alpha_W$$

ovverosia da un termine costante e da un termine linearmente dipendente dall'angolo d'attacco. Sostituendo la precedente nell'equazione di $C_{M_{cgW}}$ abbiamo

$$C_{M_{cgW}} = C_{L_{0W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ac}}{\overline{c}}\right) + C_{L_{\alpha W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right)\alpha_W + C_{M_{caW}}$$

ricordiamo che il nostro obiettivo è di determinare il contributo dell'ala per i due coefficienti C_{M_0} e C_{M_α}; nella precedente è presente un termine costante ed un termine dipendente dall'angolo d'attacco quindi possiamo scrivere

$$C_{M_{0W}} = C_{L_{0W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right) + C_{M_{caW}}$$
$$C_{M_{\alpha W}} = C_{L_{\alpha W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right)$$

ricordiamo che per avere una rigidezza di beccheggio positiva ed anche angoli d'attacco positivi dei *trimmer*, deve essere $C_{M_0} > 0$ e $C_{M_\alpha} < 0$; vediamo come soddisfare queste due condizioni: per quanto riguarda il C_{M_α} rispettare tale condizione non presenta particolari difficoltà in quanto basterà che il baricentro sia collocato davanti al centro aerodinamico

$$\frac{x_{cg}}{\overline{c}} < \frac{x_{ca}}{\overline{c}} \quad \Rightarrow \quad C_{M_\alpha} < 0\,.$$

Resta più complesso invece rispettare la condizione riguardante il C_{M_0} poiché, come abbiamo detto, per un'ala con profili convenzionali il coefficiente di momento rispetto al c.a. è sempre negativo; inoltre, avendo posto il baricentro in posizione avanzata rispetto al centro aerodinamico, anche il contributo del $C_{L_{0W}}$ al momento risulterà minore di zero. Se dunque $C_{M_{\alpha W}} < 0$, assicurando la stabilità statica longitudinale, non riusciamo ad ottenere

un valore positivo del C_{M_0}. Tutto ciò è già stato presentato qualitativamente: a meno che non si utilizzi un'ala a freccia con svergolamento tale che riesca a cambiare il segno del $C_{M_{\alpha_W}}$ non riusciamo a soddisfare contemporaneamente le due condizioni suddette; perciò dobbiamo per forza passare alla configurazione con due superfici portanti: ala e piani di coda orizzontali. Analizziamo dunque il contributo del piano di coda orizzontale.

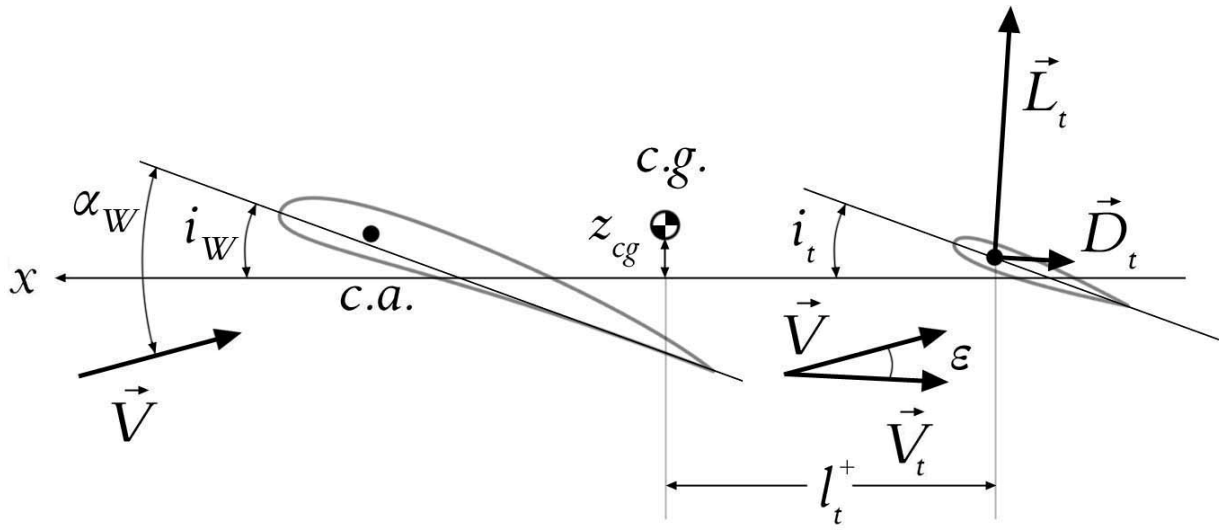


Figura 8

Per il piano di coda possiamo trascurare tutti gli effetti che non siano legati al momento prodotto dalla portanza, quindi

$$M_{cg_t} = -L_t l_t = -\frac{1}{2}\varrho_t V_t^2 S_t C_{L_t} l_t$$

ed in termini di coefficienti adimensionali ($\eta_t = \frac{\varrho_t V_t^2}{\varrho V^2}$)

$$C_{M_{cg_t}} = \frac{-L_t l_t}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S\bar{c}} = -\eta_t \frac{S_t}{S}\frac{l_t}{\bar{c}} C_{L_t}$$

dove il termine

$$\frac{S_t}{S}\frac{l_t}{\bar{c}} = V_H$$

prende il nome di *rapporto volumetrico dei piani orizzontali di coda* ed è un parametro di progetto fondamentale; quindi linearizzando il C_{L_t}, l'espressione di $C_{M_{cg_t}}$ diventa ($C_{L_{0_t}} = 0$, profilo simmetrico)

$$C_{M_{cg_t}} = -\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \alpha_t .$$

Dobbiamo esprimere adesso α_t; consideriamo una situazione *a comandi bloccati*, nella quale cioè non interviene l'effetto del controllo; ciò significa che δ_E sarà costante e per esempio nullo; in queste condizioni

$$\alpha_t = \alpha_r + i_t - \varepsilon = \alpha_W - i_W + i_t - \varepsilon$$

linearizzando ε, come abbiamo già fatto ($\varepsilon = \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \alpha_W + \varepsilon_0$)

$$\alpha_t = \alpha_W \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right) - i_W + i_t - \varepsilon_0 .$$

Teniamo presente che si è ipotizzato un velivolo con caratteristiche convenzionali, per il quale il coefficiente ε_0 può variare fra 2 e 3 gradi, mentre il coefficiente $\left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0$ può avere un valore compreso tra $-0{,}2°$ e $-0{,}5°$ a seconda della forma in pianta dell'ala e dalla posizione del piano orizzontale di coda rispetto al piano alare. Sostituendo la precedente nella espressione di $C_{M_{cg_t}}$

$$C_{M_{cg_t}} = -\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \left[\alpha_W \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right) - i_W + i_t - \varepsilon_0\right]$$

da cui

$$C_{M_{0_t}} = \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(i_W - i_t + \varepsilon_0\right)$$
$$C_{M_{\alpha_t}} = -\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right).$$

Sappiamo che $\left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0$ è sempre negativo e quindi la condizione $C_{M_{\alpha_t}} < 0$ è sempre soddisfatta, cioè il piano di coda orizzontale dà sempre un contributo positivo alla stabilità statica. Tuttavia avevamo visto che questo contributo positivo poteva essere ottenuto anche dall'ala isolata; l'aspetto più importante del piano di coda è quello relativo al $C_{M_{0_t}}$: indipendentemente dal valore di i_W ed ε_0 possiamo avere $C_{M_{0_t}} > 0$ se incliniamo il piano di coda orizzontale ad incidenze negative; se infatti l'angolo i_t è minore di zero, $C_{M_{0_t}}$ sarà certamente positivo e grande quanto desiderato, quindi inclinando di un angolo opportuno il piano orizzontale possiamo ottenere il valore di $C_{M_{0_t}} > 0$ di cui abbiamo bisogno per quanto riguarda il problema dell'equilibrio dell'aeroplano. È per questo motivo che di solito l'impennaggio di coda del velivolo è deportante.

Passiamo adesso alla configurazione Canard.

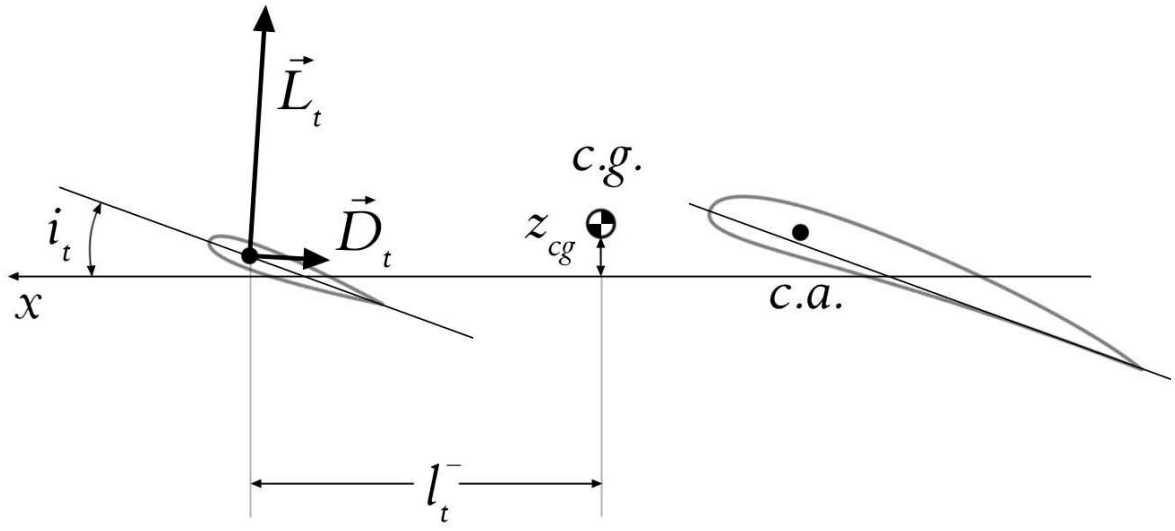


Figura 9

Possiamo utilizzare le stesse relazioni tenendo presente che il rapporto volumetrico risulta negativo poiché cambia segno la distanza l_t tra baricentro e c.a. della superficie Canard, di conseguenza cambiano segno $C_{M_{0_t}}$ e $C_{M_{\alpha_t}}$. Quindi per la configurazione Canard avremo un contributo destabilizzante per la stabilità statica longitudinale, poiché in tale configurazione $C_{M_{\alpha_t}}$ sarà sempre positivo; notiamo perciò come in questo caso, per avere $C_{M_{0_t}} > 0$, dobbiamo inclinare la superficie Canard ad incidenze positive. Questo è un fatto vantaggioso perché durante il volo il piano orizzontale risulterà portante a differenza di quanto accade per una configurazione convenzionale. Osserviamo che l'effetto *downwash* è ancora presente ma dovrà tener conto del fatto che il segno di ε è cambiato (vedi figura 2.34: nelle zone anteriori dell'ala la velocità indotta è diretta verso l'alto), cioè diventa negativo; in questo caso non si parla di *downwash*, ma di *upwash*. Rimane adesso il problema della stabilità: per avere

stabilità positiva bisogna spostare il baricentro in avanti, cioè il baricentro sarà posizionato tanto avanti rispetto al c.a. quanto sarà necessario perché complessivamente la configurazione abbia stabilità statica positiva.

15.3 - CONTRIBUTO DELLA FUSOLIERA E DELL'APPARATO PROPULSORE

Determinare gli effetti legati alla fusoliera ed alle gondole dei motori richiede uno studio abbastanza approfondito che non svolgeremo; in questo caso si parla di un contributo totale dato da

$$C_{M_{0_f}} > 0$$
$$C_{M_{\alpha_f}} > 0$$

ed entrambi i termini sono piuttosto piccoli. Notiamo solo che il contributo della fusoliera e delle gondole dei motori è destabilizzante.

Per quanto riguarda le azioni propulsive ricordiamo che abbiamo due tipi di effetti: il primo è legato ai momenti generati dalle forze propulsive, momenti in cui riconosciamo una parte costante non dipendente dall'angolo d'attacco ed una parte che, come vedremo, sarà funzione dell'angolo d'attacco; citiamo poi un secondo effetto, che non discutiamo, legato alle perturbazioni indotte dai motori sul campo aerodinamico attorno al velivolo: le scie dei motori, a getto o ad elica, producono delle variazioni sui tre assi del campo aerodinamico attorno alle superfici del velivolo, modificando così la stabilità statica longitudinale.

Discutiamo il primo effetto: scriveremo espressioni semplicissime che permettono di averne una prima stima (questi effetti non entreranno nella discussione successiva in quanto sono tutti effetti che dipendono molto dalla configurazione, cioè dal fatto che il motore si trovi sopra oppure sotto il baricentro, cambiando il segno di tutti gli effetti che consideriamo, quindi non possiamo ottenere delle informazioni di tipo generico). Analizziamo prima il caso del motore ad elica.

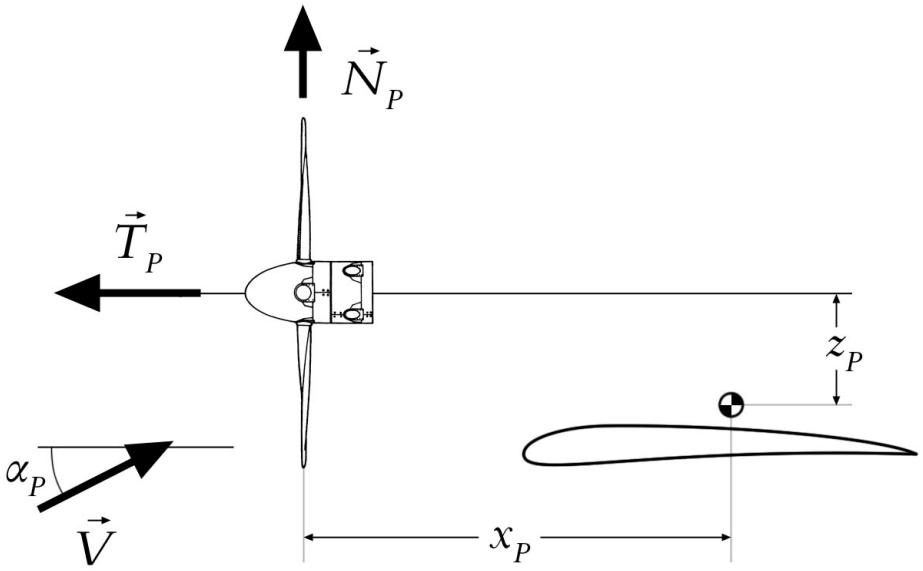


Figura 10

Indichiamo con T_P la forza propulsiva generata dall'elica e supponiamo che l'elica si trovi in alto rispetto al piano alare ed inoltre che si trovi in alto rispetto al baricentro; supponiamo inoltre che questa lavori ad un certa incidenza: la corrente non è diretta lungo l'asse di spinta ma è inclinata rispetto a quest'ultimo di un angolo α_P; in questo caso il disco dell'elica produce una forza normale legata alla variazione di quantità di moto del fluido interessato dall'azione dell'elica (prima di incidere sull'elica il fluido possiede infatti una componente di velocità verticale che perde a valle dell'elica, orientandosi come l'asse di spinta). Dunque la variazione del momento determinata dalla presenza dell'elica è data da due termini; il primo, che consideriamo indipendente dall'angolo d'attacco, è

$$\Delta M_{T_P} = -T_P \, |z_P|$$

che in termini non dimensionali si scrive

$$\Delta C_{M_{T_P}} = -\frac{T_P \, |z_P|}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S\bar{c}} = C_{T_P} \frac{z_P}{\bar{c}}$$

osserviamo dunque come l'elica modifichi il valore del C_{M_0} del velivolo; questa modifica avrà il segno di z_P, ovvero cambierà segno a seconda della posizione dell'elica rispetto al baricentro. Il secondo termine è quello dovuto alla forza normale N_P e dipende dall'angolo d'attacco poiché $\vec{N}_P \neq 0$ quando $\alpha_P \neq 0$; scriviamo tale contributo come

$$\Delta M_{N_P} = N_P \, x_P$$

sviluppando linearmente la forza $\vec{N}_P(\alpha_P)$ otteniamo

$$\Delta M_{N_P} = \left(\frac{dN_P}{d\alpha_P} \alpha_P \right) x_P$$

dove α_P può essere espresso a sua volta come

$$\alpha_P = \alpha - \varepsilon = \alpha - \varepsilon_0 - \left. \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right|_0 \alpha$$

con ε teniamo conto della presenza di velocità indotte dall'ala in corrispondenza del disco dell'elica e, per confermare quanto detto prima, poiché l'elica si trova anteriormente all'ala mettiamo in evidenza il fatto che $\varepsilon < 0$. In termini di coefficienti di momento

$$\Delta C_{M_{N_P}} = \frac{dC_{N_P}}{d\alpha} \frac{x_P}{\bar{c}} \left(1 - \left. \frac{d\varepsilon}{d\alpha} \right|_0 \right) \alpha$$

nella quale abbiamo trascurato il coefficiente ε_0.
Occupiamoci quindi dell'aviogetto

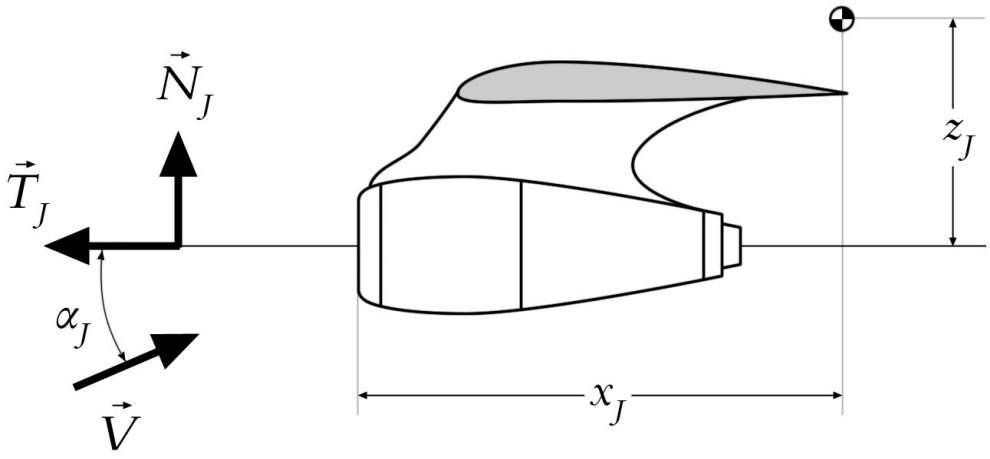


Figura 11

Avremo, come nel caso precedente, un contributo per il coefficiente C_{M_0} dato dalla presenza del motore, ma questa volta l'asse di spinta è in una posizione inferiore rispetto al baricentro e quindi tale contributo sarà positivo; in termini non dimensionali

$$\Delta M_{T_J} = T_J z_J \qquad \Rightarrow \qquad \Delta C_{M_{T_J}} = C_{T_J} \frac{z_J}{\bar{c}}.$$

Il termine dipendente dall'angolo d'attacco tiene conto della variazione della q.d.m. $m_J V_i$ del fluido che entra nel motore; osserviamo che tale massa, interagendo con il motore, viene deviata fino ad allinearsi all'asse di spinta (figura 11); ciò corrisponde all'applicazione di una forza che, per produrre quella variazione di q.d.m., deve essere diretta verso il basso; per il terzo principio della dinamica a tale forza corrisponde un'azione $\vec{N}_J$ uguale ed opposta, diretta perciò verso l'alto, che ha il punto di applicazione in corrispondenza della presa d'aria del motore. Abbiamo dunque

$$\Delta M_{N_J} = \dot{m}_J \; V_i \; \alpha_J \; x_J$$

dove $\alpha_J = \alpha - \varepsilon$; il motore è anteriore all'ala e quindi ε sarà negativo (le velocità indotte dall'ala sono dirette verso l'alto). In termini non dimensionali

$$\Delta C_{M_{N_J}} = \frac{\dot{m}_J V_i}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)\alpha \frac{x_J}{\bar{c}}$$

espressione analoga a quella trovata per l'elica.

Abbiamo così dato un'indicazione generale sugli effetti legati alle varie parti del velivolo, i quali vengono studiati in dettaglio utilizzando grossi modelli in galleria del vento, dotati anche del sistema di propulsione. Possiamo perciò riassumere quanto detto sinora, scrivendo l'espressione del C_{M_α} e del C_{M_0} per il velivolo completo (trascurando soltanto il contributo dovuto ai motori)

$$\begin{cases} C_{M_\alpha} = C_{L_{\alpha W}}\left(\dfrac{x_{cg}}{\bar{c}} - \dfrac{x_{ca}}{\bar{c}}\right) + C_{M_{\alpha f}} - \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \left.\dfrac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right) \\ C_{M_0} = C_{L_{0W}}\left(\dfrac{x_{cg}}{\bar{c}} - \dfrac{x_{ca}}{\bar{c}}\right) + C_{M_{caW}} + C_{M_{0f}} + \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(i_W - i_t + \varepsilon_0\right) \end{cases}$$

Rappresentando i vari andamenti[5] in un grafico otteniamo

[5] Supponiamo che il momento vari linearmente rispetto all'angolo d'attacco (per incidenze non elevate, è un ipotesi ragionevole).

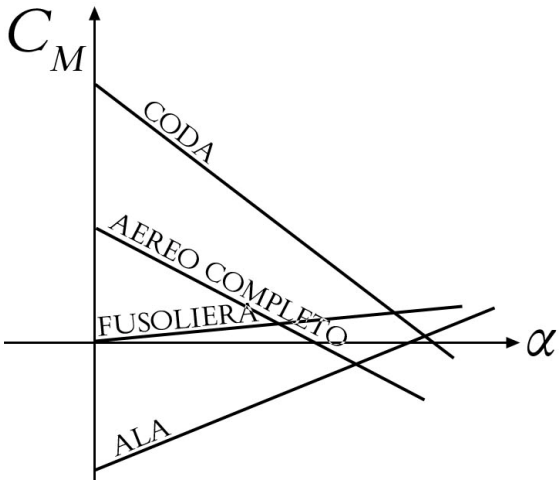


Figura 12

per l'ala in genere si ha che $C_{M_{0_W}} < 0$ e $C_{M_{\alpha_W}} > 0$[6]; per la fusoliera abbiamo visto che $C_{M_{0_f}} > 0$ e $C_{M_{\alpha_f}} > 0$. Quindi ala e fusoliera forniscono un contributo destabilizzante. Per il piano di coda invece sappiamo che possiamo avere un $C_{M_{0_t}}$ e un $C_{M_{\alpha_t}}$ grandi quanto vogliamo ed in particolare tali da provvedere un contributo stabilizzante. Per il velivolo completo, sommando questi contributi, otteniamo $C_{M_0} > 0$ e $C_{M_\alpha} < 0$.

15.4 - PUNTO NEUTRO A COMANDI BLOCCATI: MARGINE STATICO

Torniamo all'espressione del C_{M_α} (si veda l'equazione relativa del sistema precedente) e osserviamo come essendo costanti tutte le altre grandezze il suo valore dipende dalla posizione del baricentro. Ciò porta a definire una posizione caratteristica del baricentro in corrispondenza della quale $C_{M_\alpha} = 0$; questa posizione, la cui ascissa indichiamo con x_N, è detta *punto neutro a comandi bloccati* ed è una posizione limite fondamentale perché come vedremo quando il baricentro è anteriore al punto neutro, allora otteniamo un stabilità statica positiva, mentre se il baricentro si colloca posteriormente rispetto a tale punto non conseguiamo la stabilità statica[7]. L'ascissa non dimensionale del punto neutro a comandi bloccati è

$$\left.\frac{x_{cg}}{\overline{c}}\right|_{C_{M_\alpha}=0} = \frac{x_N}{\overline{c}} = \frac{x_{ca}}{\overline{c}} - \frac{C_{M_{\alpha_f}}}{C_{L_{\alpha W}}} + \eta_t V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha W}}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right).$$

[6] In una configurazione convenzionale la posizione del baricentro è circa il 5% della corda più a valle del c.a.

[7] Essendo nota sul velivolo la posizione del punto neutro, il velivolo dovrà operare distribuendo il carico in modo che il baricentro venga a trovarsi in una posizione avanzata rispetto a questo.

Sostituendo la relazione

$$\frac{x_{ca}}{\overline{c}} = \frac{x_N}{\overline{c}} + \frac{C_{M_{\alpha f}}}{C_{L_{\alpha W}}} - \eta_t V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha W}}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)$$

nella equazione relativa al C_{M_α} del sistema si ottiene

$$C_{M_\alpha} = C_{L_{\alpha W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_N}{\overline{c}}\right) - C_{M_{\alpha f}} + \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right) + C_{M_{\alpha f}} - \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right) =$$
$$= C_{L_{\alpha W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_N}{\overline{c}}\right)$$

ossia

$$\frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_{\alpha W}}} = \frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_N}{\overline{c}} = \frac{dC_M}{dC_L}$$

appare evidente che, affinché si abbia stabilità statica positiva, è necessario che il baricentro sia posto anteriormente al punto neutro. Ricordiamo che per la stabilità del profilo avevamo scritto la $\frac{dC_{M_x}}{dC_L} = \frac{x}{c} - \frac{x_{ca}}{c}$ (§ 2.5) e abbiamo concluso che un profilo è staticamente stabile se è centrato anteriormente al centro aerodinamico. Mettendo in analogia le precedenti, risulta evidente come il punto neutro a comandi bloccati rappresenti il c.a. del velivolo completo. Ciò è anche evidente tenendo conto che il punto neutro è quella posizione del baricentro in corrispondenza della quale $C_{M_\alpha} = 0$ il che significa che calcolando il coefficiente di momento rispetto al punto neutro esso sarà costante al variare dell'angolo d'attacco, proprio la definizione di centro aerodinamico.

La distanza

$$K_N = \frac{x_N}{\overline{c}} - \frac{x_{cg}}{\overline{c}}$$

fra il punto neutro e il baricentro prende il nome di *margine statico a comandi bloccati*; perché si abbia stabilità statica il margine statico deve essere positivo. Quindi parlare di margine statico e di rigidezza di beccheggio è quasi equivalente, anzi in genere una misura della stabilità statica del velivolo è ottenuta proprio in termini di margine statico. Ciò permette di introdurre un altro aspetto molto importante: sapendo che il margine statico deve

essere positivo, il problema diviene quello di sapere quanto debba essere grande; K_N non deve essere troppo elevato (generalmente è pari al 5 - 8% della corda media del velivolo) perché altrimenti l'aeroplano avrà poca manovrabilità o poca controllabilità. Difatti un'eccessiva stabilità statica comporta un eccessiva resistenza da parte dell'apparecchio ad una qualunque perturbazione dello stato di equilibrio, questo aspetto rappresenta una qualità per quanto riguarda le perturbazioni atmosferiche, mentre diventa un difetto per quanto riguarda la controllabilità che è proprio la capacità di generare delle azioni di controllo che modifichino una posizione di equilibrio: il velivolo tende ad opporsi a qualunque azione del pilota. Se vogliamo modificare il valore del C_L dell'apparecchio, agendo sulla barra per variare l'angolo dell'equilibratore, è necessario produrre una variazione del coefficiente di momento tanto maggiore quanto è maggiore il margine statico. Ciò significa che tanto più è stabile il velivolo, tanto più è grande il margine statico, tanto maggiori saranno i momenti di controllo che dovranno essere generati per produrre una certa variazione del C_L.

15.5 - CONTROLLO LONGITUDINALE

Parlando di controllabilità vediamo cosa significa produrre una certa variazione del coefficiente di momento per modificare il valore del C_L del velivolo

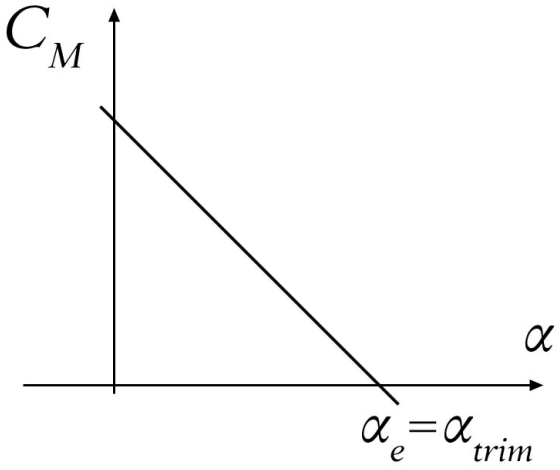


Figura 13

la pendenza della retta è negativa; ricordiamo che il valore di α per il quale $C_M = 0$ rappresenta una condizione di volo stabilizzato che indicheremo con il pedice *trim*; quindi α_{trim} è il valore dell'angolo d'attacco in corrispondenza del quale è stato realizzato l'equilibrio di forze e momenti. Per equilibrare il velivolo in condizioni di volo a diversa velocità usiamo l'equilibratore: una rotazione dell'equilibratore produce lo sviluppo di forze e mo-

menti aerodinamici. In particolare una rotazione positiva, cioè verso il basso del bordo d'uscita, produce una variazione positiva del C_L

$$\Delta L_t = L_t \delta_E = \frac{1}{2} \varrho_t V_t^2 S_t C_{L_t} \delta_E$$

$$\Delta C_L = \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \tau_E \delta_E$$

$$\tau_E = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta_E}.$$

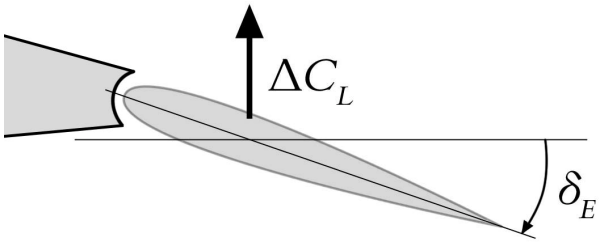


Figura 14

In base a questa relazione definiamo una derivata di controllo

$$C_{L_{\delta_E}} = \frac{dC_L}{d\delta_E} = \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \tau_E$$

che fornisce una misura della variazione del coefficiente di portanza del velivolo causata da una rotazione unitaria dell'equilibratore. Il momento risultante associato ad una rotazione positiva dell'equilibratore è picchiante e quindi negativo; questo momento ha espressione

$$\Delta C_m = -\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \tau_\varepsilon \delta_\varepsilon$$

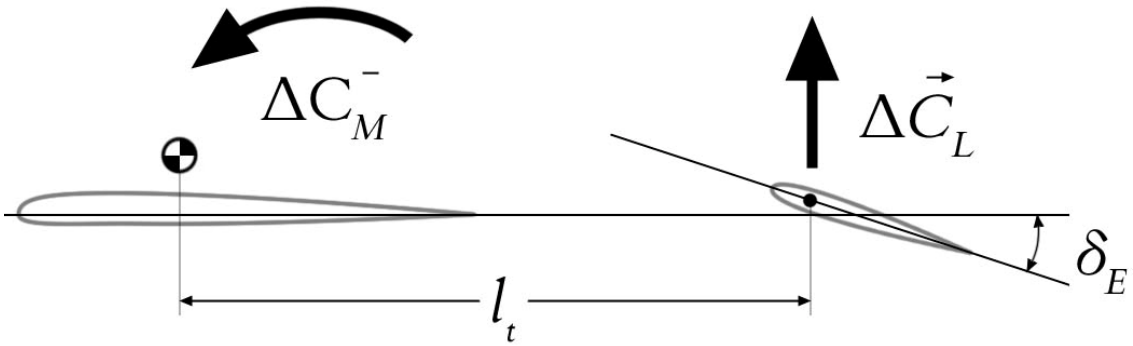


Figura 15

da questa espressione deduciamo la fondamentale derivata

$$C_{M_{\delta_E}} = -\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \tau_E$$

che prende il nome di *potenza di controllo dell'equilibratore* e rappresenta la capacità dell'equilibratore di produrre momenti controllo. Osserviamo come questa espressione non dipenda dall'angolo d'attacco, il che significa, che l'effetto delle superfici di controllo sarà corrispondente sul grafico ad una traslazione della retta.

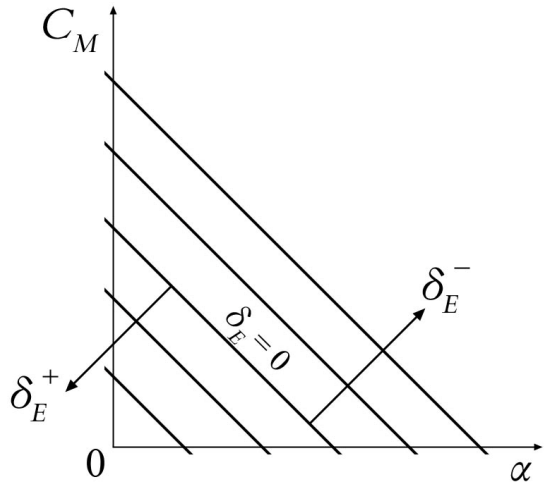


Figura 16

Rotazioni positive dell'equilibratore producono momenti di controllo negativi e quindi permettono di equilibrare il velivolo in condizioni volo ad angoli d'attacco man mano minori e quindi a maggiore velocità; rotazioni verso l'alto dell'equilibratore, cioè negative, permettono di equilibrare il velivolo in condizioni di volo a valori man mano maggiori dell'angolo d'attacco e quindi a velocità minori. Dunque per volare a bassa velocità il pilota deve tirare a sé la barra in modo tale che l'equilibratore ruoti verso l'alto, mentre per volare in equilibrio ad alta velocità deve spingere la barra in avanti in modo che l'equilibratore ruoti verso il basso. Perciò il problema più importante è quello della determinazione della legge che lega l'angolo dell'equilibratore al coefficiente di portanza; vedremo che questa relazione confermerà diverse cose già dette. Condizione di volo equilibrato significa equilibrio dei momenti

$$C_{M_{trim}} = C_{M_0} + C_{M_\alpha}\alpha_{trim} + C_{M_{\delta_E}}\delta_{E_{trim}} = 0\,.$$

L'altra relazione di equilibrio è quella relativa al sostentamento

$$C_{L_{trim}} = \frac{2\,W/S}{\varrho V^2} = C_{L_\alpha}\alpha_{trim} + C_{L_{\delta_E}}\delta_{E_{trim}}$$

dove per semplicità abbiamo trascurato il termine C_{L_0} il che significa che l'angolo d'attacco che compare in questa espressione è molto prossimo all'incidenza aerodinamica del velivolo. Abbiamo due equazioni algebriche nelle incognite $\delta_{E_{trim}}$ e $C_{L_{trim}}$: ricaviamo α_{trim} dalla precedente

$$\alpha_{trim} = \frac{C_{L_{trim}}}{C_{L_\alpha}} - \frac{C_{L_{\delta_E}}}{C_{L_\alpha}} \delta_{E_{trim}}$$

che sostituita nella espressione di $C_{M_{trim}}$ fornisce

$$C_{M_0} + C_{M_\alpha} \frac{C_{L_{trim}}}{C_{L_\alpha}} + \left(C_{M_{\delta_E}} - C_{M_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_E}}}{C_{L_\alpha}} \right) \delta_{E_{trim}} = 0$$

esplicitando $\delta_{E_{trim}}$

$$\delta_{E_{trim}} = - \frac{C_{M_0} C_{L_\alpha} + C_{M_\alpha} C_{L_{trim}}}{C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha} - C_{M_\alpha} C_{L_{\delta_E}}}$$

questa è una relazione fondamentale che permettere di esprimere l'angolo dell'equilibratore in condizioni di volo stabilizzato in funzione del corrispondente coefficiente di portanza. In genere la derivata $C_{L_{\delta_E}}$, che rappresenta la variazione della portanza totale del velivolo in conseguenza della rotazione dell'equilibratore, è molto piccola, quindi nell'ambito di un discorso qualitativo è ragionevole trascurare il secondo termine che compare a denominatore; perciò possiamo scrivere

$$\delta_{E_{trim}} = - \frac{C_{M_0}}{C_{M_{\delta_E}}} - \frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_\alpha}} \frac{C_{L_{trim}}}{C_{M_{\delta_E}}} .$$

Rappresentiamo su un grafico tale relazione

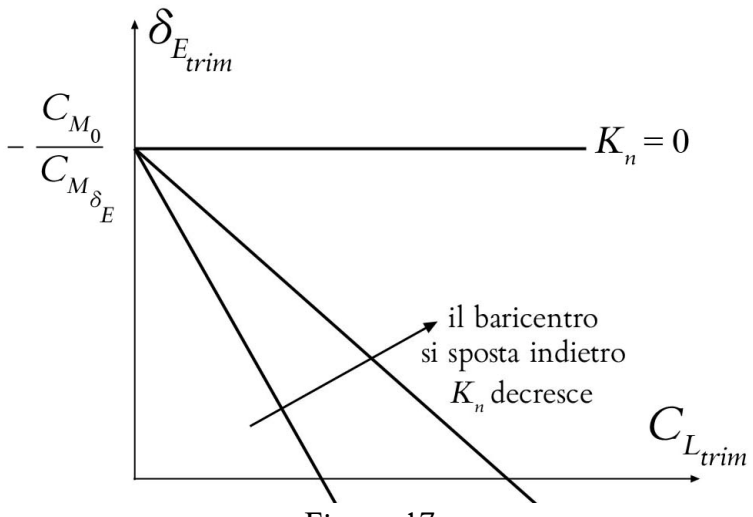


Figura 17

e troviamo che per $C_{L_{trim}} = 0$ abbiamo

$$\delta_{E_{trim}} = -\frac{C_{M_0}}{C_{M_{\delta_E}}}.$$

Sottolineiamo che tale valore è positivo, infatti C_{M_0} è positivo mentre $C_{M_{\delta_E}}$ è negativo. Ciò conferma quanto detto prima: per volare con un basso valore del coefficiente di portanza e quindi ad alta velocità l'angolo dell'equilibratore deve essere positivo; osserviamo che la pendenza della retta è proporzionale a C_{M_α}, cioè alla rigidezza di beccheggio (o al margine statico), e quindi per avere stabilità deve essere negativa. Quindi partendo dal caso limite di margine statico nullo (retta orizzontale), tanto più il baricentro si sposta in avanti tanto maggiore è la pendenza della retta.

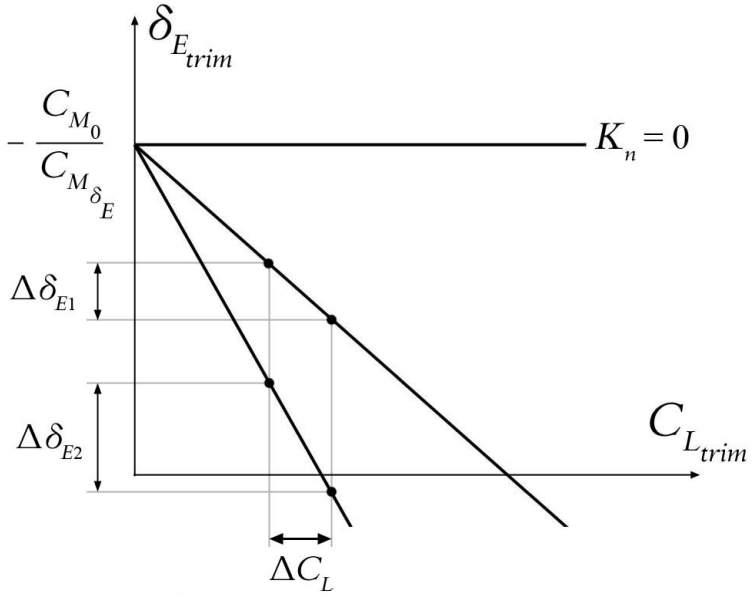


Figura 18

Questo discorso si riaggancia a quello sulla stabilità e controllabilità: osserviamo che tanto maggiore è il margine statico, tanto più è avanzata la posizione del baricentro, tanto maggiori saranno le rotazioni dell'equilibratore necessarie a modificare il valore del coefficiente di portanza. Ad esempio, con riferimento alla figura 18, consideriamo le due situazioni (una in cui il baricentro sia arretrato rispetto all'altra) e supponiamo di essere in equilibrio ad un certo valore del coefficiente di portanza C_{L_e}. Determiniamo in entrambi i casi di quanto deve ruotare l'equilibratore per produrre, attraverso un'azione sui controlli, una variazione positiva (ed uguale in entrambi i casi) del coefficiente di portanza: nel primo caso

(baricentro arretrato) avremo il valore $\Delta\delta_{E_1}$ mentre nel secondo caso (baricentro avanzato) avremo un $\Delta\delta_{E_2}$; osserviamo come sicuramente

$$\Delta\delta_{E_1} < \Delta\delta_{E_2} .$$

In conclusione il velivolo più stabile, quello con il baricentro avanzato, è meno controllabile dell'altro in quanto richiede delle rotazioni dell'equilibratore maggiori per produrre la stessa variazione del coefficiente di portanza.

La variazione di $\delta_{E_{trim}}$ rispetto a C_L, è molto importante e sulla base di questa relazione possiamo esprimere un criterio di stabilità rappresentato da

$$\frac{d\delta_{E_{trim}}}{dC_{L_{trim}}} = -\frac{C_{M_\alpha}^{(-)}}{C_{L_\alpha}^{(+)}\ C_{M_{\delta E}}^{(-)}} < 0$$

un velivolo stabile presenta cioè un valore negativo della derivata di $\delta_{E_{trim}}$ rispetto a $C_{L_{trim}}$. Nell'ottica di una interpretazione della stabilità statica in base a parametri relativi al controllo, un criterio altrettanto importante si basa sulla derivata di $\delta_{E_{trim}}$ rispetto alla velocità in volo stabilizzato; questo criterio di stabilità (e di controllabilità) prende il nome di *stabilità in termini di velocità*. Studiamo come deve essere questo parametro affinché il velivolo sia ritenuto stabile; se consideriamo $\delta_E = \delta_E\left(C_L(V)\right)$ allora possiamo scrivere

$$\frac{d\delta_{E_{trim}}}{dV_{trim}} = \frac{d\delta_{E_{trim}}}{dC_{L_{trim}}}^{(-)}\ \frac{dC_{L_{trim}}}{dV_{trim}}^{(-)} > 0$$

il primo termine a 2° membro, in base a quanto detto finora, è minore di zero; anche il secondo termine, essendo

$$C_{L_{trim}} = \frac{2\,W/S}{\varrho V_{trim}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_{L_{trim}}}{dV_{trim}} = -4\frac{W/S}{\varrho V_{trim}^3} < 0$$

è minore di zero, quindi perché si abbia stabilità positiva in termini di velocità la derivata di $\delta_{E_{trim}}$ rispetto a V_{trim} deve essere maggiore di zero. Interpretiamo questa condizione tramite un grafico nel quale riportiamo l'andamento di $\delta_{E_{trim}}$ in funzione di V_{trim}; possiamo ottenere tale andamento dalla $\delta_{E_{trim}} = -\frac{C_{M_0}}{C_{M_{\delta E}}} - \frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_\alpha}}\frac{C_{L_{trim}}}{C_{M_{\delta E}}}$ che in forma compatta si può scrivere come

$$\delta_{E_{trim}} = c_1 + c_2 C_{L_{trim}}$$

da cui

$$\delta_{E_{trim}} = c_1 + \frac{c_2'}{V_{trim}^2}$$

e quindi il grafico in figura 19.

A bassi valori della velocità di volo l'equilibratore deve essere ruotato verso l'alto, mentre man mano che la velocità di volo aumenta, l'angolo dell'equilibratore deve essere ruotato verso il basso. Osserviamo che il criterio di stabilità in termini di velocità è soddisfatto poiché la funzione è crescente e quindi la sua derivata è positiva.

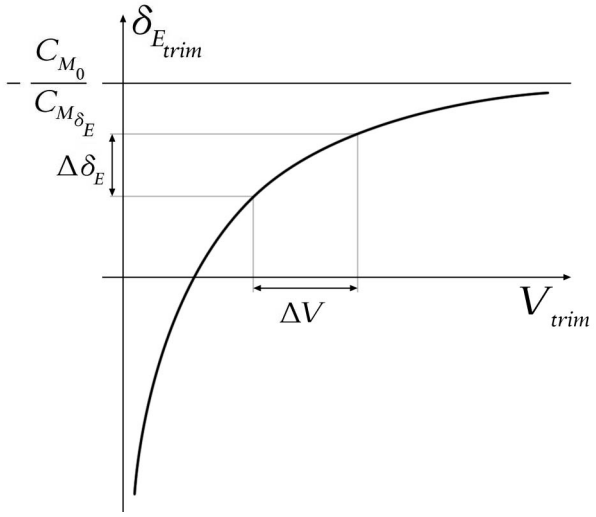


Figura 19

Questo grafico permette di dare un'interpretazione fisica del criterio di stabilità in termini di velocità, mostrando il perché un valore positivo di quella derivata corrisponda ad una condizione di stabilità statica: consideriamo una certa condizione di volo in equilibrio cui corrisponde una certa velocità V_e ed un certo angolo $\delta_e > 0$; inoltre supponiamo che una qualunque causa perturbativa (per esempio una raffica di vento) abbia determinato un aumento della velocità di volo ΔV. Per volare in equilibrio alla velocità $V_e + \Delta V$ il pilota dovrebbe ruotare ulteriormente l'equilibratore di un angolo $\Delta\delta_e > 0$ e questo produrrebbe una variazione negativa del coefficiente di momento

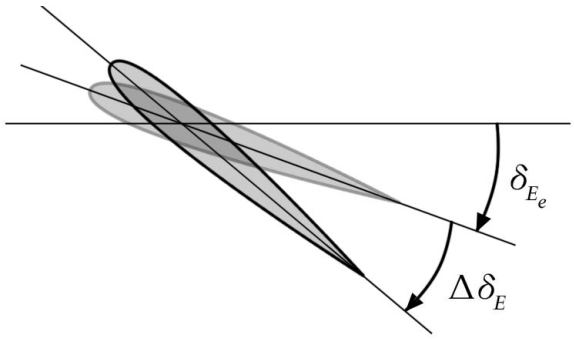


Figura 20

se dunque l'equilibratore rimane nella posizione iniziale, la variazione negativa del coefficiente di momento non viene prodotta ed il velivolo risulta squilibrato per effetto di un momento positivo ΔC_M. Un coefficiente di momento positivo corrisponde ad un momento cabrante, il quale tende a far ruotare il velivolo aumentando l'angolo d'attacco, e quindi determinando una diminuzione della velocità: il velivolo ha sviluppato perciò un'azione che tende a riportarlo nella condizione iniziale, quindi è confermato il fatto che ci troviamo in una condizione di stabilità positiva.

Ciò che abbiamo detto sinora vale solo se trascuriamo gli effetti relativi al numero Mach. Il numero di Mach, soprattutto in regime transonico, modifica notevolmente i risultati ottenuti determinando una variazione dei vari termini (in particolare di C_{M_0} e $C_{M_{\delta_E}}$) che intevengono nelle condizioni di stabilità. Diciamo semplicemente che in presenza di effetti legati alla compressibilità si ha $\delta_E = \delta_E\left(C_L(V); M(V)\right)$, perciò

$$\frac{d\delta_{E_{trim}}}{dV_{trim}} = \frac{\partial\delta_{E_{trim}}}{\partial C_{L_{trim}}}\frac{dC_{L_{trim}}}{dV_{trim}} + \frac{\partial\delta_{E_{trim}}}{\partial M_{trim}}\frac{dM_{trim}}{dV_{trim}}$$

in regime transonico l'ultimo termine a 2° membro è tanto preponderante da determinare un'inversione del segno della derivata: questo fenomeno si presentò durante la seconda guerra mondiale quando i bombardieri in picchiata raggiungevano velocità così elevate da raggiungere il regime transonico: nel momento in cui il pilota, al termine della picchiata, dava un comando a richiamare, il bombardiere non rispondeva al comando o peggio invece di modificare la traiettoria nel senso voluto approfondiva ulteriormente la picchiata. Vediamo di capire come gli effetti del numero di Mach modifichino la derivata precedente riportandoli sul grafico di figura 15.

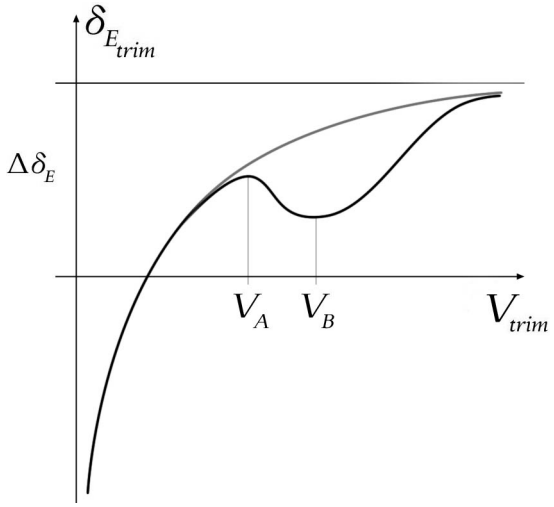


Figura 21

Il contributo del primo termine della precedente è quello che rappresenta l'andamento della curva in figura nelle situazioni in cui la velocità di volo è bassa e quindi il secondo termine della precedente non produce nessuna modifica al parametro di stabilità. Quando siamo in regime transonico ($M > 0,8$) $\frac{dM_{trim}}{dV_{trim}}$ è certamente positivo, ma $\frac{\partial \delta_{E_{trim}}}{\partial M_{trim}}$ in regime transonico è negativo (per il momento diamo per scontato tale risultato, riservandoci di giustificarlo tra poco) e perciò tale fattore rende negativo il secondo termine della precedente; tale secondo termine può diventare superiore (in modulo) al primo tanto da far cambiare il segno della derivata $\frac{d\delta_{E_{trim}}}{dV_{trim}}$. Ciò sul grafico di figura 21 corrisponde al nuovo andamento, il quale mostra che quando l'apparecchio si trovi in un regime di velocità compreso indicativamente tra V_A e V_B il criterio di stabilità che stiamo studiando non è soddisfatto: valori superiori di V_A in termini di velocità di stabilizzazione, sono ottenuti ruotando l'equilibratore verso il basso, come vuole la stabilità statica espressa in termini dell'angolo dell'equilibratore.

Non era questo però l'unico motivo per il quale effettuare una richiamata per i velivoli citati era un'impresa quasi impossibile: a velocità di volo in regime transonico un altro fenomeno molto rilevante che si manifestava era la quasi completa perdita di efficacia dell'equilibratore stesso. Ricordiamo che un azionamento dell'equilibratore corrisponde ad un aumento di curvatura del profilo stesso e ciò comporta una maggiore sensibilità della superficie aerodinamica agli effetti della compressibilità; allora per quei velivoli accadeva in genere che un'onda d'urto andava a posizionarsi proprio in corrispondenza delle cerniere dell'equilibratore e tale urto provocava la separazione più o meno nella stessa posizione e quindi l'equilibratore finiva per trovarsi in una zona di flusso separato ed era di fatto quasi completamente inefficace.

Bombardiere da picchiata Junkers Ju-87 Stuka

A quei tempi il problema fu risolto, una volta che ne furono comprese le origini, installando degli aerofreni che avevano lo scopo di limitare la velocità raggiunta da questi velivoli durante le fasi di volo in picchiata, quindi semplicemente si evitò di raggiungere alte velocità evitando tutti gli effetti legati al *M*.

I velivoli ad alte prestazioni, quali i moderni caccia supersonici, hanno piani di coda in un unico pezzo (*all-moving*), i quali funzionano sia da stabilizzatori che da equilibratori[8]. Perciò per limitare gli effetti citati conviene che la curvatura del profilo sia la minore possibile e quindi usiamo piani di coda *all moving* costituiti praticamente da lastre piane (di spessore molto ridotto) ed il profilo è di fatto simmetrico.

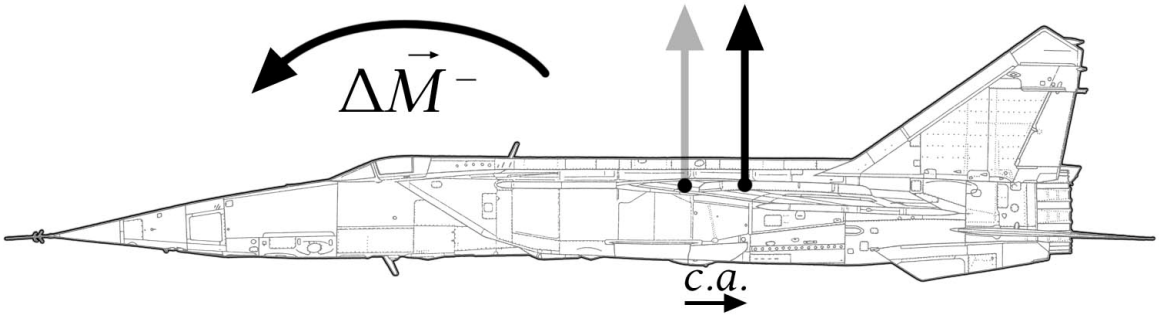


Figura 22

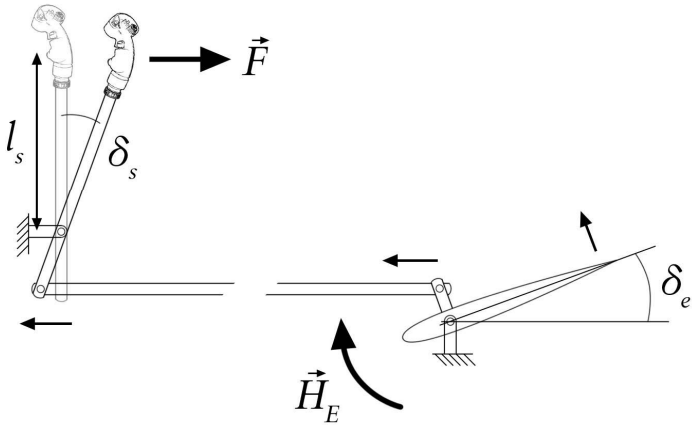
Per concludere il discorso dobbiamo spigare perché $\frac{\partial \delta_{E_{trim}}}{\partial M_{trim}} < 0$ se l'apparecchio si trova in regime transonico; ricordiamo che al variare del *M* in regime transonico il c.a. tende a spostarsi verso il bordo di uscita del profilo ed in particolare nel caso di un profilo sottile passiamo da un 25% ad un 50% della corda. Qualitativamente possiamo richiamare questo effetto anche per quanto riguarda il velivolo completo e diremo che certamente se siamo in regime transonico il c.a. del velivolo si sposta un po' verso la coda, il che determina un momento squilibrante di beccheggio picchiante e quindi negativo.

In questa situazione il velivolo tenderà ad abbassare il muso. Per equilibrare il momento squilibrante il pilota deve ruotare l'equilibratore verso l'alto; quindi a parità di tutti gli al-

[8] Nomi usati sono elevatore, elevone (da *elevon*) o stabilatore (da *stabilizer*).

tri parametri se c'è una variazione positiva del *M*, per mantenere l'equilibrio occorre una variazione negativa di δ_E.

15.6 - SISTEMI DI CONTROLLO REVERSIBILI ED IRREVERSIBILI SFORZI DI BARRA: MOMENTO DI CERNIERA



Sistema di controllo meccanico - Figura 23

Osserviamo in figura 23 uno schema molto semplice che mostra come attraverso un sistema meccanico, formato essenzialmente da aste, una rotazione della barra di comando, dovuta all'applicazione di una certa forza $\vec{F}$, si traduca in una rotazione della superficie di governo aerodinamico. Il disegno mostra come una forza di comando esercitata dal pilota e convenzionalmente positiva a tirare produce una rotazione negativa dell'equilibratore (rotazione verso l'alto). L'azione esercitata dal pilota deve fare equilibrio ad un momento aerodinamico, determinato rispetto all'asse di cerniera dell'equilibratore, che prende il nome di *momento di cerniera* e si indica con $\vec{H}_E$. La prima cosa da fare è mettere in relazione lo *sforzo di barra* $\vec{F}$ con la rotazione dell'equilibratore e soprattutto con il momento di cerniera; in termini di lavoro possiamo scrivere

$$F\, l_S\, \delta_S = H_E\, \delta_E$$

che possiamo riscrivere come

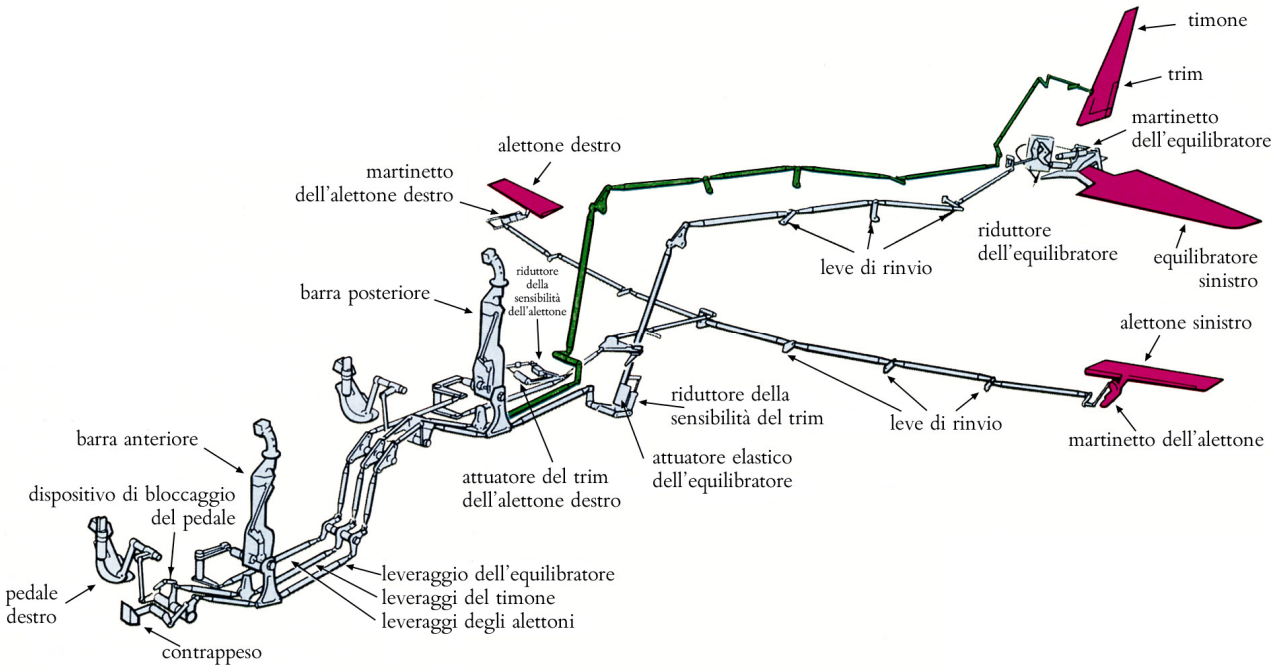
$$F = \frac{\delta_E}{l_S\, \delta_S} H_E = G H_E$$

dove *G* è un coefficiente che prende il nome di *rapporto di trasmissione*. Per quanto riguarda H_E abbiamo detto che si tratta di una coppia aerodinamica e quindi avrà l'espressione abituale di tutte le grandezze aerodinamiche

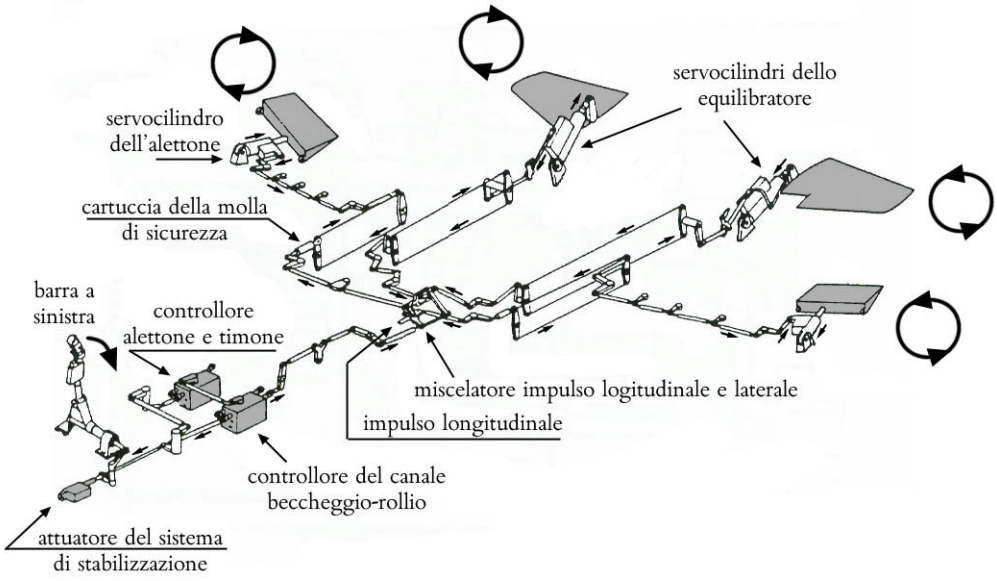
$$H_E = \frac{1}{2} \varrho V^2 S_E c_E C_H$$

dove S_E è una superficie di riferimento, c_E è una corda di riferimento ed il coefficiente C_H prende il nome di *coefficiente di momento di cerniera*. La corda c_E rappresenta in genere la distanza tra asse di cerniera e bordo d'uscita del profilo dell'equilibratore; in modo analogo la superficie S_E rappresenta la parte di superficie di riferimento che si trova a valle della cerniera. Le precedente fornisce delle importanti informazioni: osserviamo come lo sforzo di barra (quindi lo sforzo che deve essere esercitato dal pilota per mantenere l'equilibratore ad un certo angolo) sia proporzionale alla pressione dinamica e quindi alla velocità di volo al quadrato e sia anche proporzionale alle dimensioni del velivolo (tanto più il velivolo è grande tanto più i termini S_E e c_E saranno grandi).

Il sistema di controllo schematizzato in figura 23 è detto *sistema di controllo reversibile* ed era installato su tutti gli apparecchi fino a qualche anno fa e si trova ancora sui velivoli più semplici. In questo sistema esiste una connessione di tipo meccanico tra organo di comando (la barra) e superficie di governo aerodinamico (l'equilibratore) e ciò fa sì che se esercitiamo una certa azione sull'equilibratore otterremo uno spostamento della barra di controllo, da qui la reversibilità. I sistemi di controllo reversibili sono andati benissimo finché gli aerei non hanno raggiunto dimensioni e velocità di volo elevate; il problema di limitare gli sforzi di barra, pur utilizzando sistemi di compensazione aerodinamici (quindi opportune alette di compensazione), non è stato più risolvibile con questi sistemi e si è quindi passati a *sistemi di controllo irreversibili* nei quali viene a mancare proprio il collegamento meccanico tra organo di comando e superficie di controllo. Quello mostrato in figura 24 è lo schema di un sistema reversibile di un velivolo di dimensioni maggiori.



Sistema di controllo di un British Aerospace Hawk - Figura 24



Sistema di controllo elettronico-meccanico di un F-15 - Figura 25

Osserviamo come questa volta è realizzato attraverso un sistema di cavi e pulegge, ma è ancora presente una connessione meccanica diretta tra organo di comando e superficie di governo; tale sistema è detto *idraulico-meccanico*. In figura 25 abbiamo lo schema di un sistema di controllo irreversibile: lo sforzo esercitato dal pilota si traduce opportunamente, attraverso cavi e pulegge, in un comando a delle *servovalvole*, le quali azionano gli organi di potenza che sono in genere costituiti da attuatori idraulici; quindi osserviamo come in questo caso non si può più agire sull'equilibratore e osservare una rotazione della barra di controllo. Osserviamo come il sistema certamente non ne guadagna in semplicità: dobbiamo avere un circuito di olio in pressione, inoltre dobbiamo avere un organo di *sensibilità artificiale*; teniamo presente che il pilota percepisce l'azione che sta effettuando sul velivolo solo attraverso gli sforzi che esercita sugli organi di comando, perciò il pilota non si accorge del fatto che l'equilibratore ruoti (ed inoltre ad alte velocità di volo le rotazioni sono minime: parliamo di qualche grado o addirittura di frazioni di grado); interrompendo la connessione meccanica fra organi di comando e superficie di governo è necessario avere sistemi che ricostruiscano per il pilota gli sforzi che deriverebbero dalle superficie aerodinamiche.

Un altro motivo che ha portato all'utilizzo di questi sistemi di controllo è stato l'effetto del Mach in regime transonico; questo perché in regime transonico il *M* modifica tutti i coefficienti aerodinamici del velivolo e di fronte a questo tipo di problemi garantire certi andamenti degli sforzi di barra in funzione della velocità di volo con sistemi di comando reversibili diventava una cosa di fatto impossibile.

Dai sistemi di controllo irreversibile tipo quello visto prima, nel quale era mantenuto un collegamento meccanico tra barra di comando e organi di attuazione ed in particolare

servovalvole, si è passati in tempi più recenti[9] ai sistemi detti *fly-by-wire* nei quali il collegamento fra barra di comando e attuatore non è più realizzato mediante una connessione meccanica, ma mediante una connessione di tipo informatico; in figura 26 abbiamo un'immagine di un sistema di questo tipo in cui un trasduttore di posizione invia un segnale ad una servovalvola che aprirà o chiuderà il circuito idraulico ad alta pressione in modo che faccia ruotare l'equilibratore finché questo non avrà raggiunto la posizione comandata.

F-8C con *fly-by-wire* della NASA - Figura 26

Il primo velivolo (in campo militare) che adottò questo sistema fu l'F-16. L'applicazione successiva è quella dei sistemi detti *fly-by-light* che dal punto di vista concettuale differiscono da quelli precedenti in quanto il collegamento elettrico è sostituito da un collegamento a fibre ottiche; in questo tipo di sistemi il segnale elettrico che viene dal trasduttore di posizione viene convertito in un segnale ottico e poi in prossimità della servovalvole viene riconvertito in un segnale elettrico; i motivi per i quali si utilizzano questi sistemi sono diversi: il peso ridotto, la quantità di informazioni trasmesse, ma il più importante è la minor sensibilità di questi sistemi ad interferenze di tipo elettromagnetico.

[9] Il 25 maggio 1972 Gary Krier decolla dalla base aerea di Edwards, California in un F-8C sul quale spicca sulla coda la scritta "NASA 802". Krier è il primo uomo a sperimentare il volo mediante un sistema di controllo *fly-by-wire*, qualsiasi comando impartito mediante un *joystick* viene elaborato da un calcolatore prima di essere inviato ad un sistema idraulico il quale controlla ipersostentatori, elevoni, timone, spinta e così via.

Abbiamo detto che l'F-16 è stato il primo velivolo ad avere un sistema di controllo *fly-by-wire*, questo velivolo è pilotato non con una barra di comando classica, ma con una barra detta *sidestick* (barra laterale) la quale, nella versione originale, non rispondeva con un ritorno di forza. Con questo sistema non si guadagna in peso o in semplicità (perché bisogna garantire il funzionamento anche in caso di certe avarie e quindi è richiesta una triplice o quadruplice ridondanza), ma l'innegabile vantaggio è che si interfaccia molto bene con tutto ciò che a bordo proviene dal calcolatore. Rispetto ad un sistema meccanico o parzialmente meccanico il sistema che fu installato sull'F-16 permette di interfacciare sia i comandi che venivano dal pilota che quelli che venivano dai calcolatori di bordo nel modo più efficiente in quanto tutto il sistema era di tipo elettrico almeno fino ad arrivare ai sottosistemi di potenza posti in prossimità delle superfici aerodinamiche. Il motivo per cui sull'F-16 ci sia una parte consistente di sicurezza del volo gestita dai calcolatori elettronici è che questo è stato il primo velivolo realizzato con stabilità statica rilassata (figura 27), cioè senza stabilità statica positiva nelle condizioni di volo a $M < 1$, quindi è un velivolo che richiede un sistema di aumento di stabilità il quale ha in uscita dei segnali elettrici che si interfacciano perfettamente con il sistema *fly-by-wire*. Questo velivolo fu realizzato volutamente con stabilità statica longitudinale negativa: in figura 27 si vede, prescindendo da momenti vari, come in una configurazione convenzionale il baricentro si trovi davanti al c.a. (supponiamo per semplicità di confondere il c.a. dell'ala con quello del velivolo completo), in questa condizione la coda è deportante.

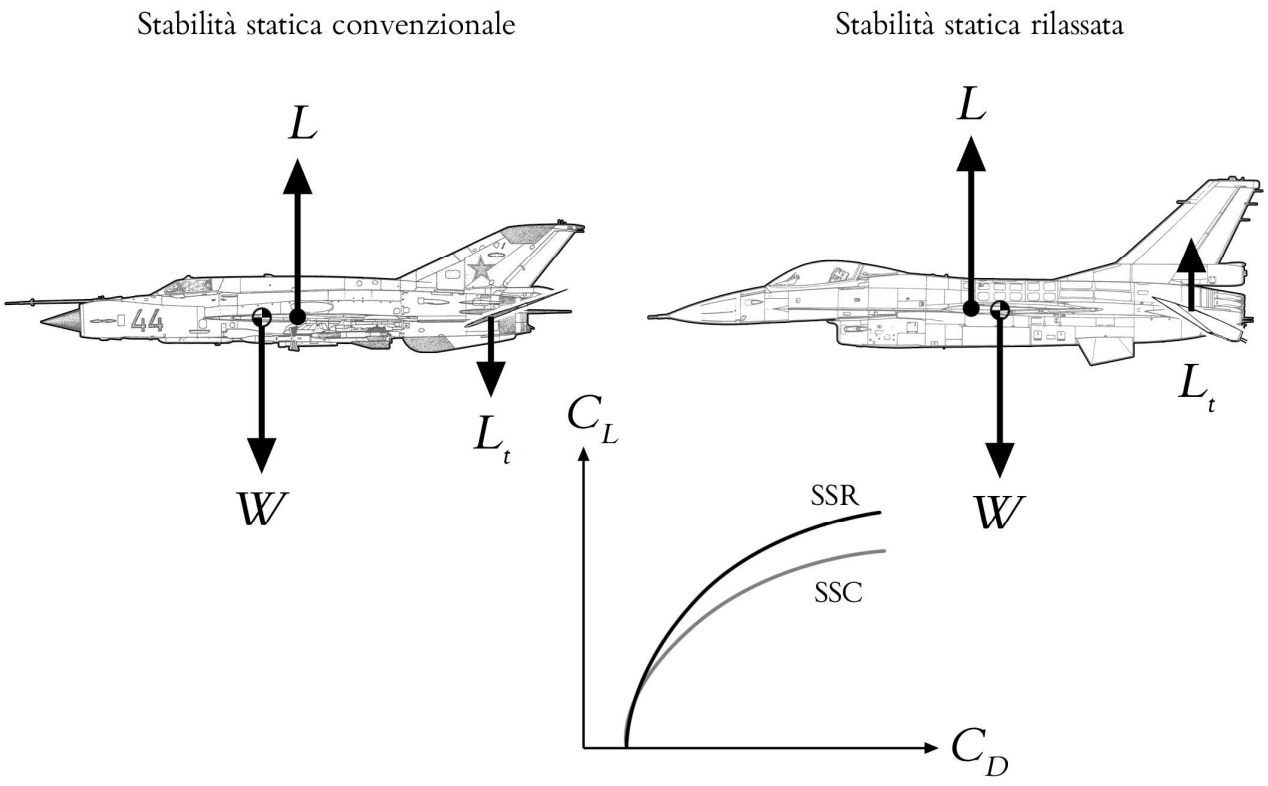


Figura 27

Teniamo presente che a $M > 1$ il c.a. si sposta verso la coda quindi la coda dovrà essere ulteriormente deportante e perciò dovremo produrre una maggiore portanza tramite l'ala per volare in volo sostentato. In una configurazione statica rilassata il baricentro si colloca a valle del c.a., in questo caso la coda ha portanza positiva e quindi contribuisce alla portanza totale del velivolo; per mettere in evidenza questo effetto in figura 27 il vettore L_{WB} nella configurazione a stabilità ridotta è minore di quello nella configurazione convenzionale. In regime subsonico l'F-16 è stabilizzato longitudinalmente mediante opportuni sistemi di aumento di stabilità (dei quali non parliamo). Per concludere osserviamo la relazione fra il coefficiente di momento e l'angolo d'attacco (figura 28) determinata mediante prove in galleria del vento per questo velivolo: notiamo la dipendenza del coefficiente di momento dall'angolo dell'equilibratore e osserviamo come, al di là di variazioni locali, se l'angolo d'attacco è minore di 40° - 50° il coefficiente di momento risulta crescente con l'angolo d'attacco e ciò corrisponde a un $C_{M_\alpha} > 0$. Per angoli d'attacco maggiori di 50° osserviamo come si abbia una notevole stabilità statica ($C_{M_\alpha} < 0$) ciò pone dei problemi alla sicurezza del volo di questo velivolo: il velivolo finisce a questi valori dell'angolo d'attacco in una condizione di stallo da cui di fatto diventa molto difficile uscire poiché elevata stabilità significa ridotta controllabilità; ad $\alpha > 60°$ l'F-16 è stabile, quindi se esiste una condizione di equilibrio a questi valori dell'angolo d'attacco sarà molto difficile uscirne, anche perché l'effetto dell'equilibratore per quegli angoli d'attacco è di fatto trascurabile (osserviamo che indipendentemente dai valori di δ_E le curve sono molto vicine, quindi non solo abbiamo condizioni di volo stabile, ma abbiamo anche una notevole perdita di efficienza dell'equilibratore). L'F-16 è dotato perciò di un limitatore di angoli d'attacco che impedisce al velivolo di raggiungere valori dell'angolo d'attacco superiori a 29° - 30°.

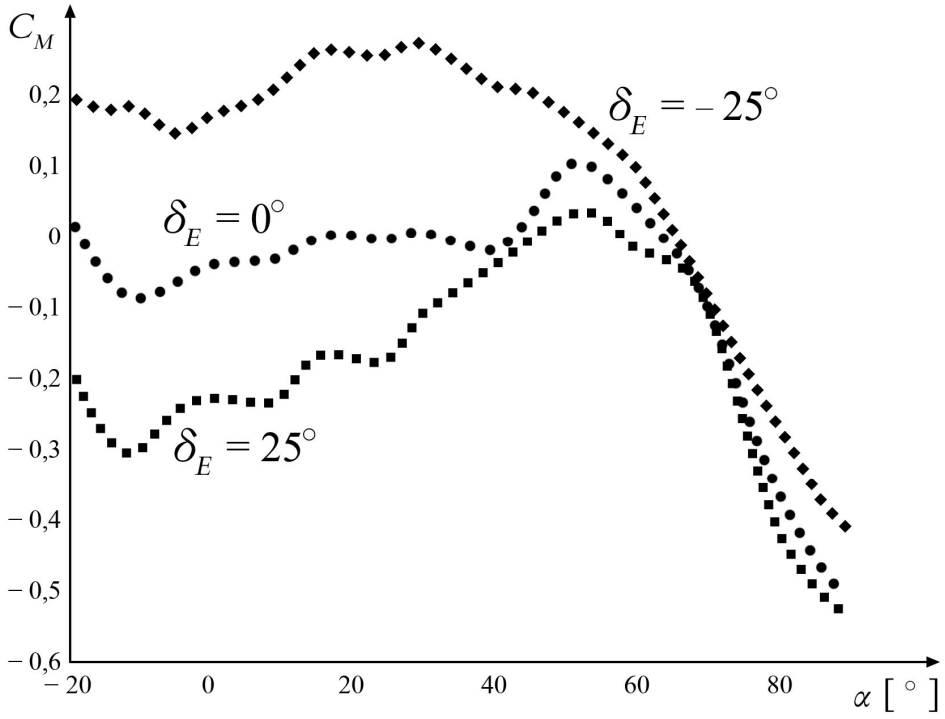


Figura 28

Sui velivoli da trasporto, che operano in regime transonico, esistono dei sistemi detti *Mach trim* che agiscono sia sull'equilibratore che sullo stabilizzatore al fine di generare dei momenti di controllo che equilibrino il momento picchiante e quindi la tendenza ad abbassare il muso che i velivoli manifestano in regime transonico. Esiste inoltre la possibilità (come sul Concorde) di pompare carburante in appositi serbatoi posti in corrispondenza della parte posteriore del velivolo durante il passaggio dal regime subsonico a quello supersonico, con il risultato di spostare a valle la posizione del baricentro mantenendo nei limiti del possibile la costanza del margine statico indipendentemente dal *M*.

Fatta questa distinzione torniamo a parlare degli sforzi di barra considerando solo i sistemi di controllo reversibili, i quali hanno ancora oggi una notevole applicazione negli apparecchi più semplici. Per esprimere il coefficiente di momento di cerniera utilizzeremo il solito sviluppo lineare[10]

$$C_H = C_{H_0} + C_{H_\alpha}\alpha_t + C_{H_{\delta_E}}\delta_E + C_{H_{\delta_t}}\delta_{tr}$$

dove δ_{tr} rappresenta l'angolo di un'altra superficie aerodinamica detta *aletta di trim*: lo scopo dell'aletta di *trim* è quello di annullare lo sforzo di barra del pilota nelle condizioni di volo equilibrato (torneremo su questo punto).

[10] Non si considerano gli alettoni.

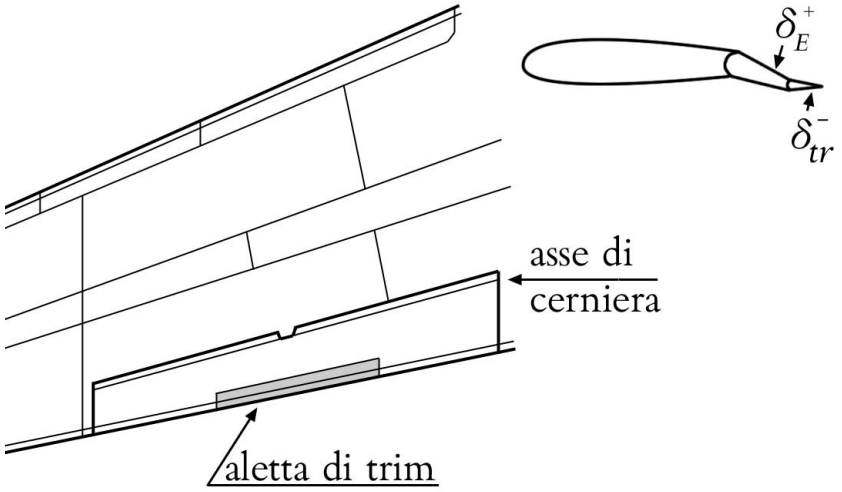


Figura 29

15.7 - STABILITÀ STATICA LONGITUDINALE A COMANDI LIBERI

Finora abbiamo studiato certi requisiti di stabilità nel caso in cui il pilota mantenga le mani sui comandi e quindi le superfici di controllo ed in particolare l'equilibratore conservino le loro posizioni; se è installato un sistema di comando reversibile può accadere che il pilota non eserciti alcun comando (tolga le mani dalla barra di controllo) perciò è necessario analizzare come vari la stabilità statica nel caso di comandi liberi[11]. In questo caso l'equilibratore si disporrà ad un certo angolo di equilibrio[12] che è quello che realizza un valore nullo dello sforzo di barra e quindi un valore nullo del coefficiente di momento di cerniera. Supponiamo, per semplicità, che

$$C_{H_0} = 0$$
$$\delta_{tr} = 0$$ [13]

inoltre a comandi liberi si ha $C_H = 0$ e quindi

$$C_{H_\alpha}\alpha_t + C_{H_{\delta_E}}\delta_E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_{E_{libero}} = -\frac{C_{H_\alpha}}{C_{H_{\delta_E}}}\alpha_t$$

il C_{L_t} sviluppato dall'impennaggio orizzontale di coda in questa situazione è

[11] È indesiderabile un velivolo con perfette doti di stabilità fintanto che il pilota eserciti forza sui comandi, ma che nel momento in cui il pilota tolga le mani dai comandi medesimi abbia un comportamento divergente.
[12] Se non vengono toccati i comandi l'equilibratore è libero di ruotare.
[13] L'aletta di *trim* non è ruotata o non è presente.

$$C_{L_{tlibero}} = \frac{L_{tlibero}}{\frac{1}{2}\varrho_t V_t^2 S_t} = C_{L_{\alpha_t}}\alpha_t + \tau_E C_{L_{\alpha_t}}\delta_{E_{libero}}$$

ossia

$$C_{L_{tlibero}} = C_{L_{\alpha_t}}\alpha_t - \tau_E C_{L_{\alpha_t}}\frac{C_{H_\alpha}}{C_{H_{\delta_E}}}\alpha_t = C_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \tau_E\frac{C_{H_\alpha}}{C_{H_{\delta_E}}}\right)\alpha_t = C'_{L_{\alpha_t}}\alpha_t$$

Osserviamo, nel caso a comandi liberi, che possiamo conservare la formulazione ottenuta a comandi bloccati, poiché basta sostituire il $C_{L_{\alpha_t}}$ con il $C'_{L_{\alpha_t}}$ appena ricavato.

Analogamente, per il coefficiente di momento a comandi liberi

$$C_{M_{\alpha_{libero}}} = C_{L_{\alpha W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ac}}{\overline{c}}\right) + C_{M_{\alpha f}} - \eta_t V_H C'_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right).$$

Uguagliando a zero tale coefficiente determiniamo la posizione del baricentro a comandi liberi detta *punto neutro a comandi liberi*, la cui espressione è

$$\frac{x'_N}{\overline{c}} = \frac{x_{ac}}{\overline{c}} - \frac{C_{M_{\alpha f}}}{C_{L_{\alpha W}}} + \eta_t V_H \frac{C'_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha W}}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)$$

dal punto di vista formale la formulazione rimane dunque simile a quella ottenuta a comandi bloccati. La cosa più interessante è rappresentare la variazione della posizione del punto neutro: la distanza tra x_N (punto neutro a comandi bloccati) ed x'_N (punto neutro a comandi liberi) è

$$\frac{x_N}{\overline{c}} - \frac{x'_N}{\overline{c}} = \frac{\eta_t V_H}{C_{L_{\alpha W}}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)\left(C_{L_{\alpha_t}} - C'_{L_{\alpha_t}}\right) = \eta_t V_H \frac{C_{L_{\alpha_t}}}{C_{L_{\alpha W}}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)\left(1 - 1 + \tau_E\frac{C_{H_\alpha}}{C_{H_{\delta_E}}}\right) > 0$$

che è una quantità positiva ed è pari a circa il 6% della corda. La conclusione è che il punto neutro a comandi liberi è anteriore al punto neutro a comandi bloccati. Questo è importante perché nel determinare il margine statico bisogna verificare la positività sia del margine statico a comandi liberi sia del margine statico a comandi bloccati, perché potremmo trovarci in una situazione in cui abbiamo stabilità statica a comandi bloccati, ma non abbiamo stabilità statica a comandi liberi: pertanto la stabilità statica a comandi liberi rappresenta una condizione più restrittiva rispetto alla stabilità statica a comandi bloccati.

15.8 - STABILITÀ IN TERMINI DI $\frac{dF}{dV}$

Esiste un parametro di stabilità che viene espresso proprio in termini di sforzi di barra che è il parametro di stabilità statica longitudinale più importante dal punto di vista del pilotaggio; tale parametro si esprime in termini della derivata dF/dV e rappresenta la variazione dello sforzo di barra, sempre in condizione di volo equilibrato, al variare della velocità di volo. Questo è il parametro più importante dal punto di vista del pilotaggio in quanto lo sforzo di barra è una grandezza che il pilota è in grado di percepire: il pilota esercita un certo sforzo sui comandi e la variazione di questo sforzo al variare della velocità di volo rappresenta qualcosa che è strettamente legato all'azione del pilotaggio. Ricordiamo che le variazioni dell'angolo dell'equilibratore non sono visibili dal pilota, anche perché, soprattutto ad alte velocità di volo, per equilibrare il velivolo sono necessarie piccolissime variazioni dell'angolo; non approfondiremo in dettaglio l'espressione di questo parametro, dato che la cosa importante è mettere in evidenza da quali grandezze dipenda. Partiamo dalla

$$F = \frac{\delta_E}{l_S \delta_S} H_E = G H_E$$

e cerchiamo di arrivare al legame tra sforzi di barra e velocità di volo; per esplicitare la relazione dobbiamo esprimere la dipendenza del coefficiente di momento di cerniera dalla velocità, il quale si scrive nella forma più semplice possibile (nella ipotesi che $C_{H_0} = \delta_{tr} = 0$) come

$$C_H = C_{H_\alpha} \alpha_t + C_{H_{\delta_E}} \delta_E$$

e quindi

$$C_H = C_{H_\alpha} \left(c_1 + \frac{C_{L_{trim}}}{C_{L_\alpha}} \right) + C_{H_{\delta_E}} \left(c_3 + c_4 C_{L_{trim}} \right)$$

dove

$$C_{L_{trim}} = \frac{2 W/S}{\varrho V_{trim}^2}$$

nella quale compare il coefficiente di portanza di volo stabilizzato. Dobbiamo tener presente che esiste una dipendenza dall'inverso del quadrato della velocità o meglio dall'inverso della pressione dinamica, allora possiamo scrivere

$$C_H = c_5 + \frac{c_6}{\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2}$$

dove non interessa dare un valore alle costanti. Sostituiamo questa espressione in quella dello sforzo di barra e otteniamo

$$F = G\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2 S_E c_E \left(c_5 + \frac{c_6}{\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2} \right)$$

che possiamo scrivere in forma compatta come

$$F = A + B\left(\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2\right)$$

dove A e B avranno un'opportuna espressione che non interessa determinare. Se avessimo fatto tutti i passaggi avremmo verificato che in condizioni normali $A > 0$ e $B < 0$, in modo tale che se tracciamo un grafico F-V (in condizioni di volo equilibrato) un andamento qualitativo è il seguente

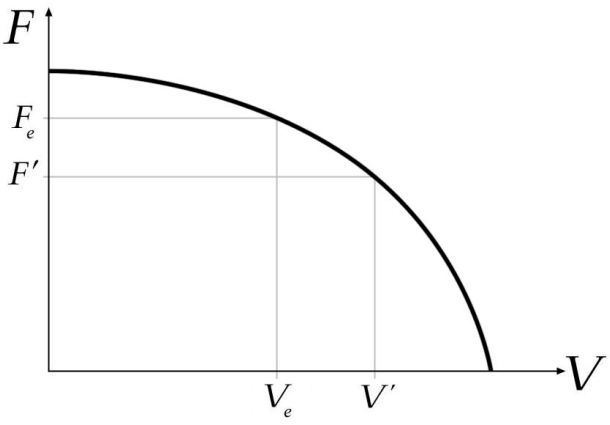


Figura 30

tanto più è bassa la velocità di volo tanto maggiore è la forza positiva che il pilota deve esercitare sulla barra di controllo per equilibrare il velivolo. Per equilibrare condizioni di volo a valori più elevati della velocità, il pilota deve muovere la barra in avanti esercitando uno

sforzo negativo. Quella rappresentata nel grafico è una condizione di stabilità positiva perciò quando si parla di stabilità in termini di forza F la stabilità è positiva quando $\frac{dF}{dV} < 0$ e questo è anche confermato dalla derivata dell'espressione $F = A + B\left(\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2\right)$ dello sforzo di barra

$$\frac{dF}{dV} = B\varrho V < 0 .$$

Osserviamo come (fatto importante dal punto di vista del pilotaggio) la derivata sia proporzionale alla V il che significa che a bassa velocità la derivata è piccola e diventa più grande ad alta velocità, ovvero tanto maggiore è la velocità dell'apparecchio tanto maggiore dovranno essere gli sforzi di barra necessari per passare da una condizione di equilibrio ad un'altra (questo fornisce anche una percezione della velocità di volo).

Un altro aspetto interessante riguarda l'interpretazione fisica di questo criterio di stabilità che finora è solo una condizione analitica: supponiamo di essere in volo ad una V_e in corrispondenza della quale stiamo applicando la forza positiva F_e; se si verifica una variazione di velocità (ad esempio per una perturbazione) positiva ΔV, la nuova velocità richiede per l'equilibrio uno sforzo di barra F' la quale è minore di F_e. Supponiamo allora di continuare ad applicare lo stesso sforzo F_e sulla barra: poiché lo sforzo richiesto per l'equilibrio della nuova condizione di volo sarebbe minore di quella che si esercita è come se vi fosse una forza positiva non equilibrata sulla barra che produce una rotazione verso l'alto dell'equilibratore e quindi un comando di cabrata, un comando che riduce la velocità, la quale tende a tornare nelle condizioni iniziali di equilibrio.

Il discorso che stiamo facendo si completa ricordando che per quanto riguarda le prescrizioni regolamentari dal punto di vista del pilotaggio deve essere

$$\left|\frac{dF}{dV}\right| > 1 \ \frac{\text{lb}}{\text{kt}}$$

ciò per mettere in evidenza che questo parametro è fondamentale per quanto riguarda la sensibilità del pilota: se la derivata è troppo bassa il pilota non è in grado di percepire in modo opportuno variazioni della velocità di equilibrio. L'ultima cosa che dobbiamo evidenziare a questo proposito riguarda le alette di *trim*, le quali sono sempre presenti su velivoli con sistemi di controllo reversibili e sono spesso presenti su velivoli con sistemi di controllo irreversibili; nel primo caso la loro azione è interpretabile in modo diretto: l'aletta di *trim* viene comandata dal pilota (in genere per mezzo di un volantino) il quale agisce su questo organo in modo da portare a zero lo sforzo di barra nelle condizioni di volo stabilizzato; in

questo modo, durante la crociera, il pilota non deve esercitare uno sforzo costante sulla barra, ma una volta che il velivolo è stato stabilizzato alla velocità desiderata si regola l'aletta di *trim* in modo che venga mantenuto, in quella condizione, uno sforzo di barra nullo. Perciò variare l'angolo dell'aletta di *trim* significa agire sulla nostra equazione in modo che per una certa velocità di volo

$$\vec{F} = 0 \qquad \text{per} \qquad \delta_{tr} = \overline{\delta}_{tr}$$

dalla $F = A + B\left(\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2\right)$ osserviamo che per avere $\vec{F} = 0$ dovrà essere

$$B = \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2}$$

quando abbiamo un piano di coda orizzontale che ha un'aletta di *trim*, nel momento in cui questa condizione è soddisfatta, A dipende dal margine statico a comandi liberi (questo non lo dimostriamo); vediamo come si modifica il grafico F-V quando l'aletta di *trim* è ad un angolo diverso da zero

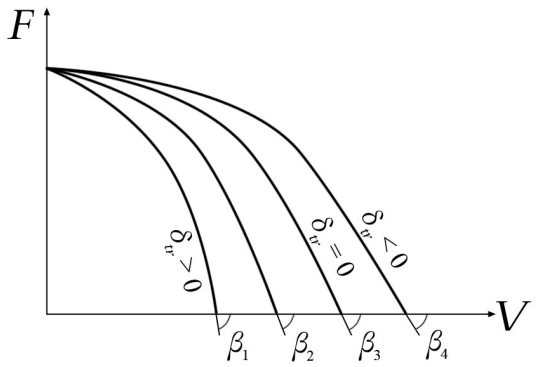


Figura 31

osserviamo che nel caso in cui $\delta_{tr} = 0$ (figura 30) vi è un'unica velocità di volo per la quale $F = 0$: se voliamo a qualunque altra velocità di volo dobbiamo mantenere costantemente una certa azione sulla barra di comando. Man mano che ruotiamo l'aletta di *trim* avremo una famiglia di curve (le curve tracciate sono relative a rotazioni negative dell'aletta di *trim*; la rotazione dell'aletta permette di rendere nullo il momento di cerniera, infatti l'aletta ruota in verso opposto all'equilibratore); per quando riguarda condizioni di volo a bassa velocità l'equilibratore sarà ruotato verso l'alto, mentre l'aletta sarà ruotata in senso opposto. Vediamo che scegliendo opportunamente l'angolo δ_{tr} siamo in grado di volare con $\vec{F} = 0$

per qualunque velocità di volo (ad ogni angolo di rotazione dell'aletta corrisponde un diverso valore della velocità di volo in corrispondenza della quale lo sforzo di barra è nullo).

Ciò presenta un piccolo svantaggio che possiamo mettere in evidenza sostituendo la condizione $B = \dfrac{A}{\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2}$ nella $\dfrac{dF}{dV} = B\varrho V < 0$ ottenendo

$$\frac{dF}{dV} = -\varrho V_{trim} \frac{A}{\frac{1}{2}\varrho V_{trim}^2} = -2\frac{A}{V_{trim}}$$

la derivata è ancora negativa però osserviamo come cambi completamente la dipendenza dalla velocità di volo: senza aletta di *trim* il modulo di dF/dV aumenta all'aumentare della velocità; considerando invece condizioni di volo stabilizzato con aletta di *trim* abbiamo che tanto maggiore è la velocità di volo tanto minore è il modulo della derivata[14] e questo è certamente uno svantaggio, poiché è come se all'aumentare della velocità rendessimo il pilota meno sensibile agli effetti degli sforzi di barra sulla velocità stessa[15]. Quindi bisogna tener presente questo effetto sulla stabilità in termini di forza che è legato alla presenza delle alette di *trim* quando passiamo da una condizione di volo stabilizzato a sforzo di barra nullo ad un'altra.

15.9 - POSIZIONE LIMITE ANTERIORE DEL BARICENTRO

Abbiamo visto come il punto neutro (sia a comandi liberi che a comandi bloccati) costituisca una posizione limite posteriore del baricentro; esiste anche una posizione limite anteriore la cui definizione si può fare in base a diverse considerazioni tra le quali entra in gioco anche lo sforzo di barra. Tra le possibili specifiche ne scegliamo una particolarmente visibile, legata alla massima escursione dell'equilibratore; il problema è quello della stabilizzazione del velivolo a bassa velocità di volo, in particolare al valore massimo del coefficiente di portanza. È conveniente in questo problema lavorare sul diagramma $\delta_{E_{trim}}$ - $C_{L_{trim}}$ raffigurato in figura 32.

Sul diagramma abbiamo riportato una retta verticale la cui intersezione con l'asse delle ascisse fornisce il valore del coefficiente di portanza massimo al quale l'aeromobile può volare; inoltre abbiamo riportato una retta orizzontale la cui intersezione con l'asse delle ordina-

[14] La derivata è rappresentata dagli angoli $\beta_1; \beta_2; \beta_3; \beta_4$ osserviamo come tanto maggiore sia la velocità a cui abbiamo realizzato la condizione di sforzo nullo e tanto minore sarà il modulo della derivata.

[15] Tanto più è grande la velocità tanto più vogliamo che siano grandi le forze da applicare sulla barra per passare da una velocità di equilibrio ad un'altra mentre così abbiamo ottenuto l'effetto opposto.

te fornisce il minimo valore ammissibile per l'angolo dell'equilibratore[16]; abbiamo visto che, nell'ambito delle approssimazioni fatte, la relazione $\delta_{E_{trim}}$ - $C_{L_{trim}}$ è di tipo lineare la cui pendenza è negativa e dipende dal margine statico; in particolare tanto maggiore è il margine statico (cioè tanto più il baricentro si sposta in avanti) tanto maggiore è la pendenza di quella retta.

Vediamo che se il baricentro si trova in x'_{cg} non abbiamo alcun problema a stabilizzare il velivolo al massimo valore del coefficiente di portanza. Supponiamo invece che il baricentro sia più avanzato (quindi il margine statico è aumentato) e si trovi ad esempio nella posizione x''_{cg}: osserviamo come in questo caso per stabilizzare il velivolo al coefficiente di portanza massimo dovremmo ruotare l'equilibratore verso l'alto ad angoli che sono superiori a quelli possibili; quindi non c'è possibilità di stabilizzare il velivolo al massimo coefficiente di portanza e al più, in questa nuova posizione, possiamo realizzare l'equilibrio dei momenti in corrispondenza di un $C''_L < C_{L_{max}}$.

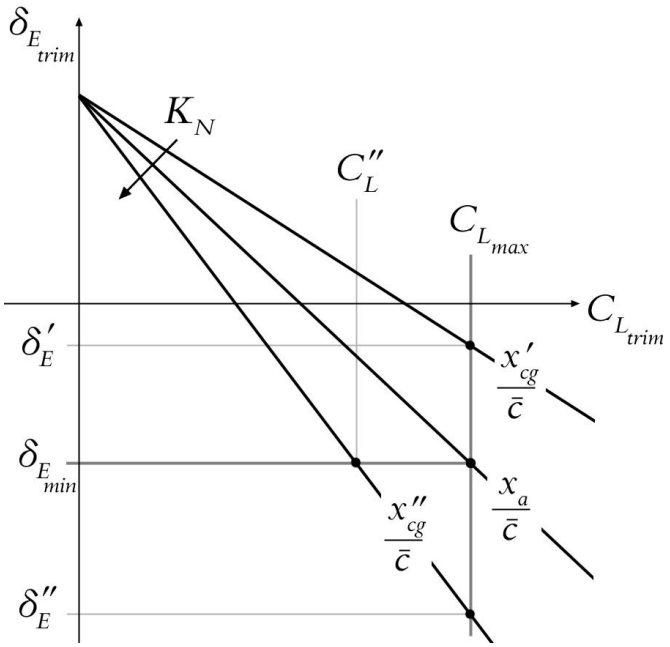


Figura 32

Dunque la posizione del baricentro, in corrispondenza della quale il velivolo viene stabilizzato al $C_{L_{max}}$ per la massima escursione negativa dell'equilibratore, rappresenta proprio la posizione limite del baricentro e la indichiamo con x_a; tale valore è determinato in base alla

[16] Non possiamo ruotare verso l'alto in modo indefinito l'equilibratore, ma ci sarà un angolo massimo possibile, sia perché ulteriori rotazioni renderebbero inefficace quella superficie sia perché esistono delle limitazioni sugli angoli massimi che possono essere realizzati; parliamo di un δ_E minimo perché l'angolo è negativo.

$$C_{M_{trim}} = C_{L_{0W}}\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right) - C_{M_{0f}} + \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(i_W - i_t + \varepsilon_0\right) +$$

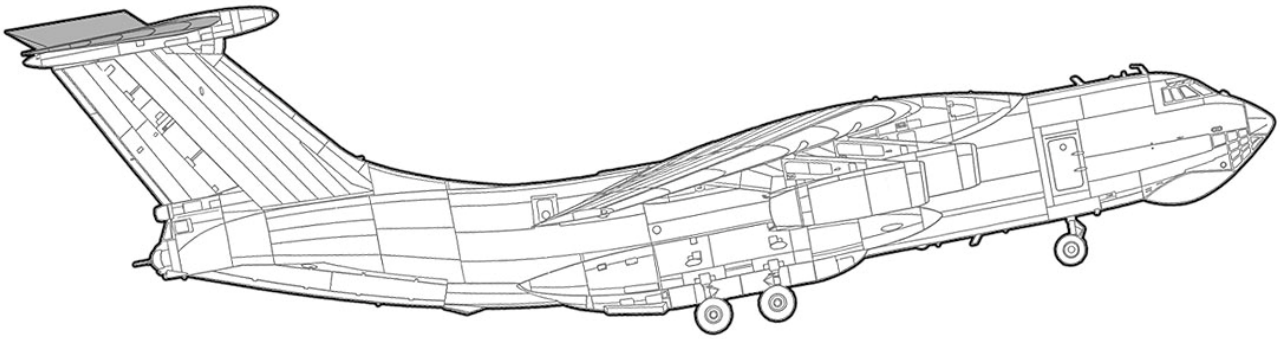
$$+ C_{L_{\alpha W}}\left[\left(\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_{ca}}{\overline{c}}\right) + C_{M_{\alpha f}} - \eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}}\left(1 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0\right)\right]\alpha^\star + C_{M_{\delta_E}}\left(\delta_{E_{trim}}\right)_{min} = 0$$

dove

$$\alpha^\star = \frac{C_{L_{max}} - C_{L_{0W}}}{C_{L_{\alpha W}}}$$

quindi è il valore dell'angolo d'attacco che corrisponde al valore di $C_{L_{max}}$.

Se scriviamo che il coefficiente di momento totale deve essere nullo otteniamo un'equazione nella quale l'incognita è proprio la posizione limite anteriore del baricentro. C'è una condizione nella quale la posizione limite del baricentro è particolarmente critica e nella quale le norme prescrivono venga fatta una verifica; cioè una condizione nella quale la posizione limite anteriore così determinata potrebbe risultare insufficiente (anche se il baricentro si trovasse in quella posizione non riusciremmo ad avere l'equilibrio dei momenti): questa condizione non è il decollo, perché in decollo non siamo mai al coefficiente di portanza massimo anche se molto elevato, ma è la fase di atterraggio: pochi secondi prima che il carrello principale tocchi il suolo il pilota comanda una richiamata. Durante tale manovra l'equilibratore è ruotato verso l'alto mentre lo stabilizzatore è ruotato verso il basso perché dobbiamo aumentare al massimo la deportanza della coda in modo che sia possibile ruotare un po' il muso del velivolo verso l'alto; la cosa importante è che quando si effettua detta manovra l'apparecchio si trova ad una distanza molto ridotta dal suolo e ad una velocità di volo bassa.



Ilyushin Il-76T in atterraggio - Figura 33

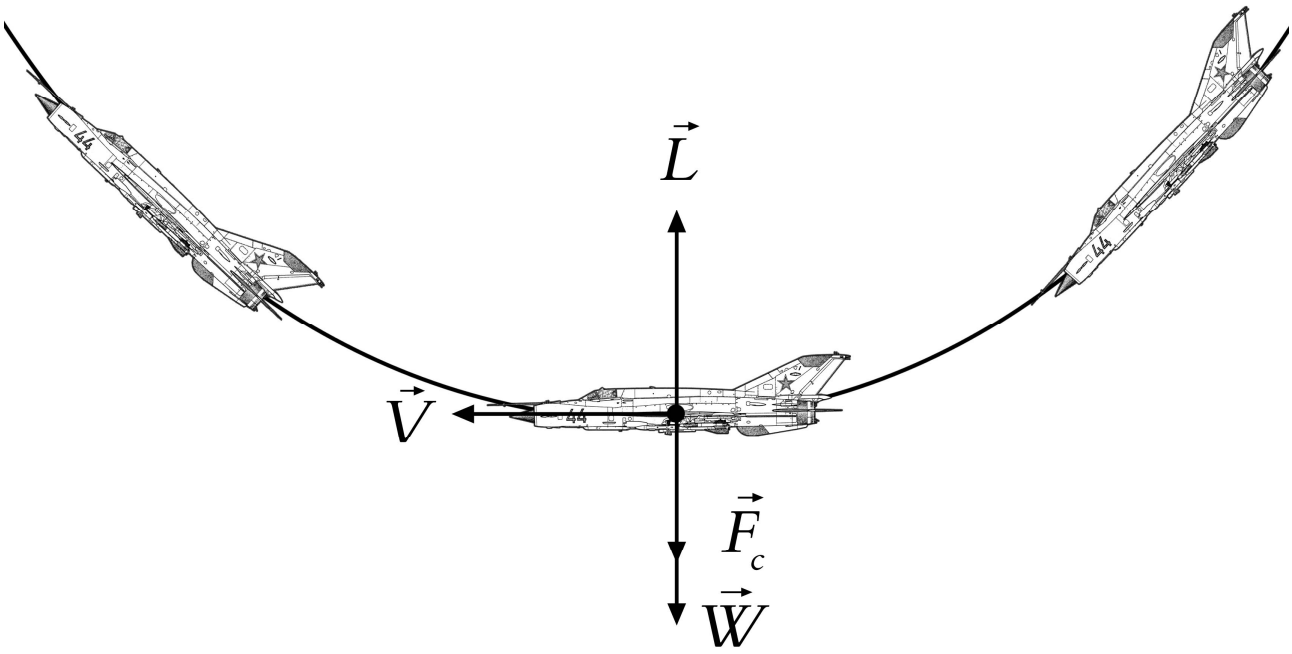
In questa situazione, soprattutto i velivoli di grandi dimensioni in particolare quando sono scarichi, manifestano una certa resistenza ad atterrare[17] perché la resistenza indotta in prossimità del suolo diventa molto bassa e poiché l'angolo di rampa dipende dalla differenza tra spinta necessaria e spinta disponibile, se la spinta necessaria è molto bassa, anche con la spinta al minimo l'aereo non perde quota facilmente; quando si parla di "effetto suolo" oltre alla resistenza indotta intervengono gli angoli di *downwash*: in una condizione normale di volo dobbiamo tener conto della presenza di un angolo di *downwash* che riduce l'incidenza sul piano di coda orizzontale, allora a causa della presenza del terreno piuttosto vicino[18], dobbiamo aspettarci che l'angolo di *downwash* diventi molto piccolo; questo è un effetto negativo non solo quando il problema è quello di stabilizzare il velivolo ad un valore dell'angolo d'attacco che corrisponde al massimo del coefficiente di portanza, ma anche quando bisogna effettuare una richiamata: non basta equilibrare il velivolo, ma dobbiamo anche dare un certo momento che permetta di ruotare il velivolo stesso; se l'angolo di *downwash* si riduce, l'angolo d'attacco in corrispondenza del piano di coda aumenta e questo permette di sviluppare meno deportanza sul piano di coda[19]. L'espressione che abbiamo usato per ricavare la posizione limite anteriore del baricentro dovrà tener conto di un valore molto piccolo, al limite nullo, dell'angolo di *downwash* quando si effettuano verifiche su manovre di questo tipo.

15.10 - STABILITÀ IN MANOVRA

Concludiamo l'analisi della stabilità statica longitudinale studiando uno dei due parametri molto importanti che caratterizzano la stabilità in manovra, ma in particolare rappresentativi della manovrabilità del velivolo per i motivi che vedremo[20].

Consideriamo una manovra di richiamata, ed immaginiamo che effettuando questa manovra il velivolo sia nella parte più bassa della traiettoria

[17] I piloti dicono che il velivolo tende a galleggiare.
[18] Per un aereo di grosse dimensioni il *flare* inizia a circa 50 ft (15 m).
[19] Per l'equilibrio e per il tipo di manovra che dobbiamo effettuare la coda deve essere deportante.
[20] Come al solito c'è una stretta relazione fra stabilità, controllabilità e manovrabilità.



Mikoyan Gurevich MiG-21S - Figura 34

il ventre è in posizione orizzontale, le forze agenti sono il peso, la forza centrifuga e la portanza. Sia δ_{E_e} l'angolo dell'equilibratore e F_e lo sforzo di barra alla velocità V e a $\gamma = 0$; immaginando che la manovra sia stazionaria, possiamo scrivere

$$\delta_E = \delta_{E_e} + \Delta\delta_E$$
$$F = F_e + \Delta F$$

ricordando che durante la richiamata il fattore di carico assume valori maggiori di uno, introduciamo e discutiamo i parametri

$$\frac{\Delta\delta_E}{n_z - 1} \qquad\qquad \frac{\Delta F}{n_z - 1}$$

i quali sono rappresentativi della manovrabilità del velivolo; il primo (che discuteremo in dettaglio) prende il nome di *angolo dell'equilibratore per g*, mentre il secondo prende il nome di *sforzo di barra per g*.

L'*angolo dell'equilibratore per g* rappresenta la variazione che bisogna dare all'angolo dell'equilibratore per volare a fattore di carico maggiore di uno; lo *sforzo di barra per g* rappresenta la variazione dello sforzo di barra per volare a fattore di carico maggiore di uno. È più manovrabile un velivolo che abbia un angolo dell'equilibratore per *g* piccolo, questo perché a parità di fattore di carico tanto più è grande quel parametro tanto maggiore deve essere l'angolo dell'equilibratore che bisogna dare per stabilizzare una condizione di volo a

quel fattore di carico. Maggiore variazione dell'angolo dell'equilibratore significa maggiore variazione del momento di cerniera quindi maggiore sforzo di barra. Si osservi che abbiamo fatto sempre riferimento a condizioni di volo stabilizzato, quindi non parliamo di entrata in manovra, ma dell'angolo dell'equilibratore necessario per mantenere condizioni di volo stabilizzato, ammesso che sia possibile, durante la richiamata.

Vediamo di esprimere l'angolo dell'equilibratore per *g*; per fare ciò dovremo considerare alcuni elementi che non abbiamo mai trattato fino a questo punto, come l'effetto in termini aerodinamici di una velocità angolare. Riscriviamo n_z durante una richiamata e nel momento in cui il velivolo si trovi nella parte più bassa della traiettoria

$$\begin{cases} L = F_c + W \\ n_z = \dfrac{L}{W} = \dfrac{1}{W}(F_c + W) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad n_z = 1 + \frac{V^2}{gr}$$

supponiamo che la manovra avvenga ad angolo d'attacco costante e che il velivolo ruoti con una velocità di beccheggio

$$q = \frac{V}{r}$$

con *r* raggio di richiamata. Quindi possiamo scrivere il fattore di carico in termini di velocità di beccheggio

$$n_z = 1 + \frac{Vq}{g}$$

da cui

$$q = (n_z - 1)\frac{g}{V}.$$

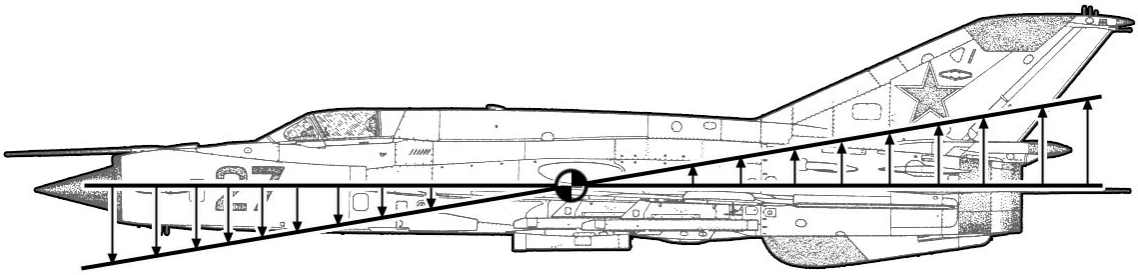
È conveniente servirsi della velocità di beccheggio non dimensionale (apprezzeremo in seguito il vantaggio di usare grandezze non dimensionali)

$$q = \hat{q}\frac{2V}{\bar{c}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \hat{q} = \frac{\bar{c}}{2V}\, q$$

il termine $\dfrac{2V}{\bar{c}}$ ha le dimensioni dell'inverso di un tempo ed in meccanica del volo è l'espressione usuale di un *tempo di riferimento*. Quindi in termini adimensionali diventa

$$\hat{q} = (n_z - 1)\frac{\bar{c}g}{2V^2}.$$

Vediamo qual è l'effetto aerodinamico sul velivolo quando è presente una velocità di beccheggio.



Mikoyan Gurevich MiG-21S - Figura 35

Notiamo come la presenza di una velocità di beccheggio, in termini di velocità indotte dalla rotazione, comporti un campo di velocità di perturbazione sul velivolo in prima approssimazione lineare; la velocità di beccheggio considerata è positiva, quindi il velivolo ruota alzando la parte anteriore ed abbassando quella posteriore; le velocità relative dell'aria rispetto al velivolo sono dunque dirette verso il basso nella parte anteriore al baricentro e verso l'alto nella parte posteriore. L'effetto più rilevante, l'unico che studieremo, è l'effetto di queste velocità di perturbazione in corrispondenza del piano di coda: tale effetto viene rappresentato tramite una variazione dell'angolo d'attacco del piano di coda

$$\Delta\alpha_t = q\frac{l_t}{V}$$

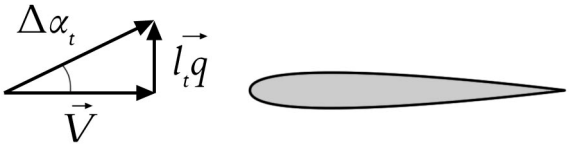


Figura 36

avendo approssimato la tangente con l'angolo perché $l_t q$ è piccolo rispetto a $\vec{V}$; l_t è la distanza fra baricentro e c.a. del piano di coda. In termini non dimensionali

$$\Delta\alpha_t = \hat{q}\frac{2V}{\bar{c}}\frac{l_t}{V} = 2\frac{l_t}{\bar{c}}\hat{q}$$

tale variazione di incidenza fa ovviamente variare il coefficiente di portanza ed il coefficiente di momento. Per velocità di beccheggio positive abbiamo variazioni positive dell'angolo d'attacco sulla coda, quindi variazioni positive del coefficiente di portanza

$$\Delta C_{L_t} = \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \Delta\alpha_t = 2\eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \frac{l_t}{\bar{c}} \hat{q} .$$

Una variazione positiva dell'incidenza sulla coda fornisce una variazione negativa del coefficiente di momento (l'aumento di portanza sulla coda determina un momento picchiante)

$$\Delta C_{M_t} = -2\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \frac{l_t}{\bar{c}} \hat{q}$$

e questo permette di scrivere una derivata aerodinamica fondamentale (di cui parleremo nella stabilità dinamica) che è la derivata del coefficiente di momento rispetto alla velocità di beccheggio non dimensionale

$$C_{M_{t_{\hat{q}}}} = \frac{\partial C_{M_t}}{\partial \hat{q}} = -2\eta_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}} C_{L_{\alpha_t}}$$

questa derivata è negativa e prende il nome di *smorzamento di beccheggio*; inoltre è non dimensionale ed è questo il motivo per cui abbiamo introdotto la q non dimensionale.

Per determinare l'angolo dell'equilibratore per g partiamo dalle equazioni di equilibrio (equilibrio dei momenti e della forza di sostentamento: tutto questo discorso viene fatto con riferimento alla condizione di volo alla stessa velocità V su traiettoria rettilinea); rispetto al volo su traiettoria rettilinea avremo una certa variazione del coefficiente di momento

$$\Delta C_M = C_{M_\alpha} \Delta\alpha + C_{M_{\delta_E}} \Delta\delta_E + C_{M_{\hat{q}}} \hat{q} = 0 .$$

Abbiamo espresso la variazione del coefficiente di momento, legata al fatto che stiamo eseguendo una manovra di richiamata, quindi $\Delta\delta_E$ e $\Delta\alpha$ rappresentano la variazione dell'angolo dell'equilibratore e dell'angolo d'attacco necessari per volare in condizione stazionarie durante la richiamata e parliamo di variazione rispetto ai corrispondenti valori che si hanno su traiettoria rettilinea alla stessa velocità. Il velivolo, durante la manovra, deve essere in condizioni stabilizzate e quindi la variazione del momento deve essere nulla; la precedente costituisce allora la prima equazione di equilibrio. Scriviamo la seconda equazione di equilibrio nella forma

$$\Delta C_L = (n_z - 1) C_{L_{trim}}$$

tale espressione dipende direttamente dalla definizione di fattore di carico: per effettuare la richiamata bisogna sviluppare un coefficiente di portanza che è pari a $(n_z - 1) C_{L_{trim}}$ volte il valore nel volo rettilineo. La precedente diventa

$$\Delta C_L = C_{L_\alpha} \Delta\alpha + C_{L_{\delta_E}} \Delta\delta_E + C_{L_{\hat{q}}} \hat{q}$$

dove il contributo dovuto alla velocità di beccheggio viene in genere trascurato[21]. Abbiamo dunque due equazioni nelle due incognite $\Delta\delta_E$ e $\Delta\alpha$; ricaviamo $\Delta\alpha$ dalla seconda equazione di equilibrio

$$\Delta\alpha = (n_z - 1) \frac{C_{L_{trim}}}{C_{L_\alpha}} - \frac{C_{L_{\delta_E}}}{C_{L_\alpha}} \Delta\delta_E$$

sostituendo questa nella espressione del ΔC_M si ottiene

$$C_{M_\alpha} (n_z - 1) \frac{C_{L_{trim}}}{C_{L_\alpha}} - C_{M_\alpha} \frac{C_{L_{\delta_E}}}{C_{L_\alpha}} \Delta\delta_E + C_{M_{\delta_E}} \Delta\delta_E + C_{M_{\hat{q}}} \hat{q} = 0$$

moltiplicando tutti i termini per C_{L_α} e ricavando $\Delta\delta_E$

$$\Delta\delta_E = \left(C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha} - C_{M_\alpha} C_{L_{\delta_E}} \right) = -\left[(n_z - 1) C_{M_\alpha} C_{L_{trim}} + C_{M_{\hat{q}}} C_{L_\alpha} \hat{q} \right].$$

Tenendo conto della espressione del $\frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_{\alpha W}}}$ (§ 4) e della $\hat{q} = (n_z - 1) \frac{\bar{c} g}{2V^2}$ si ottiene

$$\frac{\Delta\delta_E}{(n_z - 1)} = -\frac{C_{L_{trim}} C_{L_\alpha}}{C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha} - C_{M_\alpha} C_{L_{\delta_E}}} \left(\frac{x_{cg}}{\bar{c}} - \frac{x_{ca}}{\bar{c}} + \frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_{trim}}} \frac{1}{(n_z - 1)} (n_z - 1) \frac{g\bar{c}}{2V^2} \right)$$

consideriamo l'ultimo termine all'interno della parentesi, cioè

$$\frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_{trim}}} \frac{g\bar{c}}{2V^2} = \frac{C_{M_\alpha}}{2mg} \varrho V^2 S \frac{g\bar{c}}{2V^2} = \frac{C_{M_\alpha}}{2m} S\varrho \frac{\bar{c}}{2}$$

[21] L'effetto della velocità di beccheggio si manifesta principalmente sul coefficiente di momento.

e introduciamo il parametro detto densità di massa definito come

$$= \frac{2m}{\varrho \bar{c} S}$$

questo parametro è non dimensionale ed è molto importante quando occorre parametrizzare certi effetti di aerodinamica non stazionaria; dunque l'ultimo termine diventa

$$\frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_{trim}}} \frac{g\bar{c}}{2V^2} = \frac{C_{M_\alpha}}{2}.$$

Possiamo scrivere l'espressione dell'angolo dell'equilibratore per *g* come

$$\frac{\Delta\delta_E}{(n_z - 1)} = -\frac{C_{L_{trim}} C_{L_\alpha}}{C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha} - C_{M_\alpha} C_{L_{\delta_E}}} \left(\frac{x_{cg}}{\bar{c}} - \frac{x_{ca}}{\bar{c}} + \frac{C_{M_\alpha}}{2} \right).$$

Studiamone il segno: $C_{L_{trim}}$ e C_{L_α} sono positivi; per quanto riguarda il denominatore vale quanto già osservato parlando della relazione $\delta_{E_{trim}}$ - $C_{L_{trim}}$ e cioè $C_{M_\alpha} C_{L_{\delta_E}} \gg C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha}$ ed il termine $C_{M_{\delta_E}} C_{L_\alpha}$ è negativo (essendo il coefficiente di momento negativo). In parentesi abbiamo il margine statico, che è negativo, ed il termine $C_{M_\alpha}/2$ che è negativo. Quindi l'angolo dell'equilibratore per *g*, se in una situazione di stabilità statica, è negativo. Infatti se effettuiamo una richiamata stazionaria ad $n_z > 1$ l'equilibratore deve essere ruotato verso l'alto. Abbiamo detto che un piccolo valore di tale parametro sarà un indicatore del fatto che il velivolo presenta una buona manovrabilità: a parità di n_z tanto minore è la variazione richiesta dell'angolo dell'equilibratore tanto maggiore sarà la manovrabilità del velivolo[22]. Notiamo come, a parità di tutti gli altri parametri, una variazione della posizione del baricentro, data una certa configurazione del velivolo, produca una variazione dell'angolo dell'equilibratore per *g* ed è interessante determinare la posizione limite nel baricentro in corrispondenza della quale il parametro che stiamo studiando cambia segno. Il valore di x_{cg} in corrispondenza del quale si annulla il termine fra parentesi è

$$\left.\frac{x_{cg}}{\bar{c}}\right|_{\frac{\Delta\delta_E}{n_z - 1} = 0} = \frac{x_m}{\bar{c}} = \frac{x_N}{\bar{c}} - \frac{C_{M_{\hat{q}}}}{2}$$

[22] Un velivolo che richiede, per esempio, un $\Delta\delta_E = 3°$ per volare con $n_z = 4$ sarà più manovrabile di un velivolo che sempre richiede un $\Delta\delta_E = 10°$; parliamo sempre di condizioni stazionarie.

e tale posizione è detta *punto di manovra*. Osserviamo che lo smorzamento di beccheggio è negativo, quindi il punto di manovra si trova a valle del punto neutro a comandi bloccati.

Riassumendo abbiamo determinato la posizione limite anteriore del baricentro, il punto neutro a comandi liberi, il punto neutro a comandi bloccati e infine il punto di manovra che si colloca a valle del punto neutro

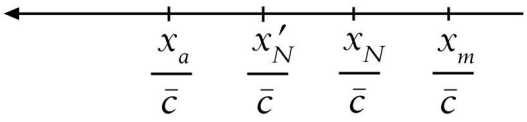


Figura 37

Osserviamo come è possibile avere il baricentro a valle del punto neutro (ed essere quindi in condizioni di instabilità statica) ed avere un angolo dell'equilibratore per g con segno negativo. Osserviamo inoltre che, a differenza di quanto accade per le altre posizioni caratteristiche del baricentro, il punto di manovra dipende dalla quota: la dipendenza dalla quota è nel parametro che ha al denominatore la densità, perciò se h cresce, cresce e quindi $\frac{x_m}{\bar{c}} \rightarrow \frac{x_N}{\bar{c}}$ quindi all'aumentare della quota il *margine di manovra*, definito come

$$\frac{x_N}{\bar{c}} - \frac{x_m}{\bar{c}}$$

decresce e tende a zero.

Concludiamo il discorso ponendo l'attenzione su un punto importante: ricordiamo che tutto quello che abbiamo introdotto vale per condizioni di volo stazionarie. Supponiamo per esempio, che la posizione del baricentro sia tale da essere a valle del punto di manovra e quindi tale da avere un segno invertito dell'angolo dell'equilibratore per g che risulta dunque positivo (ricordiamo che questo parametro per la stabilità deve essere negativo). Questo significa che durante una ipotetica richiamata stazionaria per mantenere costantemente un certo fattore di carico, rispetto alla condizione di volo stazionario, l'equilibratore non è ruotato verso l'alto, ma verso il basso. Questo non riguarda la fase transitoria della manovra, fase che ci fa passare dal volo rettilineo al volo in richiamata. Dal punto di vista pratico ciò significa che se voliamo in volo rettilineo e vogliamo effettuare una richiamata, il comando sarà inizialmente a richiamare (per entrare in richiamata dobbiamo tirare a noi la barra, cioè ruotare verso l'alto il bordo d'uscita dell'equilibratore), ma essendo la posizione del baricentro tale che l'angolo dell'equilibratore per g non è negativo, bensì positivo, raggiunta la condizione stazionaria il comando non è più a richiamare, ma sarà a picchiare.

Capitolo 16

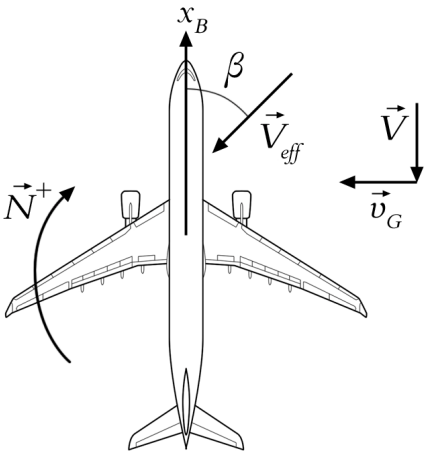
STABILITÀ STATICA LATERO - DIREZIONALE

16.1 - CRITERIO DI STABILITÀ DIREZIONALE: RIGIDEZZA DI IMBARDATA

La stabilità statica latero-direzionale, ai fini della progettazione, è certamente meno importante della stabilità statica longitudinale. Il motivo è principalmente legato al fatto che nel caso longitudinale abbiamo un solo grado di libertà di rotazione, quindi questo caso è ben rappresentato studiando gli effetti di eventuali perturbazioni lungo l'asse di beccheggio; nel caso latero-direzionale invece non è più così: troviamo sempre accoppiate rotazioni di rollio e di imbardata[1]. Quando dunque definiamo parametri che caratterizzino la stabilità latero-direzionale, questi non la rappresenteranno in modo così evidente come accade invece per la stabilità longitudinale; vedremo per esempio che una rigidezza di imbardata positiva, che rappresenta un requisito di stabilità direzionale del velivolo, non garantisce assolutamente la stabilità dinamica latero-direzionale. In breve, ciò che stiamo per enunciare non fornisce informazioni esaurienti come nel caso longitudinale.

Il problema del calcolo della condizione di equilibrio esiste solo in alcune fasi di volo caratteristiche, che sono condizioni di volo non simmetriche.

Fatte queste premesse, parliamo di stabilità direzionale, cioè di azioni che si sviluppano sul velivolo per effetto di perturbazioni del campo aerodinamico riguardanti l'angolo di derapata; le azioni che interessano sono quelle di imbardata e quindi quelle relative all'asse z_B. Consideriamo un aereo in pianta, mettendo in evidenza l'impennaggio verticale di coda.



[1] Questo significa che la rotazione degli alettoni determina sia momenti di rollio che momenti di imbardata, così come una rotazione del timone produrrà momenti di imbardata, ma anche momenti di rollio.

Airbus A332 - Figura 1

Supponiamo che, a causa di una perturbazione (ad esempio una raffica), si sviluppi un angolo $\beta \neq 0$, ad esempio positivo; in questa situazione diremo che il velivolo possiede una stabilità statica direzionale positiva se esso, a seguito della perturbazione sull'angolo di derapata, sviluppa momenti di imbardata che tendano ad annullare β riportando il velivolo nella condizione originaria[2]. Tenendo conto che se l'angolo β di perturbazione è positivo, il momento stabilizzante è orario, quindi positivo, e la condizione di stabilità direzionale si esprime

$$\frac{dN}{d\beta} > 0$$

ed in termini non dimensionali

$$\frac{dC_N}{d\beta} = C_{N_\beta} > 0$$

la derivata aerodinamica C_{N_β} prende il nome di *rigidezza di imbardata*. L'elemento del velivolo che contribuisce principalmente alla generazione del momento di imbardata è l'impennaggio di coda verticale ed in particolare la deriva, che nel caso direzionale ha la funzione analoga a quella dello stabilizzatore nella stabilità longitudinale.

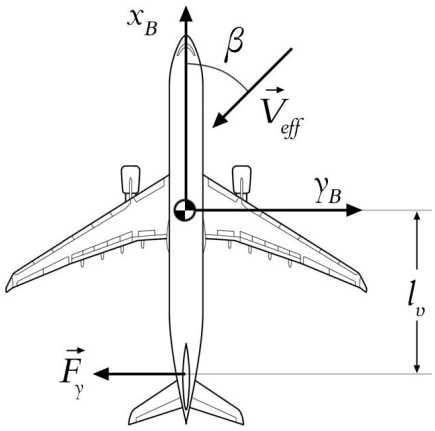


Figura 2

[2] Si dice che il velivolo ruota disponendosi nel letto del vento.

Indichiamo con $\vec{F}_y$ la forza laterale che si sviluppa sull'impennaggio verticale di coda per effetto di un angolo di derapata diverso da zero ed osserviamo come per angoli di derapata positivi si manifesti una forza laterale negativa; questa forza ha l'espressione seguente[3]

$$F_y = -\frac{dL_v}{d\alpha}\alpha_v = -\frac{1}{2}\varrho_v V_v^2 S_v C_{L_{\alpha_v}} \alpha_v$$

dove il pedice v indica la deriva; osserviamo a tale proposito come la pressione dinamica sia scritta con il pedice v per indicare il fatto che questa quantità non necessariamente sarà uguale al valore all'infinito; molto spesso infatti l'impennaggio verticale può trovarsi nella scia di un'elica, come per il caso longitudinale. L'incidenza sull'impennaggio verticale si può inoltre scrivere come

$$\alpha_v = \beta - \sigma$$

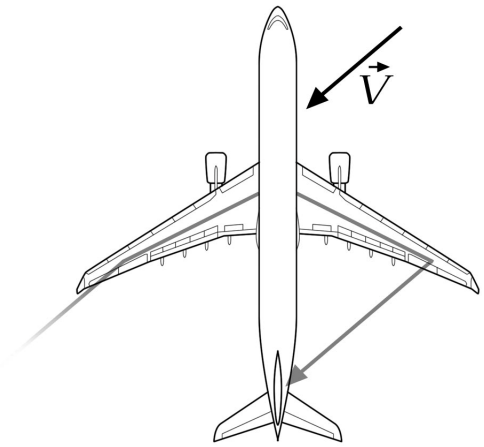


Figura 3

dove σ è detto *angolo di sidewash*: l'angolo d'attacco in corrispondenza del piano di coda non è necessariamente uguale all'angolo di derapata; possono esservi, infatti, velocità indotte in corrispondenza del piano di coda legate alla presenza dell'ala e della fusoliera.

In volo ad angolo di derapata diverso da zero, il sistema vorticoso a staffa sull'ala risulta modificato[4] e perciò il campo di velocità indotte dai vortici sull'impennaggio verticale non sarà simmetrico. Questo determina l'insorgere delle velocità di *sidewash* che modificano l'incidenza in corrispondenza del piano di coda. Anche per quanto riguarda il *sidewash* usiamo un'espressione lineare

$$\sigma = \sigma_0 + \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0 \beta$$

[3] Il segno meno è dovuto sia al fatto che α_v è positivo per β positivo, sia al fatto che all'aumentare di α_v aumenta la portanza laterale della deriva.

[4] Possiamo immaginare che i vortici siano allineati con la corrente all'infinito che investe il velivolo con un angolo di derapata diverso da zero.

tenendo presente che, se il velivolo è simmetrico, $\sigma_0 = 0$ (cioè quando $\beta = 0$ anche l'angolo di *sidewash* è nullo). Dunque l'espressione di F_y diventa

$$F_y = -\left(\frac{1}{2}\varrho_v V_v^2\right) S_v C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right) \beta .$$

Per quanto riguarda il momento di imbardata (positivo per $\beta > 0$) abbiamo

$$N = -F_y \, l_v = \left(\frac{1}{2}\varrho_v V_v^2\right) S_v C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right) \beta \, l_v$$

ed in termini di coefficienti non dimensionali

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S} = -\eta_v \frac{S_v}{S} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right) \beta$$

$$C_N = \frac{N}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S b} = \eta_v \frac{S_v l_v}{S b} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right) \beta$$

dove η_v è l'*efficienza dell'impennaggio verticale di coda* e rappresenta il rapporto tra pressione dinamica su tale superficie e la pressione dinamica all'infinito (in modo analogo a quanto definito nel caso longitudinale). Dalla precedente ricaviamo immediatamente la rigidezza di imbardata

$$C_{N_\beta} = \eta_v \; V_V \; C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right) > 0$$

dove $V_V = \frac{S_v l_v}{S b}$ prende il nome di *rapporto volumetrico del piano verticale di coda*; possiamo scrivere anche

$$C_{y_\beta} = -\eta_v \frac{S_v}{S} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right)$$

ma questa derivata è meno utile.

Abbiamo detto che quello del piano di coda è il contributo più importante alla stabilità direzionale, ma un certo contributo viene fornito anche dall'ala ed in particolare un contributo positivo quando questa abbia un angolo di freccia positivo e un angolo diedro positivo. Più importante del contributo dell'ala è quello fornito dalla fusoliera, ma la sua valutazione non è immediata; diciamo solo che per una configurazione convenzionale la fusoliera fornisce un contributo destabilizzante alla rigidezza di imbardata.

16.2 - CONTROLLO DIREZIONALE: FUNZIONI E REQUISITI DEL TIMONE

Anche nel caso latero-direzionale usiamo, per i parametri che ci interessano, degli sviluppi lineari; per quanto riguarda l'espressione del momento di imbardata possiamo scrivere

$$C_N = C_{N_0} + C_{N_\beta}\beta + C_{N_{\delta_R}}\delta_R + C_{N_{\delta_A}}\delta_A$$

dove δ_R è l'angolo di inclinazione del timone e δ_A è l'angolo di inclinazione degli alettoni. Il contributo più importante allo sviluppo di momenti di imbardata è dato, a livello dei controlli, dal timone

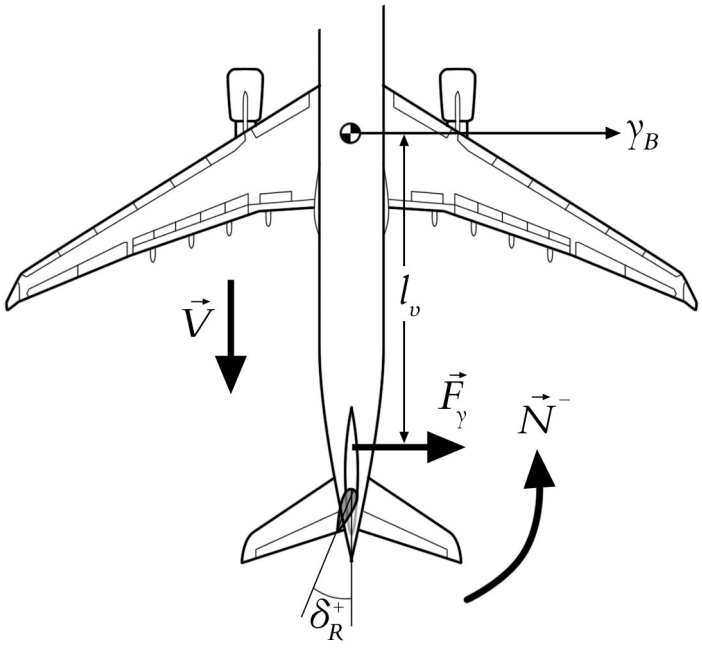


Figura 4

in termini di coefficienti non dimensionali, la forza laterale prodotta dal timone sarà positiva (una rotazione positiva del timone produce una forza laterale positiva) data da

$$C_{\gamma R} = \eta_v \frac{S_v}{S} C_{L_{\alpha_v}} \tau_R \delta_R$$

dove

$$\tau_R = \frac{d\alpha_v}{d\delta_R}$$

e prende il nome di *efficacia del timone*. Dalle precedenti ricaviamo la derivata di controllo

$$C_{\gamma \delta_R} = \eta_v \frac{S_v}{S} C_{L_{\alpha_v}} \tau_R$$

Il momento di imbardata di controllo prodotto da una rotazione positiva del timone è una grandezza negativa (come si vede dalla figura 4), quindi scriviamo direttamente

$$C_{N_{\delta_R}} = -\eta_v \; V_V \; C_{L_{\alpha_v}} \; \tau_R < 0 \, .$$

Dunque l'impennaggio verticale, e in particolare la superficie di controllo rappresentata dal timone, sono elementi molto importanti per il velivolo. L'impennaggio verticale viene dimensionato in fase di progetto, in modo tale che possa rispondere a certi requisiti; non entriamo nel dettaglio di questi requisiti, ma citiamo solo quali elementi intervengano nel dimensionamento del timone. Il timone deve permettere la stabilizzazione di condizioni di volo con spinta non simmetrica; deve permettere di volare ad assetti non simmetrici, quindi con angoli di derapata diversi da zero (come per esempio decollo od atterraggio in presenza di raffiche laterali); deve altresì contrastare azioni di imbardata inversa: come già accennato, quando eseguiamo una virata, le azioni aerodinamiche sulle due semiali possono produrre dei momenti di imbardata che si oppongono alla virata stessa; inoltre il timone è la superficie di governo fondamentale nelle manovre di uscita dalla vite: questo non sarà un requisito di progetto tanto importante per un aereo di linea quanto per un apparecchio ad elevate prestazioni.

Ricordiamo come per i velivoli ad elica esista l'effetto P (si veda § 6.7) che produce un momento di imbardata negativo in fasi di volo ad alto angolo d'attacco: tipicamente un aeromobile ad elica sale con timone a destra per compensare questo effetto.

16.3 - VOLO CON SPINTA ASIMMETRICA

In figura 5 abbiamo un bimotore ad elica con il motore di destra in avaria; la spinta prodotta dall'unico motore funzionante crea una coppia di imbardata squilibrante positiva che sarà equilibrata mediante una rotazione positiva del timone. Il momento squilibrante del motore è dato da

$$N_M = T\,y_M = \eta_P \frac{\Pi_a}{V} y_M$$

che in termini di coefficiente non dimensionale diventa

$$C_{N_M} = \frac{N_M}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S b} = 2\frac{\eta_P \Pi_a}{\varrho V^3 S}\frac{y_M}{b}$$

mentre il momento di controllo dovuto all'angolo del timone è

$$C_{N_R} = C_{N_{\delta_R}} \delta_R$$

dove la derivata di controllo, o potenza di controllo, del timone è negativa. Tracciamo un grafico che in ascisse riporta la velocità di volo V ed in ordinate i due coefficienti C_{N_M} e C_{N_R}.

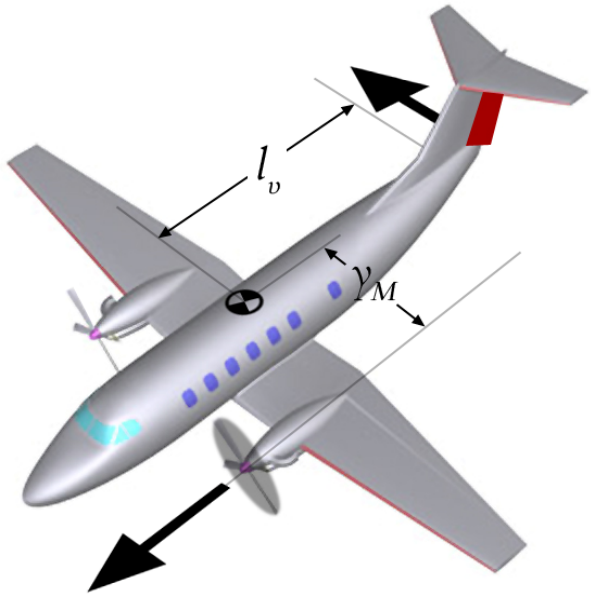


Figura 5

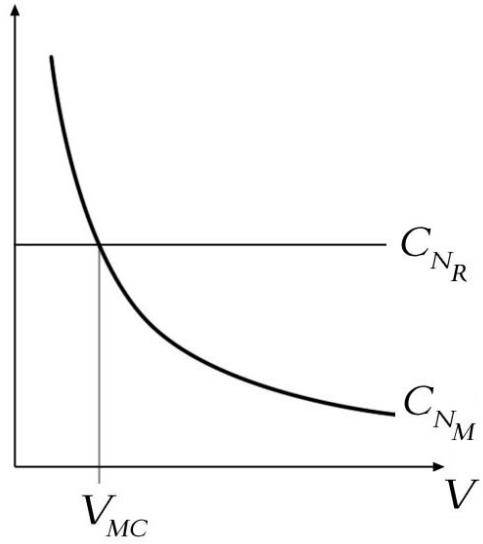


Figura 6

Il coefficiente di momento squilibrante presenta una diminuzione piuttosto rapida all'aumentare della velocità di volo, mentre il coefficiente di momento che gli fa equilibrio non varia al variare della velocità di volo. Osserviamo allora che al di sotto di una certa velocità non v'è possibilità di equilibrare con il timone un momento squilibrante determinato dal motore in avaria poiché la pressione dinamica è troppo bassa e non si riescono a generare azioni aerodinamiche sufficienti; questa velocità è la *velocità minima di controllo* V_{mc} che abbiamo definito trattando la fase di decollo (si veda § 12.1); tanto maggiore è la velocità di volo, tanto più diminuisce il coefficiente di momento squilibrante e quindi aumenta la capacità di generare azioni di controllo.

Nel caso di volo con avaria ad un motore, realizzare l'equilibrio dei momenti di imbardata non è tuttavia l'unico requisito necessario per volare in volo stazionario, giacché occorre realizzare anche un opportuno equilibrio delle forze. Analizziamo di conseguenza in modo più approfondito, ma sempre a livello qualitativo, la condizione di volo con spinta non simmetrica; l'effetto della spinta non simmetrica è quello di produrre un momento squilibrante di imbardata che sarà equilibrato quando si crea un momento di controllo negativo; non è detto, però, che il momento di controllo sia ottenuto solo attraverso una rotazione del timone. Le possibili condizioni di equilibrio sono rappresentate in figura 7 in cui è raffigurato un grafico che riporta il coefficiente di momento di imbardata in funzione dell'angolo di derapata. Questo grafico permette di discutere anche gli equilibri in termini di forze. Osserviamo una famiglia di rette che hanno come parametro l'angolo di rotazione del timone ed analizziamo per prima la retta corrispondente a $\delta_R = 0$. Osserviamo come la pendenza di questa retta sia positiva, poiché rappresenta la funzione $C_N = C_{N_\beta}\beta$ dove C_{N_β}, in caso di stabilità, è una grandezza positiva; osserviamo che le rette corrispondenti a rotazioni positive del timone sono a destra rispetto alla retta relativa a $\delta_R = 0$, in quanto il contributo è quello di un $\Delta C_N = C_{N_{\delta_R}}\delta_R$ dove la derivata $C_{N_{\delta_R}}$ abbiamo visto che è certamente negativa. Una rotazione positiva del timone, a parità di angolo di derapata, produce dunque un incremento negativo del coefficiente di momento di imbardata. Le rette a sinistra sono invece relative a rotazioni negative.

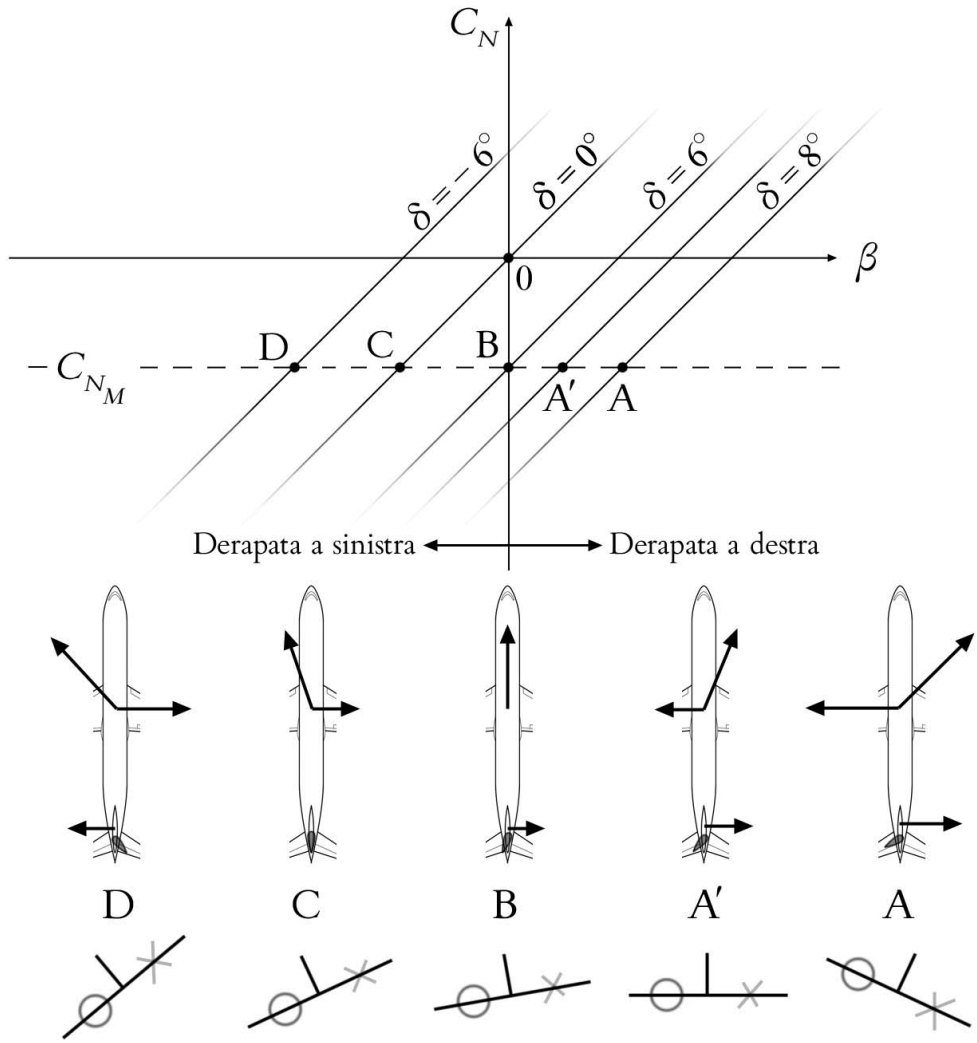


Figura 7

Sul grafico è anche riportata la linea tratteggiata corrispondente al coefficiente di momento squilibrante dovuto alla spinta non simmetrica cambiato di segno; in questo modo le condizioni di equilibrio sono identificate dalle intersezioni tra le diverse rette e la retta tratteggiata (punti A, B, C, D); osserviamo come ciascuno di questi punti rappresenta una condizione di equilibrio di imbardata, quindi rappresenta una possibile condizione di volo che si realizza a diversi valori dell'angolo di derapata, in cui l'equilibrio dei momenti è soddisfatto.

Fra queste possibili condizioni di volo la più importante dal punto di vista pratico è quella corrispondente ad un angolo di derapata nullo (punto B), la quale si ottiene, come già sappiamo, ad un valore positivo dell'angolo del timone (nell'esempio abbiamo $\delta_R = +6°$); in tale condizione di equilibrio il vettore velocità giace nel piano di simmetria del velivolo, il timone è ruotato verso sinistra e tale rotazione del timone non produce solo una coppia, ma anche una forza F_y diretta verso destra (quindi positiva) che viene equilibrata dando un certo angolo di sbandamento all'apparecchio e quindi rollando il velivolo verso sinistra in

modo tale che la forza peso abbia una componente secondo l'asse y_B uguale ed opposta alla forza prodotta dal timone. In conclusione, se si desidera volare ad angolo di derapata uguale a zero con spinta asimmetrica, per realizzare l'equilibrio delle forze bisogna volare con le ali non livellate; questo è il motivo per il quale, quando abbiamo parlato di velocità minima di controllo durante la corsa di decollo, nella sua definizione abbiamo citato il fatto che sono ammessi dalle norme angoli di sbandamento non superiori a 5°. A questo punto è immediato osservare che il motivo per il quale le norme fanno riferimento a condizioni di volo in equilibrio con angoli di derapata nulli[5], è che la condizione di volo con spinta non simmetrica è una situazione complessa (soprattutto per i velivoli dell'aviazione civile); occorre tener conto che in tale situazione la spinta disponibile è fortemente ridotta e la resistenza (ossia la spinta necessaria) tende ad aumentare, poiché l'equilibrio impone rotazioni delle superfici di controllo. Si può dimostrare che $\beta = 0$ rappresenta una condizione di volo di minima spinta necessaria: se voliamo con angoli di derapata diversi da zero possiamo, seppure in un discorso qualitativo, dare per scontato che la resistenza durante il volo risulterà maggiore.

A tale proposito si può notare la differenza fra le dimensioni dell'impennaggio verticale di un bimotore con motori sull'ala e quello di un bimotore con motori prossimi alla fusoliera: nel primo caso occorre equilibrare dei momenti di imbardata che sono maggiori di quelli che si hanno nel secondo caso[6].

Oltre alla condizione di volo che abbiamo appena discusso ve ne sono altre che si differenziano da questa perché $\beta \neq 0$; supponiamo ad esempio che il pilota abbia ruotato il timone dalla parte del motore funzionante, ma di un angolo troppo elevato (punto A). In questo caso l'equilibrio si ottiene per angoli di derapata positivi: sempre ragionando da un punto di vista qualitativo, abbiamo un momento negativo prodotto dalla rotazione del timone e il momento positivo prodotto dalla spinta; il momento prodotto dal timone è però maggiore del momento squilibrante in quanto abbiamo ruotato troppo il timone stesso; se però l'equilibrio è con angolo di derapata positivo la stabilità direzionale del velivolo interviene creando un momento che è concorde con quello della spinta. Quindi anche se abbiamo generato un eccessivo momento di controllo la condizione di volo può essere stabilizzata volando ad angoli di derapata positivi. Tipicamente in una situazione di questo tipo la risultante delle forze aerodinamiche è diretta verso sinistra ed allora, facendo un ragionamento analogo con quello già fatto prima, questa componente aerodinamica viene equilibrata rollando il velivolo verso destra. Tra la condizione di equilibrio B e la A ne esiste certamente una in cui l'angolo di rollio è nullo (punto A'): in tale situazione l'angolo di rotazione del

[5] Si realizzano condizioni di volo in equilibrio anche con ali livellate.

[6] Il motivo più importante per il quale è conveniente la configurazione dei motori sull'ala è che caricando l'ala avremo, in volo, un effetto di riduzione di certe azioni strutturali sull'ala stessa; un altro motivo è la minor rumorosità.

timone e l'angolo di derapata sono tali che la risultante delle forze lungo y_B è nulla e quindi non c'è bisogno di rollare il velivolo.

Osserviamo come possa esistere un equilibrio anche nel caso in cui il pilota mantenga il timone al centro (punto C) ; tale equilibrio deve per forza avvenire ad angoli di derapata negativi: in questo caso abbiamo una coppia aerodinamica positiva equilibrata dal contributo negativo legato alla stabilità direzionale; la risultante delle forze aerodinamiche è diretta verso destra e dunque, per l'equilibrio delle forze, l'aereo sarà rollato verso sinistra.

Un'ultima condizione di equilibrio è quella che corrisponde al caso in cui il pilota ruoti il timone dalla parte sbagliata (punto D): si può ancora mantenere un equilibrio purché il velivolo sia posto ad angoli di derapata negativi molto grandi; a causa dell'alto angolo di derapata negativo la risultante delle forze aerodinamiche è diretta verso destra perciò il velivolo dovrà essere rollato verso sinistra. Questa sarà certamente una configurazione di equilibrio che impone un valore piuttosto elevato dell'angolo di sbandamento.

16.4 - AZIONI DI CONTROLLO DIREZIONALE PRODOTTE DA ALETTONI E SPOILER

Riprendiamo la $C_N = C_{N_0} + C_{N_\beta}\beta + C_{N_{\delta_R}}\delta_R + C_{N_{\delta_A}}\delta_A$ e discutiamo, dal punto di vista qualitativo, il contributo delle altre superfici di controllo del velivolo che partecipano alla generazione di momenti di imbardata, ma che ancora non abbiamo considerato; tra queste sarà certamente presente l'effetto degli alettoni. Una rotazione positiva degli alettoni è tale da ridurre la portanza su una parte della semiala destra e aumentarla su una parte della semiala sinistra. In termini di momento di imbardata avremo l'effetto di una diminuzione della resistenza indotta sulla semiala destra (legata alla diminuzione della portanza) ed un aumento della resistenza indotta sulla semiala sinistra (legata all'aumento di portanza); in altre parole per una rotazione positiva degli alettoni avremo un $\Delta C_D < 0$ nella semiala destra e un $\Delta C_D > 0$ sulla semiala sinistra e quindi vi sarà una variazione negativa nel momento di imbardata. Se azioniamo gli alettoni per effettuare una virata a destra, si sviluppa un momento di imbardata che tende a far imbardare il velivolo verso sinistra; questo effetto rientra tra gli quelli già citati, di imbardata inversa, che avvengono durante una virata e che vengono compensati con una rotazione del timone; tuttavia sugli aerei di grandi dimensioni è importante limitare la rotazione del timone, per non sollecitare la

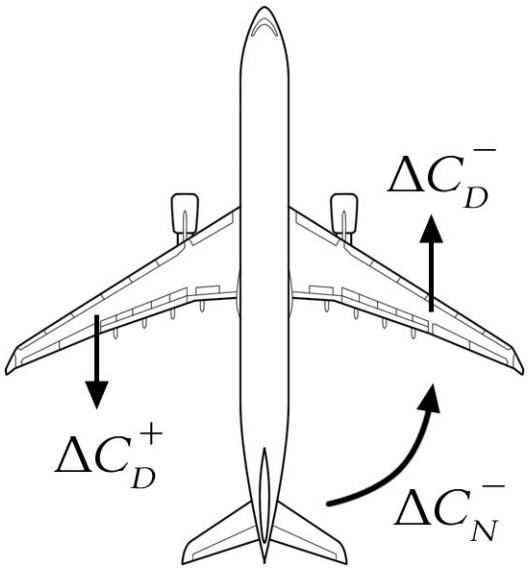


Figura 8

struttura del velivolo applicando delle forze ad una distanza piuttosto grande dal baricentro, perciò notiamo come in tali velivoli l'azione degli alettoni è accoppiata all'azione degli spoiler di manovra: alcune sezioni degli spoiler non vengono usate solo per ridurre la portanza dopo che il velivolo ha toccato terra, ma vengono ruotate, con angoli relativamente piccoli, per favorire l'effettuazione di virate riducendo gli effetti di imbardata inversa; se ad esempio vogliamo virare a destra avremo una rotazione verso l'alto dello spoiler della semiala destra e questa rotazione produce sia una riduzione della portanza e sia un aumento della resistenza; tale aumento di resistenza, legato alla separazione del flusso a valle dello spoiler, permette di generare un momento di imbardata positivo. La rotazione dello spoiler è accoppiata automaticamente al comando degli alettoni.

C'è un ulteriore contributo legato alla generazione di momenti di imbardata che si manifesta su velivoli ad alte prestazioni, in particolare supersonici, i quali possiedono piani di coda *all-moving* con la possibilità di avere rotazioni differenziali: un F-16 ruota i piani di coda sia utilizzandoli come equilibratori (ruotandoli tutti e due verso il basso o verso l'alto) sia in modo non simmetrico per generare delle forze di controllo di rollio. Quando il piano di coda è utilizzato in modo differenziale, si ha una maggiore potenza nella generazione di momenti di controllo di rollio e quando questo accade abbiamo anche un effetto in termini di generazione di momenti di imbardata; se osserviamo lo schema riportato in figura 9, nel quale l'elevone di sinistra è ruotato verso l'alto e quello di destra è ruotato verso il basso per generare momenti rollio positivi, notiamo come nella parte superiore dell'elevone di sinistra abbiamo una regione di velocità più elevata e quindi una zona di bassa pressione, mentre nella parte superiore dell'elevone di destra abbiamo una regione di velocità mediamente più bassa che corrisponde ad un valore maggiore di pressione.

Figura 9

L'impennaggio verticale si trova perciò a lavorare in un campo aerodinamico che non è simmetrico e il fatto che la pressione sia minore a sinistra rispetto a destra produce una coppia di imbardata positiva. Questo può essere un ulteriore esempio di come i gradi di libertà latero-direzionale siano di fatto sempre accoppiati.

16.5 - STABILITÀ LATERALE: RIGIDEZZA DI ROLLIO

Per quanto riguarda la *stabilità laterale* la trattazione può risultare meno intuitiva di quanto accada per la stabilità direzionale; in modo analogo a quanto fatto prima, trattando la stabilità laterale dobbiamo interpretare gli effetti aerodinamici prodotti da una rotazione del velivolo attorno all'asse longitudinale; supponiamo che la rotazione non avvenga attorno all'asse x_B, ma attorno al vettore velocità[7].

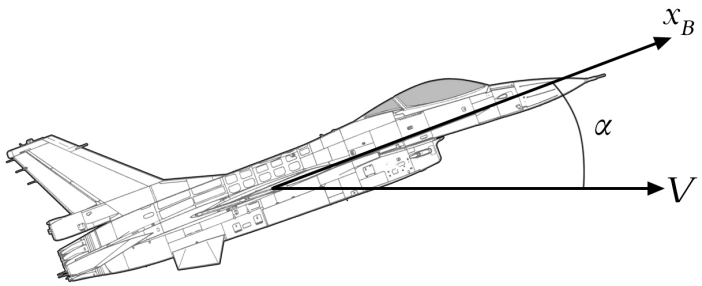


Figura 10

Dal punto di vista aerodinamico nulla si modifica: l'angolo d'attacco si mantiene costante e se l'angolo di derapata era nullo, continua a mantenersi tale. Ciò fa sì che, se consideriamo una causa perturbatrice che fa ruotare il velivolo attorno all'asse longitudinale (che per semplicità consideriamo molto prossimo all'asse vento), per lo meno negli istanti iniziali, gli angoli aerodinamici al primo ordine non subiscono variazioni[8]; quindi sembra che il velivolo non presenti caratteristiche di stabilità positiva o negativa relativamente a rotazioni attorno ad una direzione longitudinale. Tuttavia ci interessiamo alla stabilità laterale e questa si manifesta attraverso un meccanismo che è più complesso di quello visto sino a questo punto per gli altri casi. Questo meccanismo passa attraverso un effetto riguardante la componente della forza peso sulle ali: la situazione iniziale è quella del velivolo che procede con ali livellate (figura 11a).

[7] Cosa che è abbastanza frequente e, su certi velivoli, è voluta, ma nel caso più generale l'angolo tra l'asse x_B e la direzione della velocità è piuttosto piccolo.

[8] Ricordiamo che se gli angoli non variano, forze e momenti aerodinamici non subiscono variazioni.

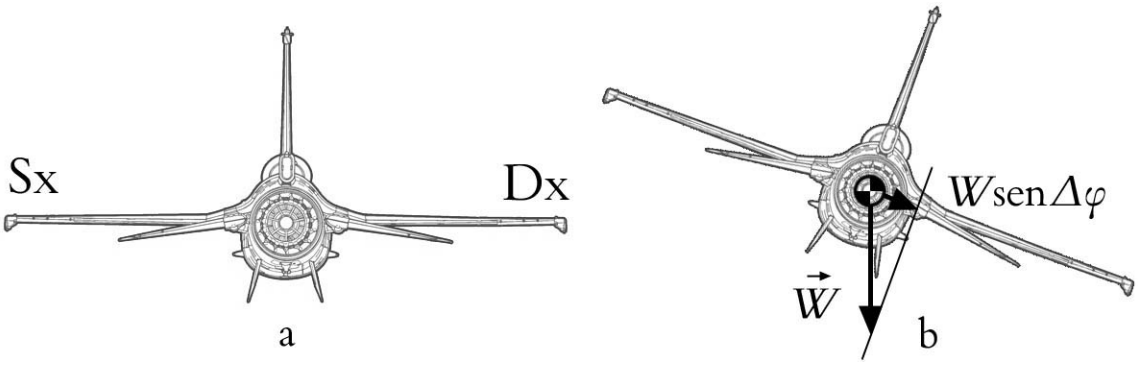


Figura 11

Supponiamo che una qualunque causa abbia fatto ruotare il velivolo verso destra, attorno ad una direzione molto prossima a quella del vettore velocità e perciò non vi saranno variazioni degli angoli aerodinamici. Ma per effetto della rotazione nasce nel sistema di assi corpo una componente del peso non equilibrata, $W\,\mathrm{sen}\,\Delta\varphi$, la quale determina una traslazione laterale dell'aeroplano; il velivolo cioè tende ad acquistare una velocità di perturbazione $\Delta v > 0$ e quindi anche una variazione $\Delta\beta > 0$[9] data da

$$\Delta\beta \approx \frac{\Delta v}{V}.$$

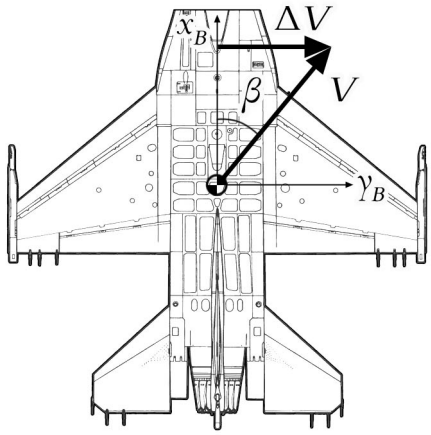


Figura 12

Adesso uno dei parametri aerodinamici risulta diverso da zero e per effetto di tale variazione dobbiamo aspettarci una certa variazione del coefficiente di momento di rollio; quindi, quando parliamo di stabilità laterale, impieghiamo la derivata del momento di rollio (l) o del relativo coefficiente rispetto all'angolo di derapata[10]

[9] Se il velivolo trasla lateralmente sarà investito da vento laterale che produrrà un angolo di derapata.

[10] Verrebbe spontaneo impiegare $\partial C_l/\partial\varphi$, ma abbiamo visto come in realtà, almeno direttamente, una variazione dell'angolo di rollio non provoca alcuna variazione dei coefficienti aerodinamici.

$$\Delta C_l \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial l}{\partial \beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial C_l}{\partial \beta}$$

e tale grandezza prende il nome di *rigidezza di rollio* o *stabilità laterale*.

Vediamo come deve essere il segno della derivata affinché si abbia stabilità positiva: se ad una rotazione positiva è associato un valore positivo di β, il momento che deve essere sviluppato per riportare il velivolo nella posizione originaria è un momento antiorario e quindi negativo; il criterio di stabilità laterale dunque è rappresentato da

$$\frac{\partial C_l}{\partial \beta} < 0 .$$

Non è questo, però, l'unico modo in cui si può interpretare la stabilità laterale. Nella discussione che abbiamo fatto siamo partiti da una perturbazione iniziale che consiste in una rotazione; ridiscutiamo il concetto di stabilità laterale partendo da una diversa perturbazione iniziale ed in particolare consideriamo una variazione dell'angolo di derapata; se siamo in volo con ali livellate ciò che produce una variazione dell'angolo di derapata è tipicamente una raffica laterale, quindi supponiamo che ci sia una velocità laterale del vento $\vec{v}_g$, proveniente ad esempio da destra, che produce un valore dell'angolo di derapata positivo.

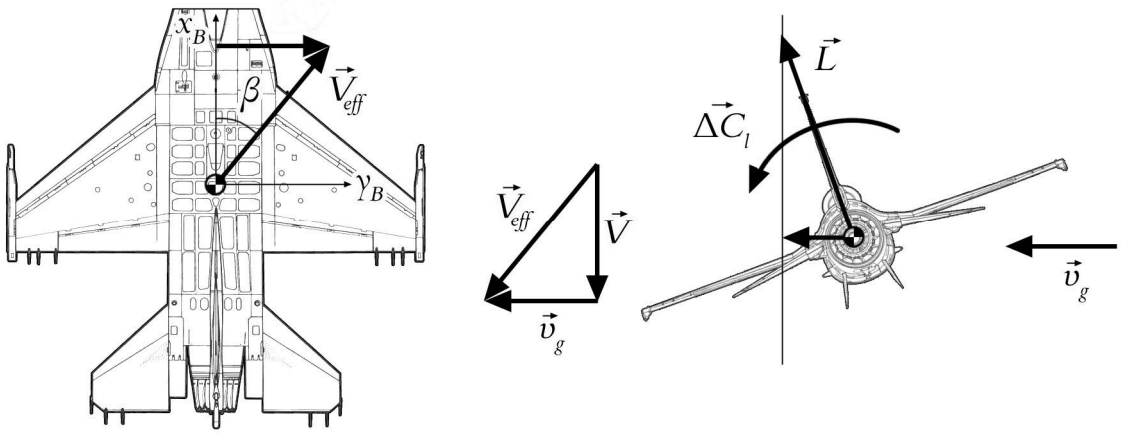


Figura 10

Un comportamento stabile è tale da annullare l'effetto della perturbazione iniziale e questo accade quando l'aeroplano tende a rollare verso sinistra, cioè quando la perturbazione di β produce una variazione negativa del coefficiente di momento di rollio che provoca una rotazione dell'aeroplano tale da far sollevare la semiala sopravvento (che in questo caso è la semiala destra); il fatto che il velivolo abbia rollato produce nel piano orizzontale una componente della portanza che inizialmente non è equilibrata; questa componente di forza determina una traslazione del velivolo verso sinistra quindi si manifesterà una velocità laterale

diretta come la velocità della raffica e tale forza di traslazione laterale riduce la velocità relativa fra apparecchio ed aria. Ripetiamo questa sequenza: l'apparecchio vola inizialmente con ali livellate, viene investito da una raffica laterale da destra e, se la condizione di stabilità laterale è soddisfatta, tende ad alzare l'ala sopravvento, producendo una velocità di traslazione laterale del velivolo che riduce l'effetto della raffica; se il velivolo acquistasse una velocità laterale proprio pari a $\vec{v}_g$ sarebbe come se la raffica non ci fosse e quindi l'angolo di derapata si annullerebbe.

In ogni caso per quanto riguarda la stabilità laterale il criterio è dato da

$$C_{l_\beta} < 0 .$$

16.6 - EFFETTO DIEDRO, CONTRIBUTO DELLA FUSOLIERA, DELLA FRECCIA ALARE E DELL' IMPENNAGGIO VERTICALE DI CODA

Esaminiamo quali siano i contributi di ala, coda e fusoliera al parametro di stabilità C_{l_β}; la parte dell'apparecchio che fornisce il contributo più importante è l'ala quando questa ha un angolo diedro positivo, tanto che la derivata C_{l_β} prende il nome di *effetto diedro*. Quindi studiamo prima di tutto il contributo dell'ala legato alla presenza di un angolo diedro Δ positivo. Immaginiamo di trovarci nella seconda situazione descritta prima, quindi in presenza di una certa velocità laterale relativa v[11]. Teniamo presente che, anche in questo caso, ciò che produce degli effetti di tipo aerodinamico è legato alle componenti di velocità perpendicolari al piano alare, perché componenti tangenziali non forniscono un effetto apprezzabile in termini di forze e momenti aerodinamici; scomponiamo la velocità laterale in una componente v_n perpendicolare al piano alare e una componente v_t tangenziale al piano alare; la componente v_n sulla semiala destra è (l'angolo diedro è generalmente piccolo)

$$|\vec{v}_n| = v \operatorname{sen} \Delta \approx v\Delta .$$

Una componente normale deve produrre una variazione dell'angolo d'attacco; sulla semiala destra avremo

[11] Il velivolo trasla verso destra, oppure viene investito da una raffica da destra.

$$(\Delta\alpha)_{dx} = \frac{v_n}{V} = \frac{v\Delta}{V} \approx \beta\Delta$$

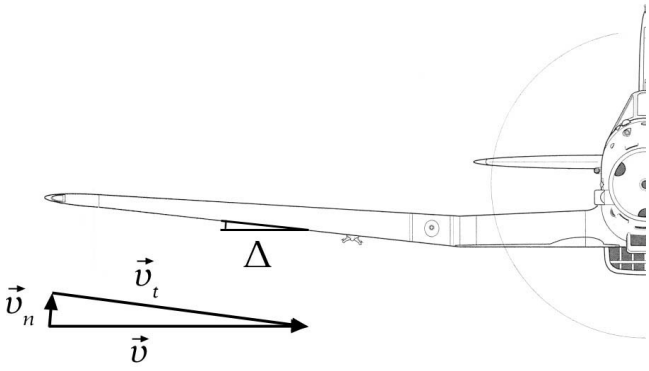


Figura 11

essendo $\beta \approx \frac{v}{V}$ (sempre vero per piccoli valori di v); sulla semiala sinistra le cose si presentano allo stesso modo, ma con segno opposto. Quindi avremo

$$(\Delta\alpha)_{sx} = -\beta\Delta\,.$$

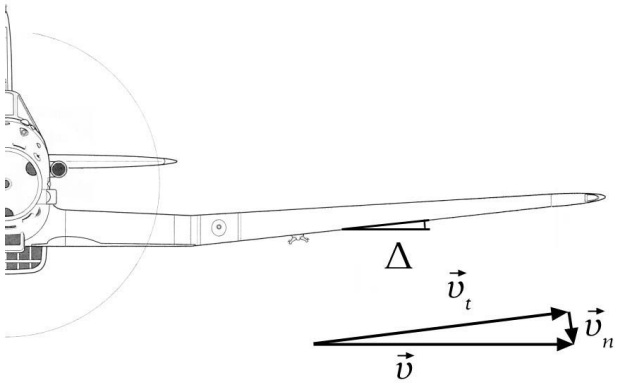


Figura 12

Concludendo, sulla semiala destra conseguiamo una variazione positiva dell'angolo d'attacco e quindi una variazione positiva del coefficiente di portanza, mentre sulla semiala sinistra realizziamo una variazione negativa dell'angolo d'attacco e quindi una variazione negativa del coefficiente di portanza.

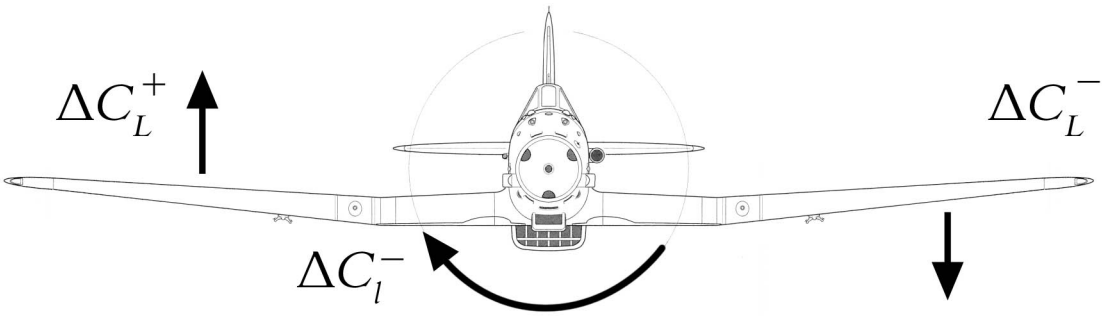


Figura 13

In termini di momento di rollio abbiamo un ΔC_l, che tende a far alzare l'ala sopravvento ed è in questo caso negativo. Quindi il contributo di un angolo diedro positivo alla derivata C_{l_β}, è negativo, come richiesto dal criterio di stabilità laterale. Sulla semiala sinistra la riduzione dell'angolo d'attacco produrrà una variazione negativa del coefficiente di resistenza, e sulla semiala destra l'aumento dell'angolo d'attacco produrrà una variazione positiva del coefficiente di resistenza; in termini di momento di imbardata si sviluppa un momento di imbardata positivo e quindi possiamo citare un contributo di un angolo diedro positivo, meno importante del precedente, stabilizzante in termini di stabilità direzionale poiché $C_{N_{\beta_\Delta}} > 0$.

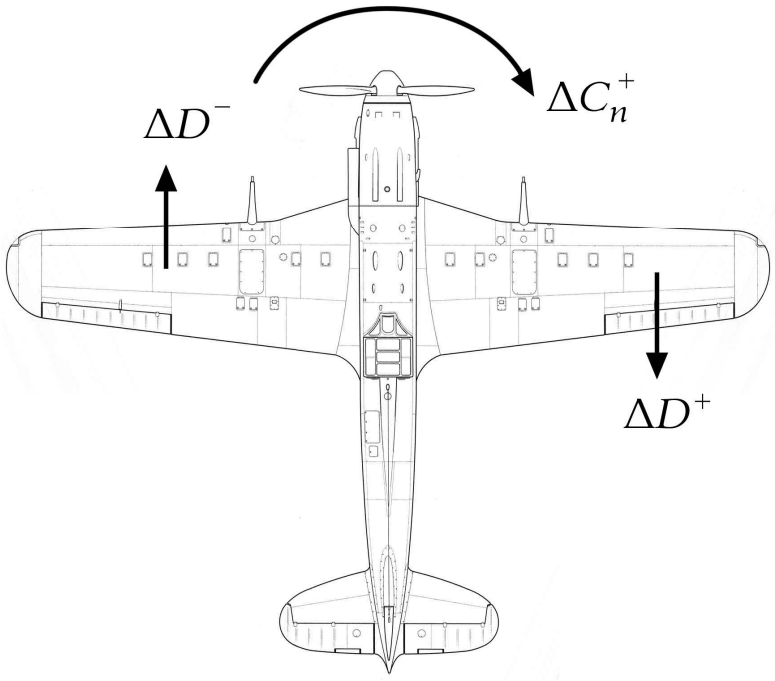


Figura 14

Un altro parametro che contribuisce in un modo importante alla derivata C_{l_β} è l'angolo di freccia dell'ala[12].

[12] Le stesse considerazioni si possono ripetere, in proporzione, per il piano di coda orizzontale, ma appunto, il contributo dell'ala sarà preponderante.

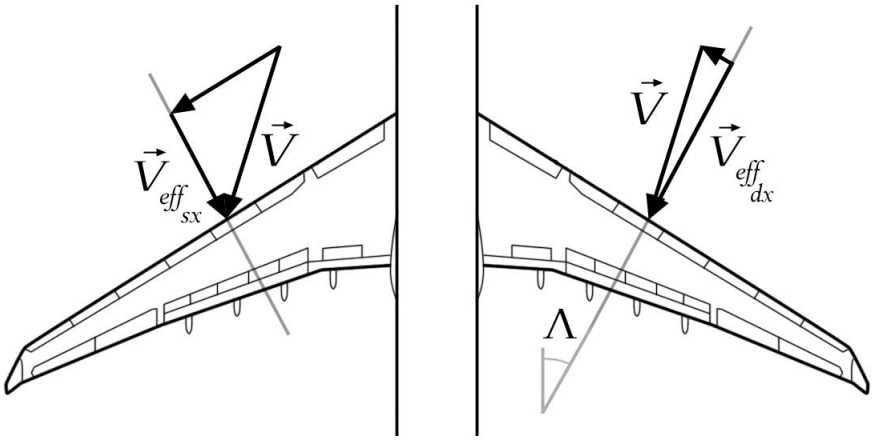
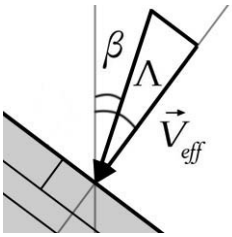


Figura 15

Dimostriamo che la presenza dell'angolo di freccia produce un coefficiente di momento di rollio diverso da zero quando voliamo ad un angolo di derapata diverso da zero, ad esempio positivo: la velocità all'infinito è inclinata rispetto al piano di simmetria del velivolo di un angolo β positivo; scomponiamo V secondo le due componenti, normale e tangenziale al bordo d'attacco, e chiamiamo V_{eff} la componente normale[13].

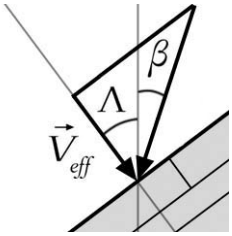
Osserviamo come la V_{eff} sulla semiala destra sia data da

$$\left(V_{eff}\right)_{dx} = V\cos\left(\Lambda - \beta\right)$$



analogamente sulla semiala sinistra abbiamo

$$\left(V_{eff}\right)_{sx} = V\cos\left(\Lambda + \beta\right).$$



[13] Ricordiamo che nel momento in cui dobbiamo esprimere le azioni aerodinamiche sull'ala dobbiamo far riferimento alle componenti di velocità perpendicolari al bordo d'attacco e questo è vero in particolare quando parliamo di effetto della freccia dell'ala; la componente parallela al bordo d'attacco non fornisce contributo a forze e momenti aerodinamici.

Notiamo come $\left(V_{eff}\right)_{dx} > \left(V_{eff}\right)_{sx}$, il che significa che avremo comunque degli effetti aerodinamici più intensi, in particolare un maggior valore della portanza, sulla semiala destra rispetto alla semiala sinistra; perciò, in presenza di un angolo di derapata positivo, avremo un momento di rollio che avrà segno negativo. Il diverso valore della velocità efficace sulle due semiali porterà all'insorgere di un momento di rollio negativo per angoli di derapata positivi, ciò mostra come il contributo alla derivata C_{l_β} della freccia alare sia di tipo stabilizzante.

Analizziamo da quali grandezze dipende l'intensità di questo contributo: consideriamo due sezioni alari, le quali sono disposte mediamente ad una distanza y_i dal piano di simmetria e quindi dal baricentro. Per quanto riguarda il momento di rollio sviluppato solo in quelle sezioni abbiamo

$$L_i = \frac{1}{2}\varrho V^2 \left[\cos^2\left(\Lambda - \beta\right) - \cos^2\left(\Lambda + \beta\right)\right] S_i y_i C_{l_i}$$

cioè[14]

$$L_i = \frac{1}{2}\varrho V^2 S_i y_i C_{l_i} \left[-\operatorname{sen}\left(2\Lambda\right)\operatorname{sen}\left(-2\beta\right)\right]$$

ma β è in genere piccolo e quindi

$$L_i = -\varrho V^2 S_i y_i C_{l_i} \beta \operatorname{sen}\left(2\Lambda\right).$$

Da questa relazione, calcolata per tutta l'ala, potremmo dedurre immediatamente l'espressione di L_β o del relativo coefficiente; osserviamo come C_{l_β} sia negativo, quindi l'effetto sulla stabilità di un angolo di freccia positivo si somma a quello di un angolo diedro positivo. Osserviamo ancora come tale effetto sia tanto maggiore quanto maggiore è il coefficiente di portanza e come tale effetto sia tanto maggiore tanto più grande è l'angolo di freccia. Si precisa che il contributo della freccia non è legato a variazioni dell'angolo d'attacco, ma piuttosto a variazioni di pressione dinamica efficace che non resta la stessa sulle due semiali.

Ricordiamo come un eccesso di stabilità statica non sia necessariamente un fatto positivo, sia perché rende l'aereo meno controllabile, sia perché il velivolo risente maggiormente di azioni esterne; nel caso dell'effetto diedro questo significa che in fase di atterraggio, quando cioè è grande il valore del coefficiente di portanza, se si manifesta una raffica laterale questa tenderà a produrre momenti di rollio che sono tanto maggiori quanto maggiore è la

[14] Ricordiamo che $\cos^2(a) - \cos^2(b) = -\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)$.

derivata C_{l_β}; perciò l'aspetto più sfavorevole nell'avere grossi valori di stabilità statica è quello legato al fatto di avere un'eccessiva stabilità del velivolo alle perturbazioni atmosferiche laterali in fasi di volo ad alto angolo d'attacco, come l'avvicinamento all'aeroporto, quando è necessario invece un controllo molto accurato della traiettoria.

Un altro elemento, effettivamente non molto importante ma comunque presente, che fornisce un contributo alla derivata C_{l_β} è quello dovuto all'impennaggio di coda verticale

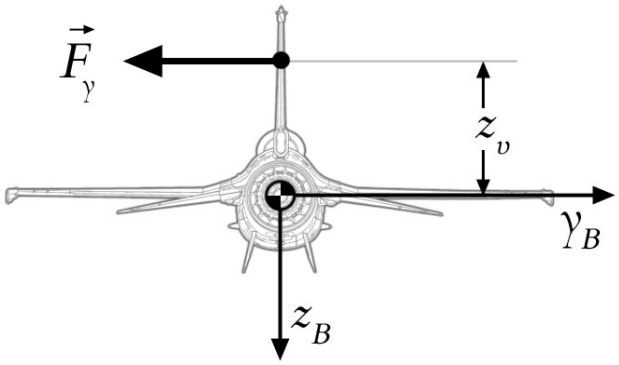


Figura 16

in presenza di un angolo di derapata positivo abbiamo lo sviluppo di una forza laterale diretta verso sinistra e quindi negativa; in termini di coefficienti abbiamo

$$C_y = -\eta_v \frac{S_v}{S} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right)\beta$$

in questo caso dobbiamo calcolare il momento di rollio quindi consideriamo una distanza z_v tra il punto di applicazione della forza aerodinamica sull'impennaggio verticale e il baricentro e scriviamo l'espressione del coefficiente di momento

$$C_l = -\eta_v \frac{S_v}{S}\frac{z_v}{b} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right)\beta$$

quindi

$$C_{l_\beta} = -\eta_v \frac{S_v}{S}\frac{z_v}{b} C_{L_{\alpha_v}} \left(1 - \left.\frac{d\sigma}{d\beta}\right|_0\right)$$

il contributo al C_{l_β} dato dall'impennaggio verticale è negativo, quindi stabilizzante.

L'ultimo effetto che consideriamo è relativamente importante ed è quello legato alla posizione dell'ala rispetto alla fusoliera; anche in questo caso facciamo un discorso qualitativo semplice per interpretare un fenomeno aerodinamico complesso; il contributo della fusoliera alla derivata C_{l_β}, è una conseguenza dell'interazione aerodinamica tra fusoliera e piano alare. Consideriamo per ora una fusoliera isolata e supponiamo che il velivolo trasli verso destra oppure, in modo equivalente, vi sia una velocità v laterale che produrrebbe un angolo di derapata positivo

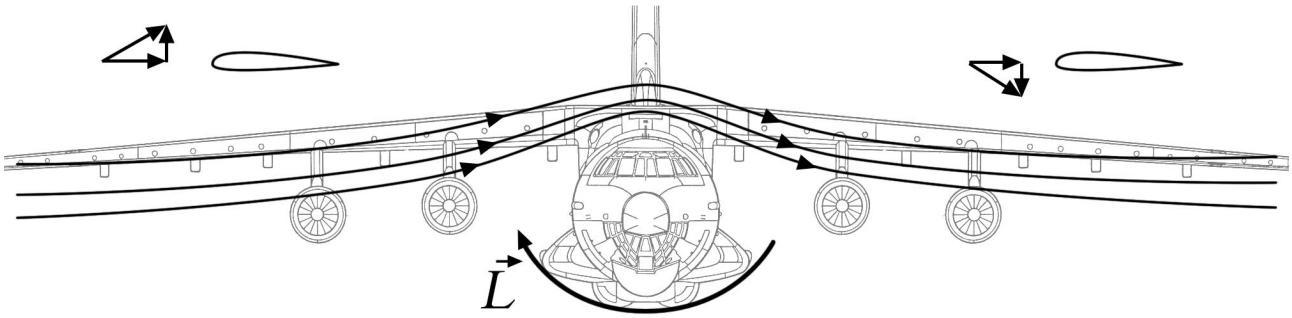
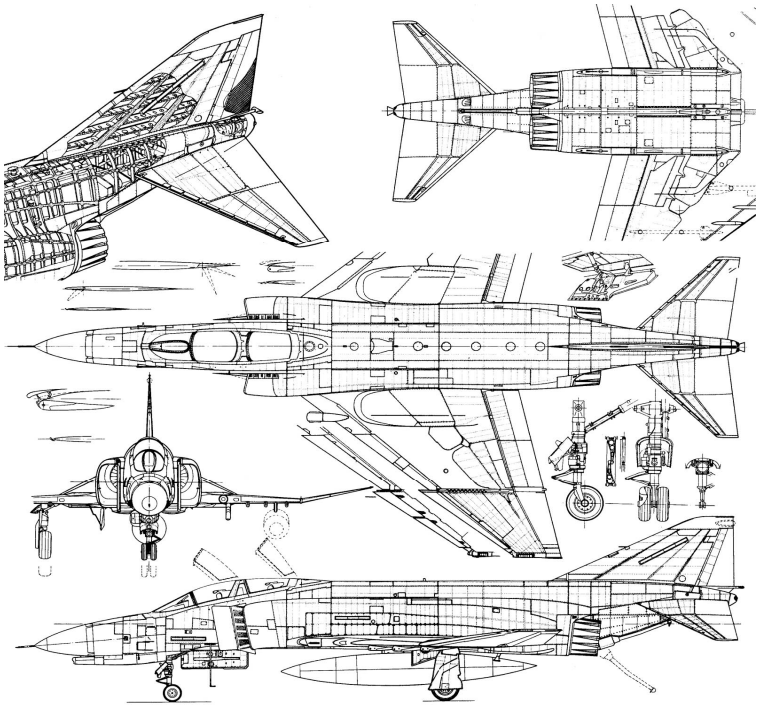


Figura 17

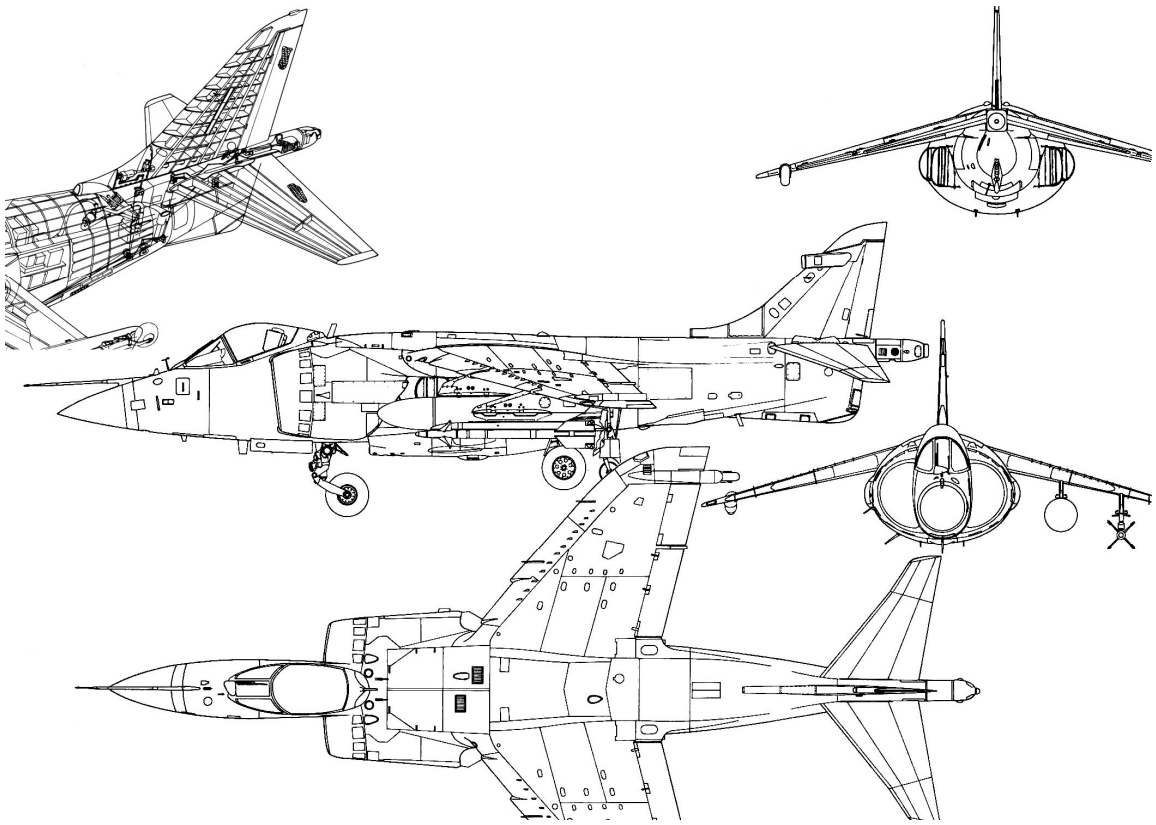
immaginiamo di disegnare le linee di corrente attorno alla fusoliera e supponiamo di porre in questo campo aerodinamico, un piano alare ed in particolare consideriamo una configurazione con ala alta. Osserviamo quali siano gli effetti, in termini di variazioni locali dell'angolo d'attacco, indotti sull'ala dalla presenza della fusoliera. Nella regione della semiala destra si formano componenti di velocità dirette verso l'alto, otterremo quindi verso le regioni in prossimità della fusoliera degli incrementi locali dell'angolo d'attacco. Per quanto riguarda la semiala sinistra l'andamento è opposto: la presenza della fusoliera produce delle componenti di velocità dirette verso il basso e quindi nelle regioni prossime alla radice dell'ala troviamo delle variazioni negative dell'angolo d'attacco. Il risultato è quello di produrre un momento di rollio, funzione dell'angolo di derapata, negativo. Quindi una posizione alta dell'ala rispetto alla fusoliera produce un contributo negativo alla derivata C_{l_β}, e dunque un aumento della stabilità laterale del velivolo. Comprensibilmente, per quanto concerne l'ala bassa, il segno del contributo si inverte e perciò diventa destabilizzante.

Quanto detto aiuta a capire perché alcuni velivoli posseggano angoli diedri positivi e altri negativi. Facciamo qualche esempio.

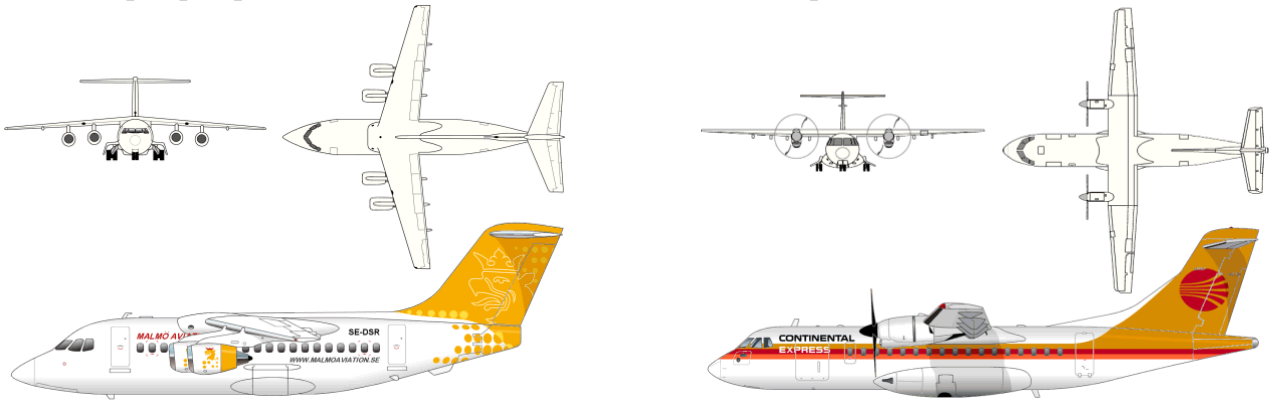


• F-4 Phantom II: è un velivolo degli anni 60' ad ala bassa, dotato di un notevole angolo diedro negativo dei piani orizzontali di coda (anche il piano di coda dà un suo contributo che risente degli effetti di freccia e diedro come l'ala) al fine di non avere un eccesso di effetto diedro positivo delle estremità alari, il cui valore troppo elevato avrebbe limitato, in un velivolo ad alte prestazioni quale un cacciabombardiere, la manovrabilità laterale.

• Sea Harrier: è un velivolo a decollo e atterraggio corto o verticale; osserviamo la forma caratteristica di questo velivolo con ala alta rispetto alla fusoliera e l'evidente angolo di diedro negativo destinato proprio ad evitare un eccessivo valore negativo della derivata C_{l_β} per non avere un'eccessiva stabilità laterale; questo aereo non è supersonico, infatti l'ingombro frontale è molto più grande di quello dei velivoli supersonici, ma un alto ingombro frontale è necessario tenendo presente che il motore deve operare con buone prestazioni anche quando la velocità di volo è nulla (tale velivolo può rimanere fermo in aria come un elicottero) da qui la necessità di avere prese d'aria sufficientemente grandi; inoltre un altro elemento che produce quel grosso ingombro frontale è il fatto che il motore e un sistema opportuno di ugelli deve trovarsi per forza in corrispondenza o in prossimità del baricentro del velivolo; abbiamo infatti un doppio sistema di ugelli posti a cavallo del baricentro in modo tale che nelle condizioni di volo sostentato il velivolo abbia un equilibrio dei momenti prodotti dalla spinta rispetto al baricentro; non possiamo ruotare un getto posto in coda perché non riusciremo mai ad equilibrare il velivolo al beccheggio.



• BA-146 200: è un piccolo quadrimotore a getto le cui principali caratteristiche prevedono la possibilità di atterrare e decollare in spazi limitati e con bassa rumorosità. Sappiamo come con quattro motori vi siano meno problemi nel caso di decollo, quando uno di essi presenti un'avaria ed inoltre vi sono grossi vantaggi relativamente alle emissioni di rumore. La velocità massima di crociera è intorno a $M = 0{,}77$, quindi a metà strada tra un getto convenzionale ed un turboelica. Osserviamo l'ala alta, bassa distanza della cabina dal terreno (si eliminano le scale per la salita), un certo angolo diedro negativo e un angolo di freccia che è un po' più piccolo di quello di un turbogetto da trasporto, ma è comunque elevato.



• ATR 42: si tratta di un bimotore ad elica con ala alta, velocità di progetto di crociera intorno a $M = 0{,}55$, senza angolo diedro: se confrontiamo questa configurazione con quella precedente vediamo subito che la differenza è nell'angolo di freccia.

16.7 - CONTROLLO LATERALE

Scriviamo l'espressione completa del coefficiente di momento di rollio

$$C_l = C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_R}}\delta_R + C_{l_{\delta_A}}\delta_A$$

ma in genere C_{l_0} viene trascurato. Il contributo più importante in termini di controllabilità laterale è quello dato dagli alettoni che sono proprio le superfici di controllo aerodinamico preposte alla generazione di momenti rollio; esprimiamo allora il contributo

$$C_{l_A} = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 C_{L_\alpha}\tau_A\delta_A}{\frac{1}{2}\rho V^2 Sb} 2\int_{y_i}^{y_0} cy\,dy$$

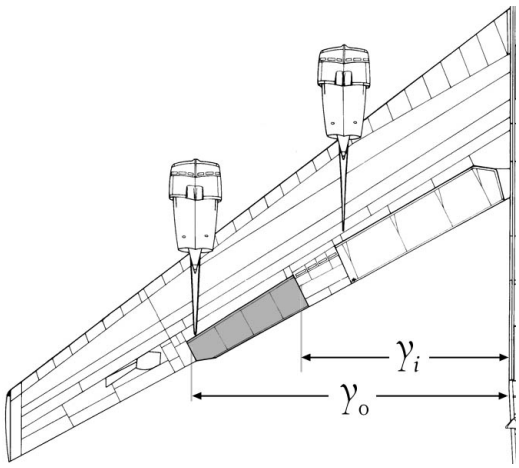


Figura 18

e rappresenta la variazione dell'asse di portanza nulla e dell'angolo di portanza nulla dell'ala per effetto della rotazione degli alettoni; derivando opportunamente siamo in grado di determinare la derivata $C_{l_{\delta_A}}$, detta *potenza di controllo degli alettoni*, che è positiva per una rotazione positiva degli alettoni. Come abbiamo detto, per limitare i problemi di imbardata inversa, in modo congiunto alla rotazione degli alettoni vengono ruotate alcune sezioni degli spoiler, detti spoiler di manovra, che determinano una separazione di flusso parziale a valle dello spoiler riducendo il coefficiente di portanza locale e quindi producendo dei momenti di rollio senza avere quelle variazioni di resistenza legate al problema dell'imbardata inversa.

Ultimo contributo dovuto al controllo laterale è quello legato alla rotazione differenziale dei piani di coda orizzontali, tipica dei velivoli da combattimento supersonici, i quali generano coppie di controllo di rollio e quindi aumento della manovrabilità laterale.

Scriviamo adesso in modo completo l'espressione delle forze laterali

$$C_\gamma = C_{\gamma 0} + C_{\gamma\beta}\beta + C_{\gamma\delta_R}\delta_R + C_{\gamma\delta_A}\delta_A$$

e facciamo due osservazioni: il velivolo è in genere considerato simmetrico e quindi il termine $C_{\gamma 0}$ viene di solito omesso; inoltre una rotazione degli alettoni genera una forza laterale molto piccola che viene di solito trascurata ($C_{\gamma\delta_A} \approx 0$); degli altri due contributi abbiamo già parlato.

Non ci siamo soffermati molto sui diversi aspetti della stabilità statica latero-direzionale, uno dei motivi risiede nel fatto che questi requisiti di stabilità esprimono condizioni relative ad un solo grado di libertà alla volta; ciò comporta che, nel caso longitudinale in genere il fatto che si abbia stabilità statica positiva garantisce che certe condizioni sulla stabilità dinamica siano soddisfatte[15], mentre nel caso latero-direzionale questo non accade: un effetto diedro troppo elevato, in modulo, porta ad instabilità dinamica.

16.8 - VOLO IN DERAPATA STAZIONARIA

Questo problema è relativo ad una condizione di volo stabilizzato e si presenta molto spesso quando occorre mantenere una certa traiettoria in presenza di vento laterale. Questa situazione si presenta tipicamente nelle fasi di volo in atterraggio in presenza di raffiche laterali; in questo caso il velivolo può essere pilotato seguendo due tecniche diverse. In figura 18 è rappresentato un Ilyushin Il-76 (apparecchio da trasporto) che si avvicina ad una testata di pista indicata con la sigla 36[16]; è indispensabile in questa fase del volo mantenere la traiettoria del baricentro allineata con l'asse della pista. Abbiamo un vento da sinistra e per mantenere la traiettoria del baricentro allineata con l'asse pista abbiamo due possibilità. La prima opzione è quella di volare con una rotta opportunamente angolata rispetto all'asse della pista, in modo che la composizione della velocità dell'aeroplano[17] rispetto all'aria, giacente nel piano di simmetria, con la velocità del vento dia una velocità rispetto al suolo che è quella desiderata; si parla in questo caso di avvicinamento in *crab angle*[18] (moto angolato), perché il velivolo, in un certo senso, vola di traverso rispetto alla corrente. Questo caso è simile a ciò che viene fatto durante la navigazione in mare: in presenza di corrente laterale una nave non punta verso la destinazione, ma con un angolo diverso, detto *angolo di deriva*, in modo che la composizione della velocità della nave con la corrente porti sulla rotta desiderata. Su grandi velivoli il pilota è informato sulla direzione del vento, quindi orienta la prua dell'aereo nella direzione voluta tenendo conto della direzione del vento; si noti come l'as-

[15] Quindi un margine statico positivo è una chiara indicazione del fatto che avremo stabilità dinamica positiva.
[16] Sulla testata della pista si indicano le prime due cifre dell'orientamento (36 → 360° → nord).
[17] Quella indicata è la velocità vera, ma potrebbe anche essere una EAS.
[18] Da *crab*, granchio, il verbo *to crab*, muoversi lateralmente.

setto è simmetrico: i comandi sono tutti al centro[19]. L'avvicinamento alla pista fatto con questa procedura comporta anche il fatto che subito prima di toccare terra dobbiamo allineare l'aereo con la direzione della pista altrimenti atterriamo con il carrello non orientato opportunamente e questo richiede la generazione di opportuni momenti di imbardata.

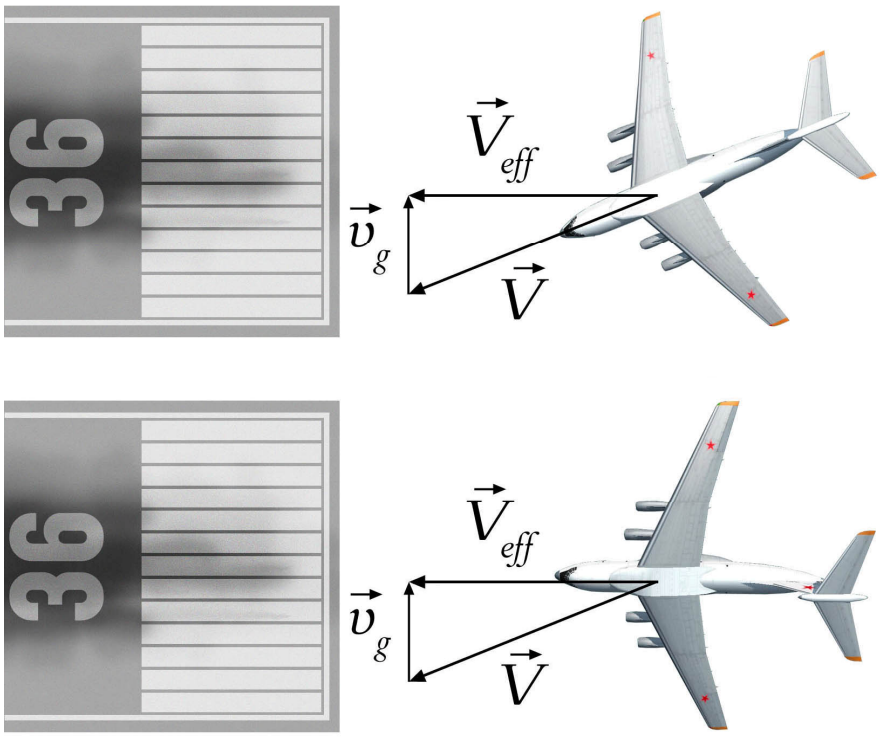


Figura 19

L'altra procedura è quella che riguarda l'avvicinamento con angolo di derapata diverso da zero; in questo caso l'asse longitudinale è orientato secondo la pista, il vettore $\vec{V}$ è diretto come nel caso precedente poiché dobbiamo avere una velocità rispetto all'aria tale che, composta con la velocità del vento, fornisca una velocità rispetto al suolo allineata con l'asse pista. Però in questo caso il vettore della velocità rispetto all'aria non giace nel piano di simmetria del velivolo perciò l'assetto non è simmetrico. L'angolo di derapata negativo dovuto al vento da sinistra è uguale all'angolo di deriva che avevamo nel caso precedente. Il velivolo in questo caso è rollato, sia pure di un angolo sostanzialmente piccolo, dalla parte di provenienza del vento[20] e quindi il timone e gli alettoni hanno angoli di rotazione diversi da zero. In questa situazione non c'è la necessità di produrre un momento di imbardata come nell'avvicinamento in *crab-angle*, ma occorre portare a zero l'angolo di sbandamento subito prima di toccare terra.

[19] Alettoni ad angolo di rotazione nullo.
[20] Dobbiamo avere l'ala sopravvento un po' abbassata rispetto all'ala sottovento.

Molto spesso si usa una tecnica mista: ci si avvicina alla pista in *crab-angle*, che garantisce una condizione di volo simmetrica, e l'ultimo tratto è fatto in derapata stazionaria. Il fatto di volare ad assetto simmetrico (cioè con i comandi latero-direzionali non impegnati) garantisce assenza di vibrazioni ed è quindi una condizione di volo più tranquilla. Gli aeroplani di grandi dimensioni (come il Lockheed C-5) hanno la possibilità di ruotare il carrello in modo che l'apparecchio possa toccare terra anche con l'asse longitudinale non allineato con l'asse della pista, eliminando così il problema dell'imbardata. Nella seconda situazione abbiamo condizioni di volo non simmetriche[21] perciò, se anche non bisogna generare il momento di imbardata prima di toccare terra, ci avviciniamo al terreno in una situazione rollata e questo può creare difficoltà soprattutto per velivoli con grande superficie alare[22].

Anche in fase di decollo si manifestano effetti di momento di rollio e di imbardata, da compensare opportunamente con i comandi: nel caso di decollo con vento laterale, il pilota deve tener conto del fatto che durante la corsa, soprattutto nel momento in cui si stacchi da terra, l'aeroplano sarà soggetto ad azioni legate alla presenza di un angolo di derapata.

Fatta questa premessa, possiamo scrivere le equazioni di equilibrio in condizioni di volo in derapata stazionaria; supponiamo che l'equilibrio longitudinale sia soddisfatto, e occupiamoci solo di equilibrio di forze e momenti latero-direzionali. In termini di quantità non dimensionali, tenendo presente gli sviluppi linearizzati di forze e momenti che abbiamo fin qui discusso, abbiamo

$$\begin{cases} C_\gamma = C_{\gamma 0} + C_{\gamma\beta}\beta_e + C_{\gamma\delta_R}\delta_{R_e} + \dfrac{mg\cos\theta_e \operatorname{sen}\varphi_e}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = 0 \\ C_l = C_{l_\beta}\beta_e + C_{l_{\delta_A}}\delta_{A_e} + C_{l_{\delta_R}}\delta_{R_e} = 0 \\ C_N = C_{N_\beta}\beta_e + C_{N_{\delta_A}}\delta_{A_e} + C_{N_{\delta_R}}\delta_{R_e} = 0 \end{cases}$$

e se lavoriamo in assi di stabilità $\theta_e = \gamma_e$. Abbiamo un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite $\varphi_e \quad \beta_e \quad \delta_{A_e} \quad \delta_{R_e}$; per arrivare ad avere un sistema 3×3 dobbiamo supporre nota una delle incognite; se supponiamo di conoscere l'angolo di rollio, ci riconduciamo ad un problema lineare, la cui soluzione è

[21] Ali non livellate quindi velivolo sbandato, ed impegno dei comandi in modo incrociato.

[22] Non vogliamo trovarci a sfiorare il terreno con l'estremità dell'ala oppure con uno dei motori.

$$\begin{bmatrix} C_{Y\beta} & 0 & C_{Y\delta_R} \\ C_{L\beta} & C_{L\delta_A} & C_{L\delta_R} \\ C_{N\beta} & C_{N\delta_A} & C_{N\delta_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_e \\ \delta_{A_e} \\ \delta_{R_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{mg\cos\theta_e \operatorname{sen}\varphi_e}{\frac{1}{2}\varrho V^2 S} \\ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vediamo un esempio: nel caso di velivolo con vento da sinistra le superfici di controllo sono ruotate come in figura 20.

In genere si impiegano gli angoli

$$\frac{\varphi_e}{\beta_e} \qquad \frac{\delta_{A_e}}{\beta_e} \qquad \frac{\delta_{R_e}}{\beta_e}$$

i quali sono di solito tutti positivi e quindi nell'esempio essendo $\varphi_e < 0$, gli alettoni sono ruotati con angolo negativo ed inoltre avremo il timone ruotato in modo che si mantenga un angolo di derapata negativo. Osserviamo in questo esempio il fatto che l'angolo di sbandamento (o angolo di rollio se non siamo in volo orizzontale), necessario per realizzare questa condizione di volo, è in genere molto piccolo: per un angolo di derapata di 10° si parla di angoli di sbandamento di 1 - 3 gradi; sono invece piuttosto grandi gli angoli del timone e degli alettoni necessari per mantenere questa condizione di volo e ciò comporta un grosso impegno delle superfici di controllo.

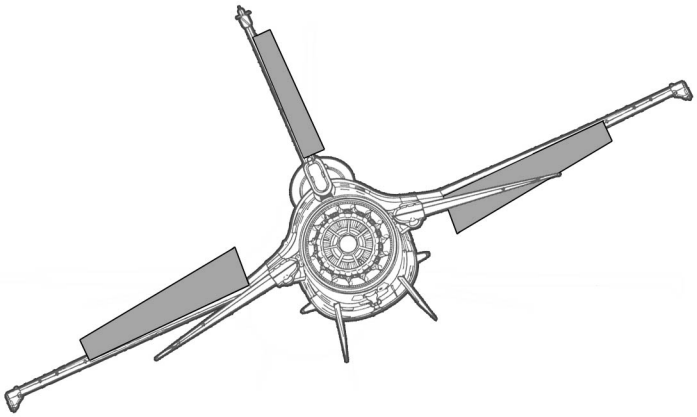


Figura 20

Capitolo 17

INTRODUZIONE ALLA STABILITÀ DINAMICA

17.1 - METODO DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI: LINEARIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI DEL MOTO

Lo studio della stabilità dinamica viene condotto attraverso il *metodo delle piccole perturbazioni*: il sistema delle equazioni del moto si scrive in termini delle variabili perturbate rispetto ad una certa condizione di volo di riferimento, facendo l'ipotesi che le perturbazioni siano piccole rispetto ai valori delle variabili in detta condizione. Il sistema di equazioni del moto del velivolo viene così ricondotto ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie e lineari a coefficienti costanti. Se rimaniamo nell'ambito delle piccole perturbazioni, dobbiamo tener conto che questa tecnica si può applicare solo quando lo scostamento dalla condizione di riferimento sia piccolo[1]. Tale approccio fu applicato ad un velivolo per la prima volta agli inizi del secolo (1904) da un aerodinamico di nome Bryan[2], tanto che il metodo di sviluppo linearizzato delle azioni aerodinamiche sul velivolo prende il nome di metodo di Bryan. Ma un'applicazione efficace del metodo che stiamo per trattare non si è avuta prima della seconda guerra mondiale; il fatto che si sapesse come poteva essere formulato e risolto il problema per molti anni non portò comunque ad una sua estesa applicazione infatti, sia perché esistevano alcuni problemi di tipo pratico di non facile soluzione[3], sia perché non si capiva bene cosa fare una volta effettuata l'analisi di stabilità, cioè non si trovava una corrispondenza diretta tra il risultato dell'analisi di stabilità e quello che si verificava durante il volo del velivolo[4] e solo agli inizi della seconda guerra mondiale venne fuori il problema della stabilità del velivolo.

---

[1] Quindi non possiamo usarla in condizioni di volo ad alta incidenza od in avvitamento, ma in tutte le condizioni di volo in crociera, in salita ed in discesa, questa tecnica fornisce risultati del tutto soddisfacenti.

[2] Nei suoi scritti ritroviamo per molti aspetti quello che stiamo per dire, anche la notazione è esattamente la stessa che usiamo ancora oggi. Già alla fine dell'800' tutti gli aspetti matematici legati all'analisi di stabilità sui sistemi di equazioni linearizzate erano infatti ben note.

[3] Nell'ambito di una analisi di stabilità occorre trovare le radici di una certa equazione algebrica detta polinomio caratteristico del sistema e a quei tempi risolvere questo tipo di problema richiedeva un lavoro abbastanza oneroso.

[4] Per esempio l'aereo dei fratelli Wright rappresentava una configurazione instabile staticamente, per quanto riguardava i moti longitudinali; quella configurazione era certamente instabile anche dal punto di vista dinamico eppure gli aerei dei fratelli Wright erano condotti in volo senza particolari problemi: non era ancora chiaro a quei tempi l'interfaccia con le azioni del pilota, ma i velivoli erano talmente lenti per cui le divergenze dei moti potevano essere controllate facilmente dalle azioni del pilota.

Fatta questa introduzione storica il passo successivo è la linearizzazione delle equazioni del moto applicando appunto il metodo delle piccole perturbazioni. Arriveremo così a scrivere le equazioni del moto in una forma, detta dello spazio di stato, la quale ci semplificherà lo studio della dinamica del velivolo. Le equazioni del moto in forma vettoriale e in un sistema di assi corpo sono

$$\begin{cases} m\left(\dot{\vec{v}}_c + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}\vec{v}_c\right) = \vec{F} \\ \underline{\underline{I}}\dot{\vec{\omega}} + \underline{\underline{\tilde{\omega}}}\,\underline{\underline{I}}\vec{\omega} = \vec{G} \\ \dot{\vec{\Phi}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\vec{\omega} \end{cases}$$

avendo definito il vettore $\vec{\Phi} \equiv \begin{pmatrix} \varphi & \theta & \psi \end{pmatrix}^T$. Nel sistema precedente non compaiono le coordinate del baricentro del velivolo perché non interessa la determinazione della traiettoria, in quanto non interessa la dipendenza dalla quota[5]. Parlare di piccole perturbazioni vuol dire che ogni grandezza che compare nelle precedenti può essere scritta come somma di un valore all'equilibrio, indicato con il pedice *e*, e di un valore di perturbazione della grandezza stessa rispetto al valore di equilibrio, indicata con il simbolo Δ

$$\begin{aligned} \vec{v}_c &= \vec{v}_{c_e} + \Delta\vec{v}_c \\ \vec{\omega} &= \vec{\omega}_e + \Delta\vec{\omega} \\ \vec{F} &= \vec{F}_e + \Delta\vec{F} \\ \vec{G} &= \vec{G}_e + \Delta\vec{G} \\ \vec{\Phi} &= \vec{\Phi}_e + \Delta\vec{\Phi} \end{aligned}$$

inoltre i termini di perturbazione sono tali che i loro prodotti od i loro quadrati possono essere trascurati rispetto alle grandezze del primo ordine.

Il primo problema da affrontare è quello della linearizzazione delle equazioni del moto, il che significa sostituire le grandezze che abbiamo appena scritto.

Iniziamo dalla prima equazione che diviene

$$m\left[\left(\dot{\vec{v}}_{c_e} + \Delta\dot{\vec{v}}_c\right) + \left(\underline{\underline{\tilde{\omega}}}_e + \Delta\underline{\underline{\tilde{\omega}}}\right)\left(\vec{v}_{c_e} + \Delta\vec{v}_c\right)\right] = \vec{F}_e + \Delta\vec{F}$$

[5] Quindi tutto ciò che faremo riguarda situazioni a quota costante, o meglio situazioni in cui le variazioni della quota, dalla quota di riferimento, sono piccole e perciò sono trascurabili gli effetti legati alla variazione di densità.

nell'ambito dell'analisi di stabilità che svolgeremo, faremo sempre riferimento a condizioni di equilibrio in volo simmetrico su traiettoria rettilinea e ciò significa che nel sistema di assi otteniamo

$\vec{\omega}_e = 0$	traiettoria rettilinea
$\varphi_e = \psi_e = 0$	volo simmetrico
$v_e = 0$	volo simmetrico
$w_e = 0$	volo con traiettoria rettilinea

(si faccia attenzione al fatto che v_e è la componente laterale della velocità $\vec{v}_{c_e}$) cioè tutte le variabili asimmetriche sono nulle. In questa situazione le equazioni di equilibrio si scrivono

$$\vec{F}_e = 0$$
$$\vec{G}_e = 0.$$

Queste due condizioni si possono immediatamente dedurre dalle equazioni del moto scritte in una condizione stazionaria con velocità angolare pari a zero. Noi faremo riferimento, nell'ambito dell'analisi della stabilità dinamica, ad una terna di assi di stabilità, che sono gli assi che vengono normalmente usati per questo tipo di applicazioni. Se lavoriamo nella terna di assi di stabilità, abbiamo un certo vantaggio dal punto di vista formale che è immediatamente evidente quando scriviamo il vettore velocità del baricentro nella condizione di riferimento

$$\vec{v}_{c_e} = \begin{bmatrix} u_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e ciò semplifica la forma delle equazioni linearizzate: il fatto di adottare una terna d'assi di stabilità ha come effetto il fatto che la componente w_e della velocità all'equilibrio è per definizione pari a zero, in quanto l'asse longitudinale è allineato nella direzione della velocità. Ricordiamo che all'equilibrio l'angolo d'attacco α_x è nullo se lavoriamo in una terna di assi di stabilità, e questa è una diretta conseguenza dell'espressione della velocità che abbiamo appena scritto. Analizziamo uno per uno i termini della prima equazione che abbiamo modificata: nel primo termine tra parentesi tonde compare la derivata della velocità del baricentro all'equilibrio e tale termine è nullo, in quanto si tratta della derivata di una grandezza

costante[6]; nel secondo termine tra parentesi tonde dobbiamo porre uguale a zero la velocità angolare all'equilibrio in base alle ipotesi formulate ($\vec{\omega}_e = 0$) di condizione di equilibrio che ricordiamolo è una condizione di equilibrio su traiettoria rettilinea. L'equazione diventa allora

$$m\left(\Delta\dot{\vec{v}}_c + \Delta\tilde{\underline{\underline{\omega}}}\vec{v}_{c_e} + \Delta\tilde{\underline{\underline{\omega}}}\Delta\vec{v}_c\right) = \Delta\vec{F}$$

ma l'ultimo termine in parentesi è trascurabile rispetto ai termini del primo ordine e quindi

$$m\left(\Delta\dot{\vec{v}}_c + \Delta\tilde{\underline{\underline{\omega}}}\vec{v}_{c_e}\right) = \Delta\vec{F}$$

che rappresenta la prima equazione di equilibrio linearizzata.

Passiamo adesso alla seconda equazione del sistema, che riscriviamo come

$$\underline{\underline{I}}\left(\dot{\vec{\omega}}_e + \Delta\dot{\vec{\omega}}\right) + \left(\tilde{\underline{\underline{\omega}}}_e + \Delta\tilde{\underline{\underline{\omega}}}\right)\underline{\underline{I}}\left(\vec{\omega}_e + \Delta\vec{\omega}\right) = \vec{G}_e + \Delta\vec{G}$$

e, tenendo conto di tutte le semplificazioni introdotte, trascurando i termini del second'ordine, abbiamo

$$\underline{\underline{I}}\left(\Delta\dot{\vec{\omega}}\right) = \Delta\vec{G}.$$

Osserviamo come sia nella prima che nella seconda equazione linearizzata del sistema, i termini inerziali sono scritti in una forma quasi esplicita, perciò nel momento in cui le esprimeremo in termini delle grandezze scalari, avremo già in forma linearizzata la parte inerziale delle equazioni; la parte più complicata e più lunga è lo sviluppo dei termini a secondo membro, in particolare lo sviluppo delle forze aerodinamiche.

Occupiamoci ora della terza equazione: dobbiamo sviluppare ogni termine in una forma tale che compaia un termine in condizione di equilibrio ed un termine di perturbazione; non facciamo altro che sviluppare in serie di Taylor arrestato al prim'ordine.

Per una generica $f(x)$ avremmo

$$f(x) = f(x_e) + \left.\frac{df}{dx}\right|_e \Delta x$$

[6] I valori all'equilibrio delle variabili sono tutti delle grandezze costanti.

e quindi, ad esempio, per la funzione $f(\varphi) = \operatorname{sen}\varphi$ otteniamo

$$\operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\varphi_e + \cos\varphi_e \Delta\varphi .$$

Applicando tale procedimento alle equazioni cinematiche che dobbiamo linearizzare otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\varphi} = \Delta p + \Delta q \operatorname{sen}\varphi_e \tan\varphi_e + q_e \cos\varphi_e \Delta\varphi \tan\theta_e + q_e \operatorname{sen}\varphi_e \sec^2\theta_e \Delta\theta + \\ + \Delta r \cos\varphi_e \tan\theta_e - r_e \operatorname{sen}\varphi_e \Delta\varphi \tan\theta_e - r \cos\varphi_e \sec^2\theta_e \Delta\theta\end{aligned}$$

ma ricordiamo che la condizione di volo è simmetrica (il che significa $\varphi_e = q_e = r_e = 0$)

$$\Delta\dot{\varphi} = \Delta p + \Delta r \tan\theta_e$$

e questa è la prima equazione cinematica linearizzata. In modo del tutto analogo per le altre due abbiamo

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\theta} &= \Delta q \\ \Delta\dot{\psi} &= \Delta r \sec\theta_e\end{aligned}$$

Non resta che esplicitare i due termini di perturbazione $\Delta\vec{F}$ e $\Delta\vec{G}$: ci occuperemo però solo del termine di forza perché tutto ciò che otterremo può essere esteso in modo del tutto analogo anche al termine di coppia. Per guanto riguarda $\Delta\vec{F}$ sappiamo

$$\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_P + \Delta\vec{F}_T + \Delta\vec{F}_A$$

Per il contributo dovuto alla forza peso ricordiamo che l'espressione non lineare è:

$$\vec{F}_P = \begin{bmatrix} -mg \operatorname{sen}\theta \\ mg \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ mg \cos\theta \cos\varphi \end{bmatrix}$$

quindi i termini di perturbazione ($\varphi_e = 0$)

$$\Delta\vec{F}_{P_x} = -mg\cos\theta_e\,\Delta\theta$$
$$\Delta\vec{F}_{P_y} = -mg\,\text{sen}\,\theta_e\,\text{sen}\,\varphi_e\Delta\varphi + mg\cos\theta_e\cos\varphi_e\Delta\varphi = mg\cos\theta_e\,\Delta\varphi$$
$$\Delta\vec{F}_{P_z} = -mg\,\text{sen}\,\theta_e\cos\varphi_e\Delta\varphi - mg\cos\theta_e\,\text{sen}\,\varphi_e\Delta\varphi = -mg\,\text{sen}\,\theta_e\,\Delta\theta\,.$$

Passiamo ora alle espressioni degli altri due termini. In genere si usa identificare con un unico simbolo la somma delle forze aerodinamiche e forze propulsive

$$\begin{cases} X = F_{A_x} + F_{T_x} \\ Y = F_{A_y} + F_{T_y} \\ Z = F_{A_z} + F_{T_z} \end{cases}$$

che esplicitate diventano (ricordiamo che la terna di stabilità, nella condizione di equilibrio, coincide con la terna di assi vento)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \underline{\underline{L}}_{SW} \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove, per semplicità, nel vettore della forza propulsiva abbiamo considerato solo la componente longitudinale e quindi il termine di perturbazione è dato da

$$\Delta\vec{F}_T = \begin{bmatrix} \Delta T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

L'espressione del vettore delle forze aerodinamiche è invece

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} -D\cos\alpha_x\cos\beta + C\cos\alpha_x\,\text{sen}\,\beta + L\,\text{sen}\,\alpha_x \\ -D\,\text{sen}\,\beta - C\cos\beta \\ -D\,\text{sen}\,\alpha_x\cos\beta + C\,\text{sen}\,\alpha_x\,\text{sen}\,\beta - L\cos\alpha_x \end{bmatrix}$$

ma ricordiamo che nella terna di assi di stabilità e in condizioni di riferimento $\alpha_{x_e} = \beta_e = C_e = 0$ e quindi

$$\Delta\vec{F}_A = \begin{bmatrix} -\Delta D + L_e \Delta\alpha_x \\ -D\Delta\beta - \Delta C_e \\ -D_e \Delta\alpha_x - \Delta L \end{bmatrix}$$

perciò, in termini della somma tra azioni aerodinamiche e propulsive, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta D + L_e \Delta\alpha_x + \Delta T \\ -D\Delta\beta - \Delta C_e \\ -D_e \Delta\alpha_x - \Delta L \end{bmatrix}$$

17.2 - SVILUPPO DEI TERMINI AERODINAMICI IN FORMA LINEARIZZATA: METODO DI BRYAN E DERIVATE DI STABILITÀ

Le relazioni ottenute nel § precedente, così come sono scritte, non sono ancora molto efficaci; occorre infatti un'espressone delle forze aerodinamiche che presenti esplicitamente una dipendenza lineare dalla grandezza del moto, e per far questo utilizzeremo il metodo di Bryan. Le grandezze aerodinamiche di perturbazione (cioè forze e momenti aerodinamici di perturbazione) possono essere espresse mediante relazioni lineari in termini dei valori istantanei delle variabili di perturbazione del problema (velocità angolare e lineare), delle variabili di controllo (angoli di controllo) e delle loro derivate rispetto al tempo. Il fatto che intervengano anche le derivate rispetto al tempo delle variabili del moto non è affatto intuitivo, perciò soffermiamoci su tale aspetto. Supponiamo che sia necessario esprimere il valore della portanza in un certo istante; possiamo scrivere

$$L(t) = L[\alpha(\tau)] \qquad \text{con} \qquad -\infty < \tau < t$$

dove α è l'angolo d'attacco. Questa relazione mette in evidenza il fatto che la portanza ad un certo istante t non dipenda solo dal valore istantaneo di α, ma anche dai valori che α ha assunto precedentemente. Ciò che determina tale tipo di dipendenza è la scia: sappiamo che essa influenza le azioni aerodinamiche sviluppate dall'ala poiché determina certe velocità indotte sull'ala stessa, ma in più dobbiamo tener conto che la scia non si adegua, cioè non cambia forma, istantaneamente quando variamo l'angolo d'attacco e quindi conserva una certa memoria della dipendenza dal tempo; altri effetti che vengono citati, ma che sono di minore importanza, sono effetti di isteresi nel caso vi siano fenomeni di separazione sull'ala o su tratti di ala (questi però riguardano già condizioni di volo ad incidenze che non ci interessano). Se dunque esprimiamo l'angolo d'attacco in un certo tempo t mediante uno sviluppo in serie di Taylor abbiamo

$$\alpha(\tau) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)(\tau - t) + \frac{1}{2}\ddot{\alpha}(t)(\tau - t)^2 + \ldots$$

perciò dal punto di vista funzionale possiamo scrivere

$$L(t) = L[\alpha(t); \dot{\alpha}(t); \ddot{\alpha}(t); \ldots].$$

In questo modo abbiamo dimostrato che il valore della forza aerodinamica in un certo istante è funzione dell'angolo d'attacco in quell'istante, ma anche delle derivate dell'angolo d'attacco tutte calcolate all'istante *t*. Quello che faremo dunque è rappresentare questo tipo di dipendenza con uno sviluppo lineare ed esprimeremo la perturbazione ΔL con uno sviluppo del tipo

$$\Delta L = L_{\alpha}\Delta\alpha + L_{\alpha\alpha}\frac{\Delta\alpha^2}{2} + \ldots + L_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} + L_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\frac{\Delta\dot{\alpha}^2}{2} + \ldots$$

nel nostro caso lo sviluppo si ferma al primo ordine, quindi tutti i termini di ordine superiore al primo (come $\Delta\alpha^2$ e $\Delta\dot{\alpha}^2$) verranno trascurati.

Altri punti fondamentali intervengono nello sviluppo che stiamo per presentare: faremo l'ipotesi che grandezze aerodinamiche non appartenenti al piano di simmetria (come ad esempio forza laterale, momento di rollio e momento di imbardata) non dipendano da variabili del moto del piano di simmetria (come ad esempio angolo d'attacco e velocità) e questo si spiega perché in una condizione di volo simmetrico le grandezze non simmetriche sono tutte nulle ad un certo valore dell'angolo d'attacco, e continuano a mantenersi nulle se questo varia; precisiamo però che questa ipotesi vale solo se siamo al di sotto dell'incidenza critica. In modo del tutto analogo supponiamo che grandezze aerodinamiche e propulsive nel piano di simmetria non dipendano da variabili non simmetriche; anche questa ipotesi vale per angoli aerodinamici non grandi. In questo modo disaccoppiamo tutto ciò che avviene nel piano longitudinale da ciò che avviene nel caso latero-direzionale.

Inoltre trascuriamo la presenza di effetti giroscopici, quindi trascuriamo gli effetti inerziali legati a masse in rotazione; questo perché tali effetti porterebbero ad un accoppiamento dei gradi di libertà simmetrici con quelli non simmetrici, complicando notevolmente la trattazione.

Sotto tali ipotesi gli sviluppi lineari dei termini di forza di perturbazione sono

$$\Delta X = \left.\frac{\partial X}{\partial u}\right|_e \Delta u + \left.\frac{\partial X}{\partial w}\right|_e \Delta w + \left.\frac{\partial X}{\partial \delta_E}\right|_e \Delta\delta_E + \left.\frac{\partial X}{\partial \delta_T}\right|_e \Delta\delta_T$$

$$\Delta Y = \left.\frac{\partial Y}{\partial v}\right|_e \Delta v + \left.\frac{\partial Y}{\partial p}\right|_e \Delta p + \left.\frac{\partial Y}{\partial r}\right|_e \Delta r + \left.\frac{\partial Y}{\partial \delta_R}\right|_e \Delta\delta_R$$

$$\Delta Z = \left.\frac{\partial Z}{\partial u}\right|_e \Delta u + \left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e \Delta w + \left.\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}\right|_e \Delta\dot{w} + \left.\frac{\partial Z}{\partial q}\right|_e \Delta q + \left.\frac{\partial Z}{\partial \delta_E}\right|_e \Delta\delta_E \,.$$

Notiamo, come diretta conseguenza di quanto abbiamo anzidetto, che le forze simmetriche X e Z dipendono solo da variabili del moto e di controllo simmetriche, mentre la forza laterale Y dipende solo da grandezze del moto e di controllo non simmetriche. Notiamo poi come, a differenza dello sviluppo di ΔZ, nello sviluppo di ΔX non compia la dipendenza da $\dot{w}$, cioè da effetti instazionari, e non compare la dipendenza da q; questo perché, per esperienza, sappiamo che, ad esempio, l'effetto della velocità di beccheggio su ΔX, che è formata soprattutto da resistenza e spinta, sarà molto piccolo e perciò del tutto trascurabile; la stessa cosa si può dire per l'effetto instazionario, rappresentato da $\dot{w}$: vedremo tra poco come la velocità w corrisponda di fatto all'angolo d'attacco e l'effetto di $\dot{\alpha}$ si risenta a livello di ΔZ, che è soprattutto portanza, mentre è trascurabile per il ΔX; tale ipotesi prende a volte il nome di ipotesi *quasi statica*.

Analogamente per lo sviluppo dei termini di momento (che tengono conto sia delle coppie aerodinamiche che di quelle propulsive) abbiamo

$$\Delta L = \left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_e \Delta v + \left.\frac{\partial L}{\partial p}\right|_e \Delta p + \left.\frac{\partial L}{\partial r}\right|_e \Delta r + \left.\frac{\partial L}{\partial \delta_A}\right|_e \Delta\delta_A + \left.\frac{\partial L}{\partial \delta_R}\right|_e \Delta\delta_R$$

$$\Delta M = \left.\frac{\partial M}{\partial u}\right|_e \Delta u + \left.\frac{\partial M}{\partial w}\right|_e \Delta w + \left.\frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\right|_e \Delta\dot{w} + \left.\frac{\partial M}{\partial q}\right|_e \Delta q + \left.\frac{\partial M}{\partial \delta_E}\right|_e \Delta\delta_E$$

$$\Delta N = \left.\frac{\partial N}{\partial v}\right|_e \Delta v + \left.\frac{\partial N}{\partial p}\right|_e \Delta p + \left.\frac{\partial N}{\partial r}\right|_e \Delta r + \left.\frac{\partial N}{\partial \delta_A}\right|_e \Delta\delta_A + \left.\frac{\partial N}{\partial \delta_R}\right|_e \Delta\delta_R \,.$$

Osserviamo come anche in tale sviluppo i termini aerodinamici longitudinali siano disaccoppiati da quelli latero-direzionali. Per procedere nella formulazione del problema linearizzato occorre esprimere tutti i coefficienti che compaiono negli sviluppi ora mostrati: tali coefficienti prendono il nome di derivate di stabilità e sono calcolati nella condizione di riferimento. Occupiamoci prima delle derivate longitudinali, scrivendo anzitutto in forma linearizzata α_x: per definizione

$$\alpha_x = \arctan\frac{w}{u}$$

e quindi

$$\Delta\alpha_x = \frac{1}{1+\frac{w_e^2}{u_e^2}}\left(\frac{u_e\Delta w}{u_e^2} - \frac{w_e\Delta u}{u_e^2}\right)$$

ma essendo nella terna di assi di stabilità $w_e = 0$ per definizione

$$\Delta\alpha_x = \frac{\Delta w}{u_e}$$

quindi nell'ambito di uno sviluppo lineare, parlare di angolo d'attacco di perturbazione o di velocità w di perturbazione è, a meno di una costante, la stessa cosa. Un altro elemento necessario è lo sviluppo del modulo della velocità; possiamo scrivere il quadrato della velocità come

$$V^2 = \left(V_e + \Delta V\right)^2 \cong V_e^2 + 2V_e\Delta V$$

inoltre

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

dunque, essendo in assi di stabilità $v_e = w_e = 0$, otteniamo

$$V = \sqrt{u_e^2 + 2u_e\Delta u} \qquad\qquad V_e = u_e$$

per quanto riguarda la perturbazione del modulo della velocità perciò abbiamo

$$\Delta V = \frac{1}{2V_e}\left(2u_e\Delta u\right)$$

perciò otteniamo

$$\Delta V = \Delta u$$

sostituendo

$$V^2 = u_e^2\left(1 + 2\frac{\Delta u}{u_e}\right).$$

Abbiamo ottenuto pertanto tutti gli elementi per scrivere l'espressione delle derivate di stabilità longitudinali.

• DERIVATE RISPETTO AD u: $\frac{\partial X}{\partial u}; \frac{\partial Z}{\partial u}; \frac{\partial M}{\partial u}$

Per quanto concerne la derivata $\frac{\partial X}{\partial u}$ svolgeremo tutti i passaggi per mettere in evidenza il procedimento, che invece non varrà svolto per tutte le altre derivate. Anzitutto notiamo che, essendo $X = X_e + \Delta X$ con X_e costante, possiamo scrivere

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(\Delta X)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(-\Delta D + L_e\Delta\alpha_x + \Delta T)$$

analizziamo singolarmente i termini che compaiono in tale derivata: per quanto riguarda $L_e\Delta\alpha_x$ abbiamo semplicemente che

$$\frac{\partial}{\partial u}(L_e\Delta\alpha_x) = 0$$

essendo L_e costante e $\Delta\alpha_x$ indipendente da u.
Per quanto riguarda il termine $-\Delta D$ scriviamo

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial(-\Delta D)}{\partial u}\right|_e &= \left.\frac{\partial(-D)}{\partial u}\right|_e = \left.\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{1}{2}\rho V^2 S C_D\right)\right|_e = \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial u}\left[-\frac{1}{2}\rho S u_e^2\left(1 + 2\frac{\Delta u}{u_e}\right)C_D\right]\right|_e = \\
&= -\left(\frac{1}{2}\rho S u_e^2 \left.\frac{\partial C_D}{\partial u}\right|_e + \frac{1}{2}\rho S u_e^2 C_D \frac{2}{u_e} + \frac{1}{2}\rho S u_e^2 2\frac{\Delta u}{u_e}\left|\right._e \left.\frac{\partial C_D}{\partial u}\right|_e\right) = \\
&= -\frac{1}{2}\rho S u_e^2\left(\left.\frac{\partial C_D}{\partial u}\right|_e + \frac{2C_{D_e}}{u_e}\right)
\end{aligned}$$

introduciamo la velocità longitudinale adimensionale $\hat{u}$ definita come

$$\hat{u} = \frac{u}{u_e} \qquad \Rightarrow \qquad u = \hat{u}u_e \qquad \Rightarrow \qquad du = u_e d\hat{u}$$

perciò possiamo scrivere

$$\frac{\partial C_D}{\partial u} = \frac{1}{u_e}\frac{\partial C_D}{\partial \hat{u}} = \frac{1}{u_e} C_{D_{\hat{u}}}$$

quindi, in termini di coefficienti adimensionali

$$\left.\frac{\partial(-\Delta D)}{\partial u}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho S u_e \left(C_{D_{\hat{u}}} + 2C_{D_e}\right).$$

Dovremmo ripetere lo stesso procedimento per il termine di perturbazione della spinta, ma dal punto di vista formale le cose sono del tutto analoghe, quindi l'espressione di questa prima derivata è

$$\left.\frac{\partial X}{\partial u}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left[C_{D_{\hat{u}}} - C_{T_{\hat{u}}} + 2\left(C_{D_e} - C_{T_e}\right)\right]$$

in condizioni di volo in equilibrio a quota costante $T = D$ e quindi $C_{T_e} = C_{D_e}$; ciò comporta che

$$\left.\frac{\partial X}{\partial u}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(C_{D_{\hat{u}}} - C_{T_{\hat{u}}}\right).$$

Il fattore più importante è però legato ai vari tipi di propulsori; nel caso del getto abbiamo fatto sempre l'ipotesi

$$\frac{dT}{dV} = 0$$

quindi

$$C_{T_{\hat{u}}} + 2C_{T_e} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_{T_{\hat{u}}} = -2C_{T_e}.$$

Per il motoelica a giri costanti invece, l'ipotesi fatta è

$$\frac{d(TV)}{dV} = 0$$

quindi

$$\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(2C_{T_e} + C_{T_{\hat{u}}}\right) + \frac{1}{2}\varrho u_e S C_{T_e} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C_{T_{\hat{u}}} = -3C_{T_e}$$

particolare attenzione merita la derivata $C_{D_{\hat{u}}}$ la quale, tenendo costanti tutte le altre grandezze, dipende da u_e e da quest'ultima dipende il numero di Mach; quindi $C_{D_{\hat{u}}}$ rappresenta la variazione del coefficiente di resistenza al variare del numero di Mach; tenendo presente la figura 2.17b, in regime subsonico il $C_{D_{\hat{u}}}$ è positivo, mentre in regime supersonico $C_{D_{\hat{u}}}$ è negativo.

Passiamo adesso a scrivere le altre due derivate; per $\frac{\partial Z}{\partial u}$, tenendo presente che $D_e \Delta\alpha_x$ è costante al variare di u

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial u}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}\right)$$

anche in questo caso, la causa principale di un $C_{L_{\hat{u}}} \neq 0$ è legata al numero di Mach (si veda figura 2.17a). La terza ed ultima derivata, quella più importante, è

$$\left.\frac{\partial M}{\partial u}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e \bar{c} S\left(C_{m_{\hat{u}}} + 2C_{m_e}\right)$$

dove C_{m_e}, rappresentando sia le azioni aerodinamiche che propulsive, è nullo

$$\left.\frac{\partial M}{\partial u}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e \bar{c} S C_{m_{\hat{u}}}$$

la derivata $C_{m_{\hat{u}}}$ è fondamentale perché caratterizza la dinamica longitudinale del velivolo; per numeri di Mach subsonici tale derivata è piccola, ma vicino al transonico essa diventa rilevante. Per quanto riguarda il segno di tale derivata in regime transonico, abbiamo che per Mach crescente e prossimo ad 1, il centro aerodinamico si sposta verso la coda del velivolo

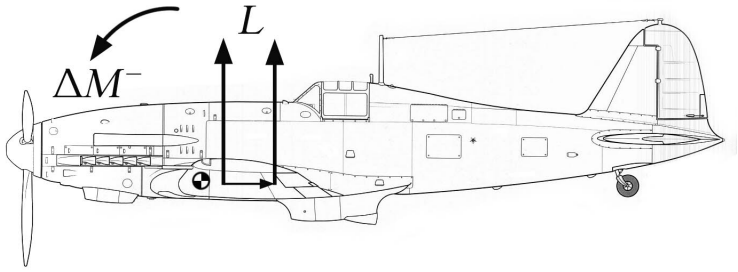


Figura 1

ed il risultato è un $\Delta M < 0$. Tale derivata si esprime a volte in termini del numero di Mach come

$$C_{m_{\hat{u}}} = u_e \frac{a_e}{a_e} \frac{\partial C_m}{\partial u} = M_e \frac{\partial C_m}{\partial M}$$

• DERIVATE RISPETTO A w: $\frac{\partial X}{\partial w}; \frac{\partial Z}{\partial w}; \frac{\partial M}{\partial w}$

Ricordiamo che parlare di w significa parlare di α_x; inoltre supponiamo che T non dipenda da w, quindi per la prima derivata abbiamo

$$\left.\frac{\partial X}{\partial w}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e^2 S\left(\left.\frac{\partial C_D}{\partial w}\right|_e - \frac{C_{L_e}}{u_e} \right)$$

ed essendo $\hat{w} = \frac{w}{u_e} = \alpha$, in termini adimensionali

$$\frac{\partial C_D}{\partial w} = \frac{1}{u_e}\frac{\partial C_D}{\partial \hat{w}} = \frac{1}{u_e} C_{D_\alpha}$$

e quindi

$$\left.\frac{\partial X}{\partial w}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(C_{D_\alpha} - C_{L_e}\right)$$

Analogamente per le altre due derivate abbiamo

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(C_{L_\alpha} + C_{D_e}\right)$$
$$\left.\frac{\partial M}{\partial w}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e \bar{c} S C_{m_\alpha}$$

Un'altra derivata molto importante è C_{m_α}, la quale caratterizza fortemente il comportamento dinamico del velivolo.

• DERIVATE RISPETTO A q: $\frac{\partial Z}{\partial q}; \frac{\partial M}{\partial q}$

Anche la scrittura di queste due derivate è immediata; per la prima abbiamo

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial q}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e^2 S \left.\frac{\partial C_L}{\partial q}\right|_e = -\frac{1}{4}\varrho u_e S \bar{c} C_{L_{\hat{q}}}$$

avendo impiegato la velocità di beccheggio adimensionale ($q = \hat{q}\frac{2u_e}{\bar{c}}$) nel consueto modo

$$\frac{\partial C_L}{\partial q} = \frac{1}{2\frac{u_e}{\bar{c}}}\frac{\partial C_L}{\partial q} = \frac{\bar{c}}{2u_e} C_{L_{\hat{q}}}$$

osserviamo che la derivata $C_{L_{\hat{q}}}$ non è molto importante. Per la seconda derivata abbiamo

$$\left.\frac{\partial M}{\partial q}\right|_e = \frac{1}{4}\varrho u_e \bar{c}^2 S C_{m_{\hat{q}}}$$

dove $C_{m_{\hat{q}}}$ è detta *smorzamento di beccheggio* e costituisce una derivata fondamentale poiché esprime il maggior contributo allo smorzamento di uno dei modi longitudinali caratteristici del velivolo.

• DERIVATE RISPETTO A $\dot{w}$: $\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}; \frac{\partial M}{\partial \dot{w}}$

Queste due derivate sono piuttosto importanti perché tengono conto degli effetti instazionari; in questo caso vediamo prima l'espressione formale di tali due derivate e poi calcoleremo i coefficienti. Notando anzitutto che

$$\Delta\dot{\alpha}_x = \frac{\Delta\dot{w}}{u_e}.$$

Per la prima abbiamo

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}\right|_e = -\frac{1}{2}\rho u_e^2 S \left.\frac{\partial C_L}{\partial \dot{w}}\right|_e = -\frac{1}{4}\rho S\bar{c} C_{L_{\dot{\alpha}}}$$

avendo tenuto conto che, in termini adimensionali, possiamo scrivere

$$\frac{\partial C_L}{\partial \dot{w}} = \frac{1}{u_e 2\frac{u_e}{\bar{c}}}\frac{\partial C_L}{\partial \dot{\hat{w}}} = \frac{\bar{c}}{2u_e^2} C_{L_{\dot{\alpha}}}$$

infine la seconda derivata è

$$\left.\frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\right|_e = \frac{1}{4}\rho \bar{c}^2 S C_{m_{\dot{\alpha}}}$$

dove $C_{m_{\dot{\alpha}}}$ è la derivata più importante nel rappresentare effetti non stazionari. Vediamo a tal proposito quali effetti vengano considerati nei modelli più semplici in cui consideriamo l'aerodinamica instazionaria. Un effetto aerodinamico che si cita abitualmente è quello legato al fatto che la scia non adegua istantaneamente la sua forma in seguito ad una variazione dell'angolo d'attacco; ma nel caso di un velivolo l'effetto di ciò sull'ala è considerato secondario rispetto all'effetto, legato ad una variazione dell'angolo di *downwash*, abbiamo sempre considerato che il valore assunto da tale angolo ad un certo istante *t*, fosse legato al valore assunto dall'angolo d'attacco nello stesso istante, cioè $\varepsilon(t) = \varepsilon[\alpha(t)]$ questo discorso è inesatto poiché una certa perturbazione, relativa ad una variazione dell'angolo d'attacco in corrispondenza dell'ala, impiega un tempo finito Δt a manifestarsi sul piano di coda orizzontale. Immaginiamo che la perturbazione sia trasportata a valle dell'ala con la velocità di avanzamento del velivolo, quindi possiamo scrivere $\Delta t = \frac{l_t'}{u_e}$, dove l_t' è la distanza fra un

punto al 75% della corda media alare ed il centro aerodinamico del piano di coda orizzontale.

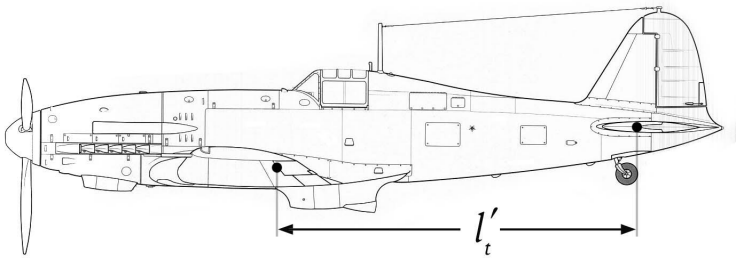


Figura 2

Quindi non è vero che ad un certo istante t $\varepsilon(t)$ dipenda da $\alpha(t)$ poiché una variazione di angolo d'attacco si farà sentire sul piano di coda dopo un certo tempo Δt e quindi dovremo considerare più correttamente un $\varepsilon_c(t) = \varepsilon\left[\alpha(t-\Delta t)\right]$. Tener conto di questo effetto di aerodinamica instazionaria significa valutare la variazione di $\Delta\varepsilon$ tra l'espressione corretta e l'espressione di tipo statico che prescinde da effetti di tipo non stazionario; quindi

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_c(t) - \varepsilon(t)$$

e sviluppando linearmente

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \left[\alpha(t-\Delta t)\right] - \varepsilon_0 - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \alpha(t)$$

dove

$$\alpha(t-\Delta t) = \alpha(t) - \dot{\alpha}(t)\Delta t$$

e quindi sostituendo otteniamo

$$\Delta\varepsilon = \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \alpha(t) - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \dot{\alpha}(t)\frac{l'_t}{u_e} - \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \alpha(t) = -\left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \dot{\alpha}(t)\frac{l'_t}{u_e}$$

ora dobbiamo esprimere $C_{L_{\dot{\alpha}}}$ e $C_{m_{\dot{\alpha}}}$; una variazione positiva dell'angolo di *downwash* produce una diminuzione del C_{L_t} (tanto maggiore è l'angolo di *downwash* e tanto minore è l'incidenza del piano di coda); ciò significa che se valutiamo la variazione del C_{L_t} prodotta dall'angolo di *downwash*, tale variazione è esprimibile come

$$\Delta C_{L_t} = -\eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \Delta\varepsilon = \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \frac{l_t'}{u_e} \dot{\alpha}(t) = \eta_t \frac{S_t}{S} C_{L_{\alpha_t}} \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0 \frac{l_t}{u_e} \frac{2u_e}{\bar{c}} \dot{\alpha}(t)$$

dove abbiamo confuso l_t' con l_t cioè con la distanza tra baricentro e centro aerodinamico del piano di coda. derivando allora rispetto ad $\dot{\alpha}$ arriviamo finalmente a

$$C_{L_{\dot{\alpha}}} = 2\eta_t V_H C_{L_{\alpha_t}} \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0$$

e con un ragionamento analogo possiamo scrivere

$$C_{m_{\dot{\alpha}}} = -2\eta_t V_H \frac{l_t}{\bar{c}} C_{L_{\alpha_t}} \left.\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right|_0$$

dove il segno meno dovuto al fatto che una variazione positiva di portanza corrisponde una variazione di momento di beccheggio negativa.

• DERIVATE RISPETTO A δ_E: $\frac{\partial X}{\partial \delta_E}; \frac{\partial Z}{\partial \delta_E}; \frac{\partial M}{\partial \delta_E}$

Seguendo sempre il solito procedimento abbiamo

$$\frac{\partial X}{\partial \delta_E} = -\frac{1}{2}\rho u_e^2 S C_{D_{\delta_E}}$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \delta_E} = -\frac{1}{2}\rho u_e^2 S C_{L_{\delta_E}}$$
$$\frac{\partial M}{\partial \delta_E} = -\frac{1}{2}\rho u_e^2 S C_{m_{\delta_E}}$$

di tali derivate non c'è altro da dire se non che le prime due siano poco importanti.

• DERIVATA RISPETTO A δ_T: $\frac{\partial X}{\partial \delta_T}$

La derivata di X rispetto a δ_T è

$$\frac{\partial X}{\partial \delta_T} = -\frac{1}{2}\varrho u_e^2 S C_{T_{\delta_T}}$$

δ_T spesso si esprime in gradi per renderlo, almeno formalmente, analogo alle grandezze di controllo aerodinamiche e rappresenta l'angolo della manetta, cioè è la variabile che comanda il livello di spinta erogata.

Passiamo ora alle derivate latero-direzionali; la prima cosa da fare è esprimere in forma lineare l'angolo di derapata β, ossia ricavare l'espressione di $\Delta\beta$ cioè del valore di perturbazione dell'angolo di derapata; dalla definizione si ha

$$\beta = \operatorname{arcsen}\frac{v}{V}$$

e sviluppando in serie di Taylor al primo ordine, abbiamo

$$\Delta\beta = \left.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}\right|_e \left(\frac{\Delta v}{V_e} - v_e\frac{\Delta V}{V_e^2}\right)$$

e quindi, poiché all'equilibrio la velocità laterale è uguale a zero per il fatto che la condizione di volo è simmetrica, si ha

$$\Delta\beta = \frac{\Delta v}{V_e} = \frac{\Delta v}{u_e}$$

come vediamo la perturbazione sull'angolo di derapata è uguale alla perturbazione sulla velocità laterale resa non dimensionale rispetto al modulo della velocità non perturbata e quindi, al primo ordine, parlare di angolo di derapata o di velocità laterale è, a meno di una costante, la stessa cosa. Abbiamo espresso la forza di perturbazione laterale in termini delle componenti della forza aerodinamica nel sistema di assi vento, ma questo tipo di relazione non viene in genere usata e si preferisce, parlando di azioni aerodinamiche laterali, considerare direttamente la componente laterale in assi corpo (o meglio in assi di stabilità) e ragionare quindi semplicemente in termini di coefficiente di forza laterale. Così ad esempio per ΔY, invece di usare la relazione

$$\Delta Y = -D_e\Delta\beta - \Delta C$$

partiamo direttamente dalla

$$Y = \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_T$$

• DERIVATE RISPETTO A v: $\frac{\partial Y}{\partial v}; \frac{\partial L}{\partial v}; \frac{\partial N}{\partial v}$

Per la prima derivata abbiamo quindi

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial v}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e^2 S \left.\frac{\partial C_Y}{\partial v}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e S C_{y_\beta}$$

dove come al solito abbiamo posto

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial v}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e^2 S \;|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e S C_{y_\beta}$$
$$\frac{\partial C_Y}{\partial v} = \frac{1}{u_e}\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{v}} = \frac{1}{u_e} C_{Y_\beta}.$$

Analogamente per le altre due derivate abbiamo

$$\left.\frac{\partial L}{\partial v}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e b S C_{l_\beta}$$
$$\left.\frac{\partial N}{\partial v}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e b S C_{n_\beta}$$

di queste tre derivate, la seconda caratterizza la stabilità latero-direzionale del velivolo, mentre la terza è molto importante nella dinamica latero-direzionale del velivolo.

• DERIVATE RISPETTO A p: $\frac{\partial Y}{\partial p}; \frac{\partial L}{\partial p}; \frac{\partial N}{\partial p}$

Queste derivate rappresentano l'effetto di una velocità di rollio su forze e momenti latero-direzionali del velivolo. Con il solito procedimento, per la prima derivata si ottiene

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial p}\right|_e = \frac{1}{2}\varrho u_e^2 S \left.\frac{\partial C_Y}{\partial p}\right|_e = \frac{1}{4}\varrho u_e b S C_{Y_\beta} u_e$$

avendo al solito introdotto

$$\frac{\partial C_Y}{\partial p} = \frac{1}{2\frac{u_e}{b}}\frac{\partial C_Y}{\partial \hat{p}} = \frac{b}{2u_e} C_{Y_\beta}.$$

osserviamo che nel caso latero-direzionale le velocità sono rese non dimensionali da un termine nel quale la lunghezza di riferimento è $b/2$ (semiapertura alare), laddove nel caso longitudinale compariva la corda media:

$$p = \hat{p} 2\frac{u_e}{b}.$$

Le altre due derivate sono

$$\left.\frac{\partial L}{\partial p}\right|_e = \frac{1}{4}\varrho u_e b^2 S C_{l_\beta} u_e$$
$$\left.\frac{\partial N}{\partial p}\right|_e = \frac{1}{4}\varrho u_e b^2 S C_{n_\beta} u_e$$

la derivata C_{l_β} è molto importante nella dinamica del velivolo e caratterizza la risposta dinamica ai comandi sugli alettoni; è una derivata negativa, come vedremo, e prende il nome di *smorzamento di rollio*. La derivata C_{n_β} è una di quelle derivate dette *derivate incrociate*[7] e rappresenta l'effetto di una rotazione attorno all'asse longitudinale in termini della generazione di momenti di imbardata, quindi momenti sull'altro asse.

È importante mettere in evidenza i contributi dell'impennaggio verticale dell'ala alle derivate C_{Y_β}, C_{l_β} e C_{n_β}; iniziamo con il contributo dell' impennaggio verticale. Supponiamo di vendere dalla coda un velivolo che subisce una rotazione positiva.

[7] Ricordiamo che abbiamo detto nel caso latero-direzionale è praticamente impossibile disaccoppiare i due gradi di libertà di rotazione: c'è un accoppiamento sia a livello di controlli che a livello di effetti indotti da velocità di rotazioni e questa derivata è una di quelle responsabili di quel accoppiamento.

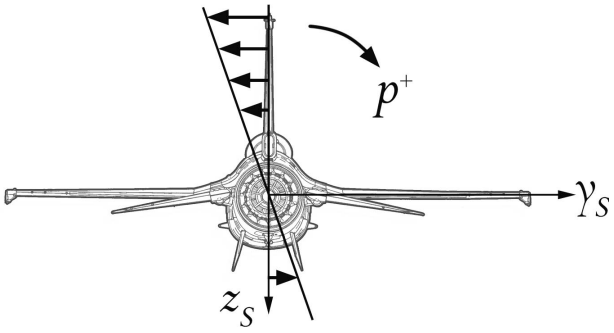


Figura 3

Possiamo immaginare che sull'impennaggio di coda vi sia una distribuzione di velocità del fluido rispetto al velivolo che ha un andamento lineare come abbiamo sempre schematizzato, quindi velocità di perturbazione indotte dalla rotazione che sono proporzionali dalla distanza dal baricentro. In particolare notiamo come sull'impennaggio di coda le velocità di perturbazione siano dirette verso sinistra, quindi verso la parte negativa dell'asse y. Consideriamo ora una vista in pianta

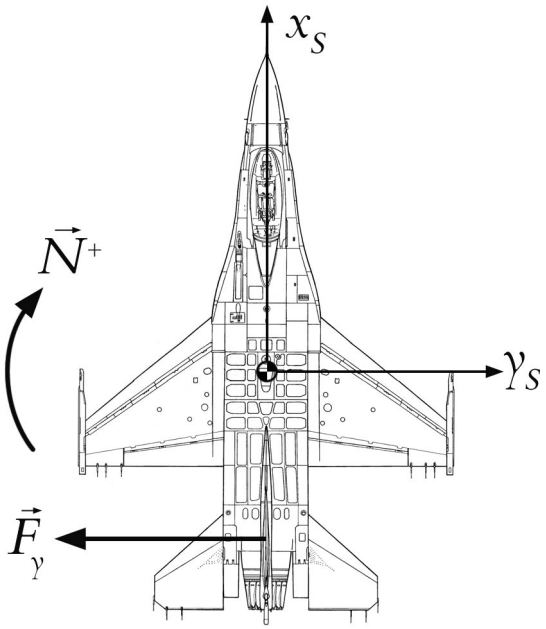


Figura 4

in corrispondenza dell'impennaggio di coda avremo un certo andamento di velocità di perturbazione indotte dalla rotazione; queste velocità determineranno una certa variazione $\Delta\alpha_v$ dell'angolo d'attacco che genera una forza laterale F_y che è applicata ad una distanza z_v (da determinare) dal baricentro del velivolo e che nel nostro riferimento è negativa; in conseguenza di ciò la derivata $C_{y\beta}$ è una grandezza negativa. Osserviamo come l'effetto dell'impennaggio verticale sia il più importante per ciò che riguarda la generazione di forza la-

terale. Per quanto riguarda il momento di rollio, la forza laterale produce una coppia negativa rispetto al baricentro il cui braccio è z_v. Quindi il contributo dell'impennaggio verticale di coda alla derivata C_{l_β}, indotto da una rotazione di rollio positiva, è un contributo negativo che tende ad opporsi alla rotazione. L'ultimo contributo dell'impennaggio verticale che analizziamo, sempre da un punto di vista qualitativo, è quello riguardante il momento di imbardata; dalla figura 4 abbiamo un momento di imbardata *N*, indotto dalla rotazione, positivo e quindi tende a far ruotare il velivolo verso destra; ciò comporta che il contributo alla derivata C_{n_β} è positivo.

Analizziamo adesso il contributo dell'ala, la quale agisce in maniera complessa. La distribuzione del coefficiente di portanza in condizione di velocità di rotazione nulla è simmetrica (si veda figura 5), quando invece è presente una velocità angolare *p*, abbiamo un campo (lineare) di velocità di perturbazione indotte sull'ala; se l'ala ruota con velocità di rollio positiva, la velocità del fluido rispetto all'ala è diretta verso l'alto sulla semiala destra e verso il basso sulla semiala sinistra.

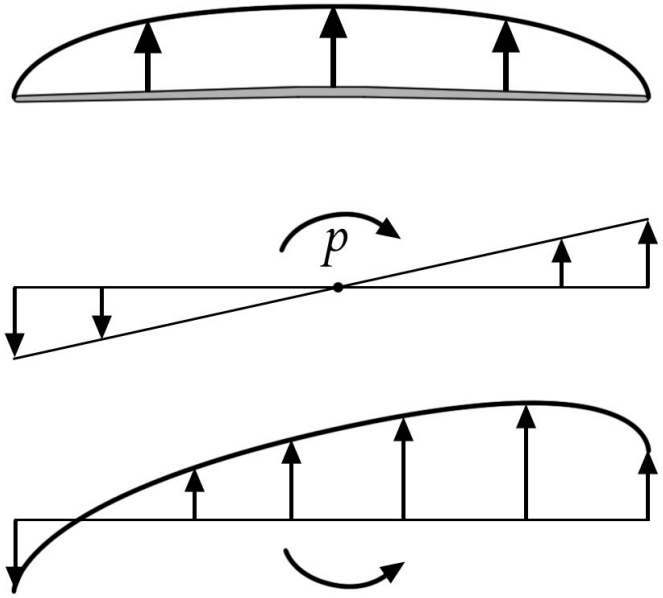


Figura 5

Questo produce un aumento locale di incidenza sulla semiala destra ed una diminuzione locale dell'angolo d'attacco sulla semiala sinistra. Al di sotto dell'incidenza critica, quindi per condizioni di volo ad angolo d'attacco inferiore a quello di stallo[8], un aumento di incidenza produce un aumento di portanza sulla semiala destra, mentre sulla semiala sinistra una diminuzione dell'angolo d'attacco produrrà una diminuzione della portanza. Pertanto la distribuzione della portanza sull'ala non è più simmetrica, ma vi sarà maggior portanza sulla semiala destra, quindi la nascita di un momento di rollio negativo. L'ala di conseguenza fornisce un contributo negativo alla derivata C_{l_β}; tra tutti i contributi allo smorzamento di rollio, quello dell'ala è senz'altro il contributo più importante. Il discorso, però, non si esaurisce qui perché esistono altri effetti che riguardano la generazione di momenti di imbardata; abbiamo detto che sulla semiala destra si manifesta una variazione positiva dell'angolo d'attacco, il che determina un aumento della resistenza per effetto soprattutto di un aumento della resistenza indotta; analogamente sulla semiala sinistra una diminuzione dell'angolo d'attacco e quindi una diminuzione del coefficiente di resistenza.

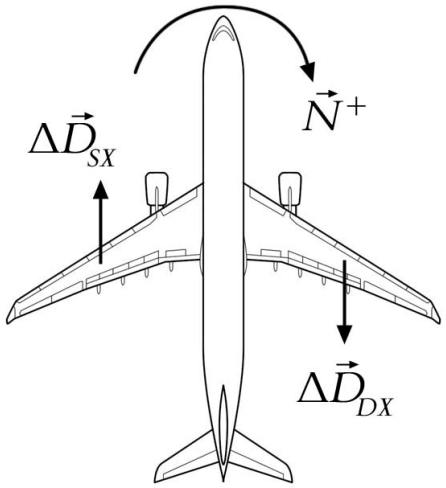


Figura 6

Il risultato è una coppia aerodinamica di imbardata positiva. Inoltre, in figura 7 è riportata una sezione della semiala destra e una sezione della semiala sinistra; osserviamo l'effetto sulla resistenza che abbiamo appena discusso, ma osserviamo anche una rotazione del vettore della portanza: sulla semiala destra l'aumento dell'angolo d'attacco non provoca solamente un aumento della portanza, ma anche una rotazione del vettore, rappresentata come una perturbazione di forza ΔL diretta in avanti; sull'altra semiala l'effetto legato alla rotazione di L viene schematizzato con una forza di perturbazione diretta nel verso opposto. Consideriamo allora una vista in pianta dell'aeroplano.

[8] Capiremo il perché di questa precisazione quando studieremo la vite.

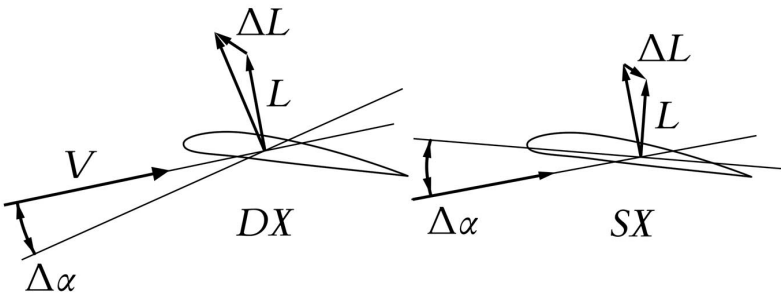


Figura 7

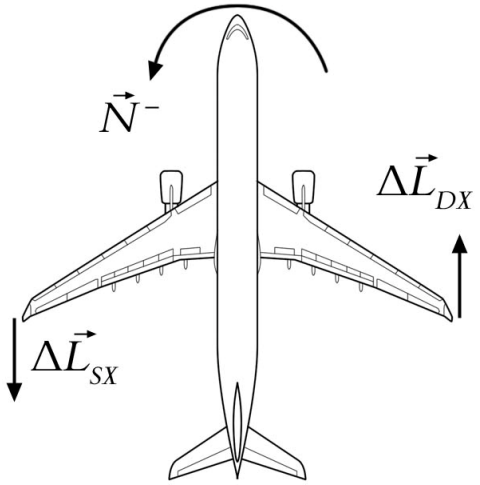


Figura 8

Sulla semiala destra riportiamo la proiezione del vettore ΔL diretto in avanti e sulla semiala sinistra la proiezione dello stesso vettore diretta in verso opposto; il risultato è quello di un momento di imbardata N negativo. Si manifesterà quindi un effetto opposto a quello visto prima e legato alla resistenza sulle due semiali. Riassumendo: per quanto riguarda il contributo dell'ala in termini di momenti di imbardata abbiamo un primo contributo positivo (legato alla variazione del coefficiente di resistenza sulle due semiali); poi abbiamo un secondo contributo negativo che è legato alla rotazione del vettore portanza. La prevalenza di un effetto sull'altro dipende dal tipo di velivolo, quindi non possiamo dire a priori se la coppia risultante sarà oraria o antioraria.

C'è un ultimo contributo dell'ala al momento di imbardata che può giocare un ruolo legato alla *forza di suzione*. Consideriamo una lastra piana posta ad angolo d'attacco α in condizioni subsoniche; l'andamento qualitativo della distribuzione di pressione è il seguente.

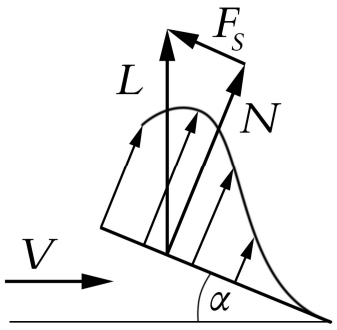


Figura 9

Le pressioni agiscono normalmente alla superficie della lastra piana, perciò se calcoliamo la risultante delle pressioni otteniamo una forza perpendicolare alla lastra piana stessa e non perpendicolare alla corrente all'infinito come invece prevede teorema di Kutta-

Zhukovskj[9]. Questo perchè nel nostro caso si verifica l'aggiramento del bordo d'attacco e se la lastra ha uno spessore infinitesimo avremo delle velocità di aggiramento che tendono all'infinito; ciò genera una forza finita di risucchio applicata in corrispondenza del bordo d'attacco e parallela all'asse, la quale sommata alla risultante delle pressioni fornisce una portanza diretta perpendicolarmente alla corrente all'infinito. Osserviamo cosa accade quando questo schema viene applicato all'ala del velivolo (si veda figura 10): supponiamo di avere un'ala costituita da una lastra piana rettangolare che inizialmente si trovi ad incidenza nulla. Se dunque il velivolo subisce una rotazione di rollio positiva, si genera un certo andamento della portanza che è simmetrico: avremo portanza positiva sulla semiala destra e negativa sulla semiala sinistra. Ciò significa che avremo una pressione più elevata sul ventre della semiala destra e sul dorso della semiala sinistra, mentre avremo una pressione più bassa sul dorso della semiala destra e sul ventre della semiala sinistra; questo produce delle velocità di aggiramento sul bordo delle estremità alari e quindi delle forze di suzione laterale sulla semiala destra e sinistra che in questo caso sono uguali ed opposte e quindi non generano alcun effetto in termini di momento di imbardata.

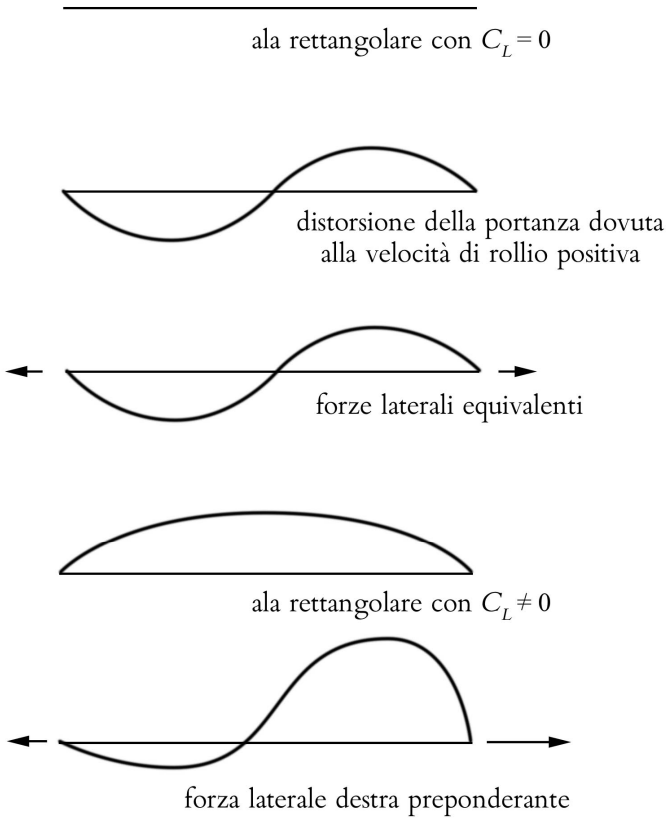


Figura 10

[9] Жуковский, si pronuncia Jucovschi, con la J alla francese.

Quando l'ala ha un coefficiente di portanza diverso da zero, non abbiamo più una distribuzione simmetrica; in particolare la semiala destra presenterà valori locali della portanza maggiori di quelli della semiala sinistra quindi anche le forze di suzione non sono uguali sulle due semiali; ne risulterà una forza laterale diretta nel verso positivo dell'asse y, la quale produrrà un momento di imbardata che dipende, in segno ed intensità, dalla posizione dell'ala rispetto al baricentro. Pertanto parlando di contributo alla derivata C_{N_β}, tale effetto, in presenza di una velocità di rollio positiva e nel caso che l'ala si trovi arretrata rispetto al baricentro, fornisce un contributo negativo.

• DERIVATE RISPETTO A r: $\frac{\partial Y}{\partial r}; \frac{\partial L}{\partial r}; \frac{\partial N}{\partial r}$

Seguendo il procedimento fin qui visto è immediato scrivere

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial r}\right|_e = \frac{1}{4}\rho u_e S b C_{y_r}$$

Notiamo come la scelta di una condizione di equilibrio in volo simmetrico e lo sviluppo linearizzato adottato per forze e momenti aerodinamici hanno permesso di giungere al risultato di avere equazioni longitudinali disaccoppiate dalle equazioni latero-direzionali. Sulla base di una ragionevole esperienza alcuni termini di queste equazioni possono essere trascurati perché hanno un effetto molto piccolo sulla dinamica del aeromobile in condizioni convenzionali; in particolare assumeremo come nulle le derivate $\left.\frac{\partial Y}{\partial p}\right|_e$ e $\left.\frac{\partial Y}{\partial r}\right|_e$ poiché questi contributi sono in genere piccoli; trascureremo inoltre le derivate $\left.\frac{\partial Z}{\partial \dot{w}}\right|_e$ e $\left.\frac{\partial Z}{\partial q}\right|_e$. Le equazioni che useremo, però, sono scritte in termini delle cosiddette derivate dimensionali[10]; definiamo dunque tali grandezze e cerchiamo di capire qual sia il loro significato fisico. Per quanto riguarda i termini di forza abbiamo

[10] In particolare in ambito del controllo, si usano quasi sempre le equazioni scritte in questa forma.

$$X_u = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial u}\bigg|_e \qquad X_w = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial w}\bigg|_e \qquad X_{\delta_E} = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial \delta_E}\bigg|_e \qquad X_{\delta_T} = \frac{1}{m}\frac{\partial X}{\partial \delta_T}\bigg|_e$$

$$Y_v = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial v}\bigg|_e \qquad Y_{\delta_R} = \frac{1}{m}\frac{\partial Y}{\partial \delta_R}\bigg|_e$$

$$Z_u = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial u}\bigg|_e \qquad Z_w = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial w}\bigg|_e \qquad Z_{\delta_E} = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial \delta_E}\bigg|_e$$

mentre per i termini di momento abbiamo

$$L_v = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial v}\bigg|_e \qquad L_p = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial p}\bigg|_e \qquad L_r = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial r}\bigg|_e \qquad L_{\delta_R} = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial \delta_R}\bigg|_e \qquad L_{\delta_A} = \frac{1}{I_x}\frac{\partial L}{\partial \delta_A}\bigg|_e$$

$$M_u = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial u}\bigg|_e \qquad M_w = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial w}\bigg|_e \qquad M_{\dot{w}} = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial \dot{w}}\bigg|_e \qquad M_q = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial q}\bigg|_e \qquad M_{\delta_E} = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial \delta_E}\bigg|_e$$

$$N_v = \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial v}\bigg|_e \qquad N_p = \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial p}\bigg|_e \qquad N_r = \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial r}\bigg|_e \qquad N_{\delta_R} = \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial \delta_R}\bigg|_e \qquad N_{\delta_A} = \frac{1}{I_z}\frac{\partial M}{\partial \delta_A}\bigg|_e$$

il vantaggio in questo tipo di scrittura è che questi coefficienti hanno un significato fisico visibile: le derivate dimensionali dei termini di forza rappresentano un'accelerazione per unità di velocità o per unità di angolo di controllo, mentre le derivate dimensionali dei termini di momento rappresentano un'accelerazione angolare per unità di velocità o per unità di angolo di controllo. quindi si può fare immediatamente una stima in termini di accelerazioni lineari ed angolari degli affetti prodotti da variazioni delle variabili di stato del problema[11].

17.4 - EQUAZIONI DEL MOTO NELLO SPAZIO DI STATO

Dopo aver linearizzato le equazioni del moto, il passo successivo è quello di rappresentale nello spazio di stato, arrivando a scrivere un sistema del tipo

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$$

[11] Mantenendo le equazioni in forma dimensionale, quando calcoleremo gli autovalori del sistema avremo delle quantità fisiche di dimensione s^{-1} che danno frequenze dimensionali; non dobbiamo convertire, perciò, queste quantità come sarebbe necessario se lavorassimo in termini di grandezze non dimensionali.

dove **X** è il vettore di stato ed ha come elementi le variabili di stato rappresentate da un certo insieme di grandezze che definisce l0 stato del sistema in un certo istante di tempo; la matrice **A** è quadrata ed è detta *matrice di stato*; **B** è la *matrice di controllo* ed infine **U** è il *vettore delle variabili di controllo*. Il sistema così scritto, è posto in una forma detta normale, cioè le derivate rispetto al tempo delle variabili di stato compaiono tutte al primo membro.

Dovremo ricondurre il sistema di equazioni differenziali ordinarie, lineari a coefficienti costanti ad un sistema di questo tipo, tenendo presente che la dinamica longitudinale è disaccoppiata da quella latero-direzionale. Riscriviamo le quattro equazioni longitudinali del sistema in termini di derivate dimensionali

$$\begin{cases} \Delta\dot{u} = -g\cos\gamma_e\Delta\theta + X_u\Delta u + X_w\Delta w + X_{\delta_E}\Delta\delta_E + X_{\delta_T}\Delta\delta_T \\ \Delta\dot{w} = -g\,\mathrm{sen}\,\gamma_e\Delta\theta + u_e\Delta q + Z_u\Delta u + Z_w\Delta w + Z_{\delta_E}\Delta\delta_E \\ \Delta\dot{q} = M_u\Delta u + M_w\Delta w + M_{\dot{w}}\Delta\dot{w} + M_q\Delta q + M_{\delta_E}\Delta\delta_E \\ \Delta\dot{\theta} = \Delta q \end{cases}$$

Questo è un sistema di quattro equazioni del primo ordine nelle quattro incognite Δu, Δw, Δq e $\Delta\theta$, quindi il sistema longitudinale è del quarto ordine, ma non è ancora in forma normale perché nella terza equazione compare a 2° membro $\Delta\dot{w}$. Per arrivare alla forma normale sostituiamo la seconda nella terza e otteniamo

$$\Delta\dot{q} = \tilde{M}_u\Delta u + \tilde{M}_w\Delta w + \tilde{M}_\theta\Delta\theta + \tilde{M}_q\Delta q + \tilde{M}_{\delta_E}\Delta\delta_E$$

dove per semplicità di scrittura abbiamo posto

$$\begin{aligned} \tilde{M}_u &= M_u + \tilde{M}_{\dot{w}}Z_u \\ \tilde{M}_w &= M_w + M_{\dot{w}}Z_w \\ \tilde{M}_q &= M_q + M_{\dot{w}}u_e \\ \tilde{M}_\theta &= -M_{\dot{w}}g\,\mathrm{sen}\,\gamma_e \\ \tilde{M}_{\delta_E} &= M_{\delta_E} + M_{\dot{w}}Z_{\delta_E} \end{aligned}$$

adesso abbiamo tutti gli elementi per scrivere la formulazione delle equazioni longitudinali nello spazio di stato del nostro sistema

variabili di stato $\qquad \mathbf{X}_{lon} = \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta w & \Delta q & \Delta\theta \end{bmatrix}^T$

matrice di stato $$\mathbf{A}_{lon} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g\cos\gamma_e \\ Z_u & Z_w & u_e & -g\,\mathrm{sen}\,\gamma_e \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & \tilde{M}_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice di controllo $$\mathbf{B}_{lon} = \begin{bmatrix} X_{\delta_E} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_E} & 0 \\ \tilde{M}_{\delta_E} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vettore di controllo $$\mathbf{U}_{lon} = \begin{bmatrix} \Delta\delta_A & \Delta\delta_R \end{bmatrix}^T.$$

A volte però non interessano solo le variabili di stato, ma anche altre variabili, sia perchè non possiamo misurare direttamente le variabili di stato, sia perché ci interessano valori di grandezze che non compaiono nel vettore di stato; un esempio tipico è l'angolo di rampa che pur essendo una grandezza fondamentale non compare esplicitamente nel vettore **U**. In questo caso si definisce un'*equazione delle variabili di uscita* che si scrive nella forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{CX} + \mathbf{DU}$$

ricordiamo infatti che stiamo studiando un problema linearizzato e quindi di fatto ammettiamo che esistano relazioni lineari fra una qualunque variabile di uscita di interesse, lo stato ed il controllo del sistema; abbiamo citato il caso in cui interessi determinare la variazione di γ che per definizione è

$$\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha_x = \Delta\theta - \frac{\Delta w}{u_e}$$

in questo esempio dunque, i vari termini della equazione delle variabili di uscita sono

variabile di uscita $$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \Delta\gamma \end{bmatrix}$$

matrice di trasformazione $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{u_e} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice ingresso uscita $$\mathbf{D} = 0$$

Le variabili che rientrano tipicamente nelle variabili di uscita sono ad esempio le componenti delle accelerazioni, misurate da accelerometri posizionati opportunamente nel velivolo.

Passiamo ora alle equazioni latero-direzionali; in termini di derivate dimensionali abbiamo

$$\begin{cases} \Delta\dot{v} = Y_v\Delta v - u_e\Delta r + g\cos\gamma_e\Delta\varphi + Y_{\delta_R}\Delta\delta_R \\ \Delta\dot{p} = \dfrac{I_{xz}}{I_x}\Delta\dot{r} + L_v\Delta v + L_p\Delta p + L_r\Delta r + L_{\delta_A}\Delta\delta_A + L_{\delta_R}\Delta\delta_R \\ \Delta\dot{r} = \dfrac{I_{xz}}{I_x}\Delta\dot{p} + N_v\Delta v + N_p\Delta p + N_r\Delta r + N_{\delta_A}\Delta\delta_A + N_{\delta_R}\Delta\delta_R \\ \Delta\dot{\varphi} = \Delta p + \Delta r\tan\gamma_e \\ \Delta\dot{\psi} = \Delta r\sec\gamma_e\,. \end{cases}$$

Questo sistema è del quinto ordine nelle cinque incognite Δv, Δp, Δr, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$; anche in questo caso però tale sistema non è in forma normale e, per renderlo tale, dobbiamo opportunamente sostituire la seconda equazione nella terza e quindi la terza nella seconda, ottenendo così

$$\Delta\dot{p}\left(1 - \frac{I_{xz}^2}{I_x I_z}\right) = L'_v\Delta v + L'_p\Delta p + L'_r\Delta r + L'_{\delta_A}\Delta\delta_A + L'_{\delta_R}\Delta\delta_R$$
$$\Delta\dot{r}\left(1 - \frac{I_{xz}^2}{I_x I_z}\right) = N'_v\Delta v + N'_p\Delta p + N'_r\Delta r + N'_{\delta_A}\Delta\delta_A + N'_{\delta_R}\Delta\delta_R$$

dove abbiamo posto

$$L'_v = L_v + \frac{I_{xz}}{I_x}N_v \qquad\qquad N'_v = N_v + \frac{I_{xz}}{I_z}L_v$$

ed analogamente per gli altri coefficienti. Osserviamo inoltre che possiamo porre

$$\frac{I_{xz}}{I_x I_z} \approx 0$$

essendo in genere $I_{xz} \ll I_x I_z$. In questo modo abbiamo il sistema di equazioni in forma normale e quindi possiamo scrivere le espressioni del vettore di stato, matrice di stato, matrice dei controlli e del vettore dei controlli nel caso latero-direzionale

variabili di stato $\qquad \mathbf{X}_{lat} = \begin{bmatrix}\Delta v & \Delta p & \Delta r & \Delta\varphi & \Delta\psi\end{bmatrix}^T$

matrice di stato

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} Y_v & 0 & -u_e & g\cos\gamma_e & 0 \\ L'_v & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_v & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan\gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec\gamma_e & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice di controllo

$$\mathbf{B}_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_R} \\ L'_{\delta_A} & L'_{\delta_R} \\ N'_{\delta_A} & N'_{\delta_R} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vettore di controllo

$$\mathbf{U}_{lat} = \begin{bmatrix} \Delta\delta_A & \Delta\delta_R \end{bmatrix}^T$$

Nel caso laterale, però, non si lavora in termini della velocità v ma in termini dell'angolo di derapata; abbiamo peraltro dimostrato che queste due grandezze, a meno di una costante, sono la stessa cosa; ricordando la $\Delta\dot{\alpha}_x = \dfrac{\Delta\dot{w}}{u_e}$, le matrici ed i vettori di stato possono essere riscritti in termini di β come

$$\mathbf{X}_{lat} = \begin{bmatrix} \Delta\beta & \Delta p & \Delta r & \Delta\varphi & \Delta\psi \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{u_e} & 0 & -1 & \dfrac{g}{u_e}\cos\gamma_e & 0 \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan\gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec\gamma_e & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{lat} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{Y_{\delta_R}}{u_e} \\ L'_{\delta_A} & L'_{\delta_R} \\ N'_{\delta_A} & N'_{\delta_R} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{lat} = \begin{bmatrix} \Delta\delta_A & \Delta\delta_R \end{bmatrix}^T$$

Anche nel caso latero-direzionale potremmo scrivere l'equazione delle variabili di uscita, ma non lo facciamo poiché non la useremo mai; una tipica variabile di uscita nel caso latero-direzionale è l'accelerazione laterale.

17.5 - RICHIAMI SUL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE: RISPOSTA AD UN INGRESSO A GRADINO DI UN OSCILLATORE LINEARE SMORZATO

Definiamo la *trasformata di Laplace* di una funzione $x(t)$ come

$$\mathcal{L}[x(t)] = \bar{x}(s)$$

dove s è detta variabile di Laplace; per definizione

$$\mathcal{L}[x(t)] = \bar{x}(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt.$$

Esistono delle tavole che forniscono le trasformate e le antitrasformate di una serie di funzioni di uso frequente. A noi interessa anche esprimere la trasformata della derivata di una funzione: dalla definizione precedente

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{dx}{dt}e^{-st}\,dt = x(t)e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty x(t)\left(-se^{-st}\right)dt = -x(0) + s\bar{x}(s)$$

vera solo per funzioni $x(t)$ tali che

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-st} = 0\,.$$

In maniera del tutto analoga, dato che in seguito servirà, possiamo definire la trasformata della derivata seconda della funzione $x(t)$: tenendo conto semplicemente che la derivata seconda altro non è che la derivata della derivata prima, abbiamo

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] = -\dot{x}(0) - sx(0) + s^2\overline{x}(s)\,.$$

Questa tecnica permette di ridurre un sistema di equazioni differenziali ad un sistema di equazioni algebriche e dopo aver risolto tale sistema algebrico si passa ad antitrasformare i risultati ottenuti. Un altro vantaggio è che le condizioni iniziali vengono direttamente applicate, poiché compaiono già nel sistema trasformato.

Facciamo un esempio: consideriamo l'oscillatore lineare smorzato.

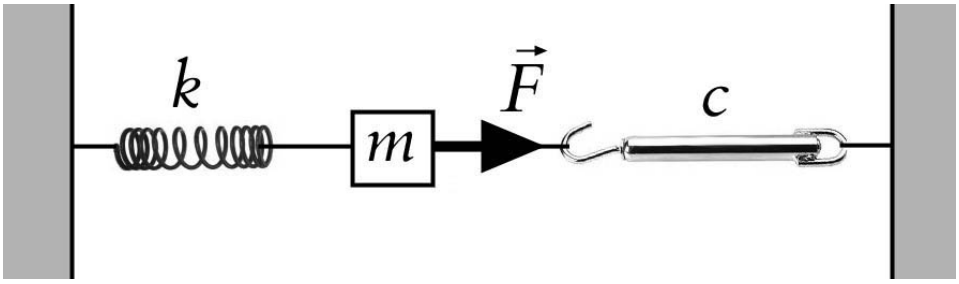


Figura 11

L'equazione del moto di questo sistema unidimensionale è

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

dove $F(t)$ è la forza esterna agente sul nostro sistema. Vogliamo determinare la stabilità e la risposta di questo semplice sistema del second'ordine[12] applicando il metodo della trasformata di Laplace: scriviamo la precedente in forma canonica

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} = f(t)$$

che può essere riscritta come

[12] Vedremo che molto spesso nello studio della dinamica del velivolo ci si riconduce allo studio di un sistema del secondo ordine.

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = f(t)$$

avendo introdotto la *frequenza naturale di oscillazione* del sistema

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ed il *rapporto di smorzamento*

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

ω_n e ζ sono due costanti caratteristiche del sistema. Trasformando secondo Laplace l'equazione così ottenuta troviamo

$$\left[-\dot{x}(0) - sx(0) + s^2\overline{x}(s)\right] - 2\zeta\omega_n x(0) + 2\zeta\omega_n\overline{x}(s) + \omega_n\overline{x}(s) = \overline{f}(s)$$

che risolta in termini della $\overline{x}(s)$ ci dà

$$\overline{x}(s) = \frac{\overline{f} + \dot{x}(0) + sx(0) + 2\zeta\omega_n x(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

questa è detta equazione caratteristica del sistema ed è un'equazione algebrica associata ad un sistema del secondo ordine. Notiamo, come già anticipato, che i termini relativi alle condizioni iniziali del sistema sono presenti direttamente nella soluzione. Consideriamo il sistema a riposo nell'istante iniziale[13] e cioè

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

e consideriamo per quanto riguarda la funzione f un ingresso a gradino[14]

[13] Questa è una situazione tipica quando si studiano problemi di risposta.
[14] Anche questo è un ingresso classico in questi studi.

$$\begin{cases} f(t) = 0 & t = 0 \\ f(t) = 1 & t > 1 \end{cases}$$

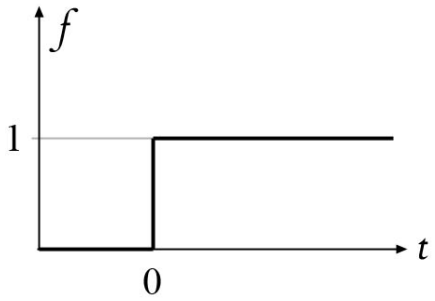


Figura 12

la trasformata della funzione a gradino è

$$\mathcal{L}\left[f(t) \right] = \overline{f}(s) = \frac{1}{s}.$$

Sostituendo questa relazione e le condizioni iniziali nella $\overline{x}(s)$ abbiamo la soluzione del problema nel dominio della frequenza

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}.$$

In generale possiamo scrivere tale soluzione come

$$\overline{x}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\ldots(s-\lambda_n)}$$

ed osserviamo come nel nostro esempio si abbia $N(s) = 1$ ed $n = 1$. Per antitrasformare questa funzione, applichiamo il metodo delle frazioni parziali che vale quando il numeratore è un polinomio in s di grado inferiore al denominatore[15]; con questo metodo possiamo scrivere la precedente in modo che sia facilmente antitrasformabile, arrivando alla forma seguente

$$\overline{x}(s) = \sum_{i=1}^{3} \frac{C_i}{s - \lambda_i}$$

il coefficiente C_i è dato da

[15] Cioè quando la frazione è propria.

$$C_i = (s-\lambda_i)\,\overline{x}(s)\Big|_{s=\lambda_i} = \left\{\frac{(s-\lambda_i)\,N(s)}{D(s)}\right\}_{s=\lambda_i}$$

nel nostro problema $\lambda_3 = 0$, quindi

$$C_1 = \left\{\frac{(s-\lambda_1)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right\}_{s=\lambda_1} = \left\{\frac{(s-\lambda_1)}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\right\}_{s=\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}$$

e analogamente

$$C_2 = \left\{\frac{(s-\lambda_2)}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\right\}_{s=\lambda_2} = -\frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}$$

$$C_3 = \left\{\frac{s}{s(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}\right\}_{s=\lambda_3=0} = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$$

la soluzione nello spazio di stato è allora

$$\overline{x}(s) = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{1}{(s-\lambda_1)} - \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{1}{(s-\lambda_2)} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\frac{1}{s}$$

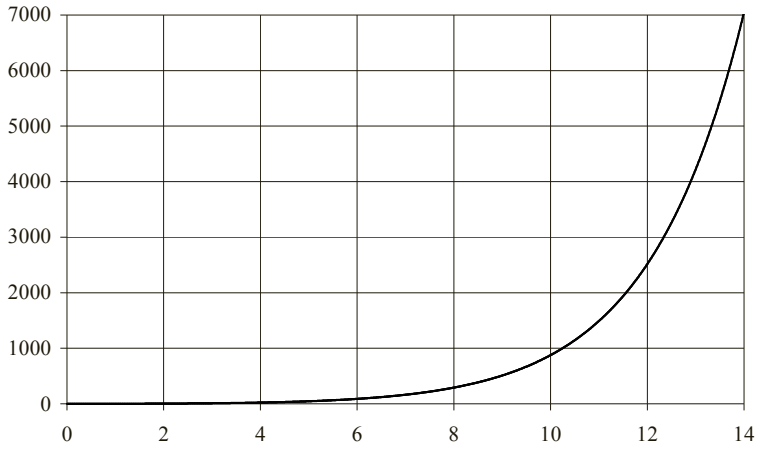
e la sua antitrasformata è

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$$

e questa è l'espressione della risposta nel dominio del tempo. Osserviamo che il terzo termine non dipende dal tempo ed è quindi rappresentativo della cosiddetta risposta stazionaria; la dipendenza del tempo compare invece negli altri due termini ed è legata al valore delle radici dell'equazione caratteristica.

Analizziamo separatamente i due casi di radici reali e di radici complesse coniugate.

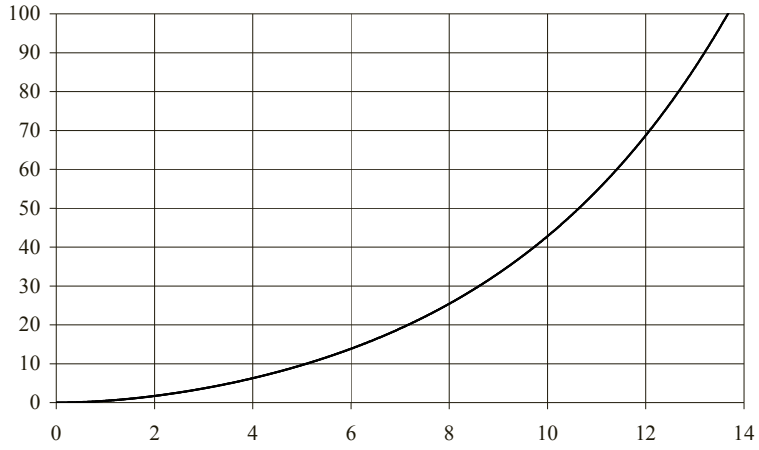
• RADICI REALI POSITIVE



$\lambda_1 = 0,2$ e $\lambda_2 = 0,5$ - Figura 13

ci aspettiamo una risposta di tipo divergente, il sistema non raggiunge il valore stazionario cioè non converge al valore stazionario.

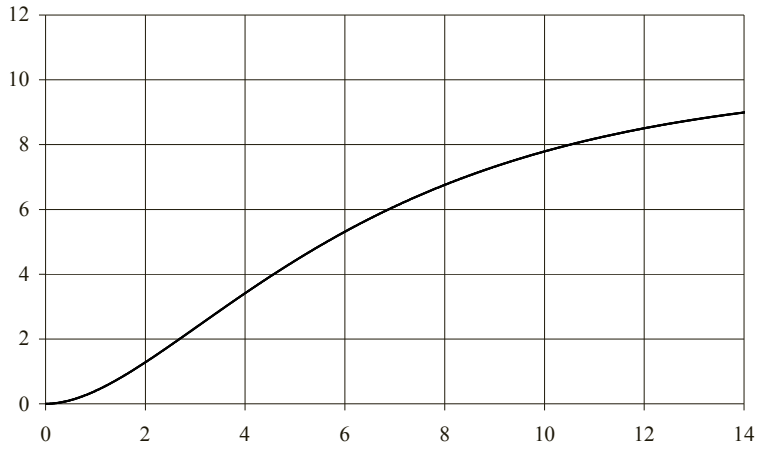
• UNA RADICE POSITIVA ED UNA NEGATIVA



$\lambda_1 = 0,2$ e $\lambda_2 = -0,5$ - Figura 14

la risposta è sempre di tipo divergente. Poiché il termine con radice negativa va perdendo importanza al crescere di *t*, la risposta sarà caratterizzata dal termine con radice positiva, il quale cresce cresce.

• RADICI REALI NEGATIVE



$\lambda_1 = -0,2$ e $\lambda_2 = -0,5$ - Figura 15

la risposta è convergente e dopo un certo transitorio il sistema tenderà a raggiungere una condizione stazionaria al valore $\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$ (nell'esempio 10).

• RADICI COMPLESSE CONIUGATE

Le due radici si scrivono in questo caso come

$$\lambda_1 = n + \omega i \qquad \lambda_2 = n - \omega i$$

dove n è la parte reale e ω è il coefficiente della parte immaginaria; si può dimostrare[16] che

$$n = -\zeta \omega_n$$
$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Per le radici complesse coniugate la soluzione si esprime come

$$x(t) = \frac{1}{n^2 + \omega^2} + \frac{1}{(n + i\omega)\, 2i\omega} e^{(n+i\omega)t} - \frac{1}{(n - i\omega)\, 2i\omega} e^{(n-i\omega)t} =$$
$$= \frac{1}{n^2 + \omega^2} \left[1 + e^{nt} \left(\frac{n - i\omega}{2i\omega} e^{i\omega t} - \frac{n + i\omega}{2i\omega} e^{-i\omega t} \right) \right]$$

[16] Basta calcolare le radici dell'equazione caratteristica.

e tenendo presente che

$$\operatorname{sen}\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i} \qquad\qquad \cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2i}$$

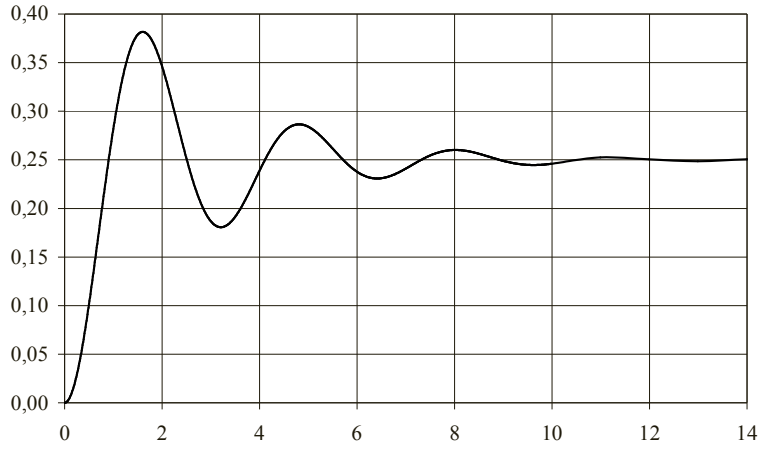
abbiamo

$$x(t) = \frac{1}{n^2 + \omega^2}\left[1 + e^{nt}\left(\frac{n}{\omega}\operatorname{sen}\omega t - \cos\omega t\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]\right\}$$

da cui si può notare che la risposta è di tipo oscillatorio. In questa espressione compare un termine rappresentativo della risposta stazionaria (cioè un termine che non dipende dal tempo), un termine che invece dipende in modo esponenziale dal tempo ed infine un termine di tipo oscillatorio (quello fra parentesi quadre). Ricordiamo che ζ rappresenta il rapporto di smorzamento, perciò è inutile considerare il caso in cui $|\zeta| > 1$; inoltre qui stiamo considerando casi in cui le radici dell'equazione caratteristica siano complesse coniugate quindi $-1 < \zeta < 1$ (se $\zeta = \pm 1$ le radici sono reali coincidenti). Vediamo i vari casi possibili.

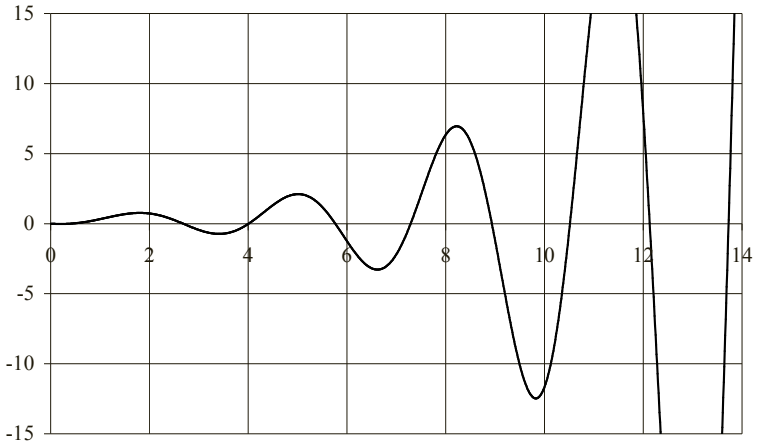
1) $0 < \zeta < 1$



$\zeta = 0{,}2$ e $\omega_n = 2$ - Figura 16

In questo caso avremo una risposta di tipo convergente al valore stazionario $\frac{1}{\omega_n^2}$.

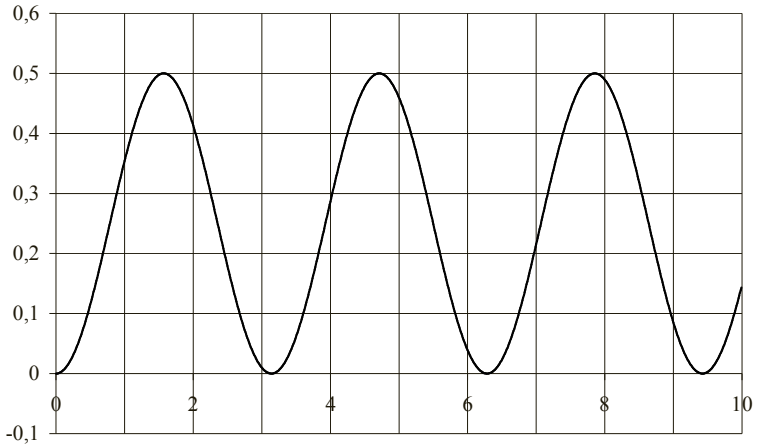
2) $-1 < \zeta < 0$



$\zeta = -0,2$ e $\omega_n = 2$ - Figura 17

In questo caso l'esponente di *e* è positivo, quindi la funzione $x(t)$ è crescente con andamento esponenziale e perciò darà origine ad una risposta di tipo oscillatorio divergente.

3) $\zeta = 0$



$\zeta = 0$ e $\omega_n = 2$ - Figura 18

In questo caso il sistema ha smorzamento nullo, perciò la risposta è di tipo armonico.

Noi siamo interessati alla stabilità del sistema più che alla sua risposta, quindi possiamo concludere che nel caso in cui il sistema abbia una dinamica di tipo oscillatorio, affinché il sistema sia dinamicamente stabile (ossia affinché la risposta sia convergente al valore stazionario) è necessario che la parte reale dell'autovalore sia minore di zero.

Per i velivoli l'analisi è abbastanza semplificata perché possiamo avere, almeno in casi convenzionali, o radici reali oppure radici complesse coniugate; quindi non possiamo avere il caso di radici nulle, che invece è il caso importante nella dinamica di assetto dei satelliti.

Capitolo 18

STABILITÀ DINAMICA LONGITUDINALE DEL VELIVOLO

18.1 - SOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ CON IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Scriviamo l'equazione di stato del velivolo nella forma

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$$

ponendo cioè uguale a zero l'azione dei controlli: stiamo infatti conducendo un'analisi di stabilità ed abbiamo visto come questa non dipenda dalle azioni di controllo[1].

Riscriviamo la matrice di stato nel caso longitudinale in una condizione di equilibrio in volo orizzontale, cioè con $\gamma_e = 0$, il che corrisponde ad un caso che ha molto interesse da un punto di vista pratico[2]; sotto tali ipotesi resta

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_e & 0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una perturbazione dello stato di riferimento del sistema in assenza di azioni sul sistema stesso, quindi in assenza di azioni dei controlli rispetto alla condizione di equilibrio, può dipendere da un valore diverso da zero dello stato iniziale del sistema. Possiamo cioè avere lo stato del sistema in un punto diverso dall'origine, la quale corrisponde al valore nullo di tutte le variabili di perturbazione; se abbiamo condizioni iniziali diverse da zero, cioè se $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \neq 0$, non ci troviamo di fronte ad un problema di risposta ad una perturbazione, ma ad un problema di dinamica libera. Applicando la trasformata di Laplace alla $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX}$ si trova

$$-\mathbf{X}(0) + s\bar{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}(s)$$

da cui

---

[1] D'ora in poi ometteremo il pedice *lon*, visto che in questo capitolo parleremo esclusivamente della dinamica longitudinale.

[2] Compiremo gran parte degli studi di stabilità in condizioni di volo in crociera ad angolo di rampa nullo.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\bar{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

e quindi

$$\bar{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}_0$$

questa relazione rappresenta la soluzione del problema nel dominio della frequenza cioè nel dominio della variabile di Laplace; se vogliamo la soluzione nel dominio del tempo non resta che antitrasformare la relazione appena ottenuta. Ricordiamo che per definizione

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

dove con $\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ si denota la matrice aggiunta[3], e

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = D(s) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)(s - \lambda_4)$$

dove λ_i sono le radici di $D(s)$, l'equazione caratteristica del sistema, e sono anche gli *autovalori* della matrice di stato del sistema (**A**). Si può dimostrare che gli elementi dell'aggiunta sono polinomi in *s* di grado inferiore a quello del denominatore; questo è importante perché solo con questa condizione possiamo applicare il metodo delle frazioni parziali e scrivere l'espressione dell'antitrasformata della $\mathbf{X}(s)$ nel modo seguente

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{4}\left[(s - \lambda_i)\frac{\mathrm{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\right]_{s=\lambda_i}\mathbf{X}_0\, e^{\lambda_i t}$$

questa è l'espressione nel tempo dell'evoluzione del sistema una volta assegnate delle condizioni iniziali; al numeratore troviamo una matrice 4×4, mentre al denominatore una quantità scalare. La soluzione in forma compatta si scrive

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{4}\mathbf{X}_i\, e^{\lambda_i t}$$

---

[3] Si chiama matrice aggiunta di una matrice **A** di ordine *n*, la matrice quadrata agg(**A**) di ordine *n* che ha, al posto (*i*,*j*), l'aggiunto dell'elemento di posto (*j*,*i*) della matrice **A** (si faccia attenzione allo scambio degli indici). Si chiama aggiunto di a_{ij} il numero reale $a_{ij} = (-1)^{i+j}\det\mathbf{A}_{ij}$, dove $\mathbf{A}_{ij}$ è la matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuta da **A** sopprimendo la *i*-ma riga e la *j*-ma colonna.

dove

$$\mathbf{X}_i = \left[(s - \lambda_i) \frac{\text{agg}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right]_{s=\lambda_i} \mathbf{X}_0 .$$

A noi non interessa calcolare la legge dell'evoluzione del sistema, ma solo identificare se il sistema sia stabile oppure instabile. Lo studio di un sistema dinamico nell'ambito di una analisi di stabilità non è completato dall'analisi degli autovalori, ma determinando anche gli autovettori, i quali, nel caso della dinamica strutturale, forniscono le forme modali del sistema e quindi quali variabili siano eccitate in ognuno dei modi caratteristici che corrispondono agli autovalori[4]. Quando parliamo di autovettori parliamo delle cosiddette autosoluzioni: un'autosoluzione è una soluzione particolare dell'equazione di stato nella quale non compare la sommatoria di tutti i modi, ma di uno solo di essi

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_r e^{\lambda_r t}$$

questa è perciò solo una delle quattro soluzioni del caso della dinamica longitudinale. $\mathbf{X}_r$ prende il nome di *autovettore*; verifichiamo che questa sia una soluzione della $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ sostituendola nella equazione di stato

$$\mathbf{X}_r \lambda_r e^{\lambda_r t} = \mathbf{A}\mathbf{X}_r e^{\lambda_r t} \qquad \Rightarrow \qquad (\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}_r = 0$$

perché $\mathbf{X}_r$ sia un'autosoluzione occorre che tale relazione sia soddisfatta; a questa equazione vettoriale corrisponde un sistema di equazioni lineari algebriche omogenee, che ammette la soluzione $\mathbf{X}_r = 0$ ben poco utile; la condizione che deve essere soddisfatta per non avere tali soluzioni è che

$$\det(\lambda_r \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

e questa condizione è sempre soddisfatta dato che λ_r è proprio una radice dell'equazione caratteristica. Quindi questo sistema di equazioni ammette soluzioni non banali definite a meno di una costante. Gli autovettori sono infatti definiti a meno di una costante e possiamo dire che un autovettore rappresenti una condizione iniziale del sistema tale che tutte le variabili di stato abbiano la stessa dipendenza dal tempo, in quanto la dipendenza dal tempo è data da un unico autovalore. Quando abbiamo bisogno di informazioni sulla forma

[4] Gli autovettori quindi non danno informazioni sulla stabilità del sistema, ma sui modi.

modale, cioè quando vogliamo vedere in ciascuno dei modi caratteristici longitudinali del velivolo in che rapporto di ampiezza e di fase siano le variabili di stato una rispetto all'altra, l'evoluzione nel tempo dello stato del sistema è rappresentato dagli autovettori.

18.2 - MODI CARATTERISTICI: FUGOIDE, CORTO PERIODO, MODO DI *TUCK* E TERZO MODO OSCILLATORIO

Supponiamo di aver applicato il procedimento visto nel § precedente ad un velivolo con caratteristiche convenzionali (cioè con Mach di crociera sufficientemente basso, pertanto non intervengono effetti di compressibilità); in condizioni convenzionali, i 4 autovalori ottenuti sono dati da due coppie di autovalori complessi coniugati e ciò significa avere due modi caratteristici di tipo oscillatorio. La prima coppia di autovalori corrisponde ad un modo oscillatorio stabile ad elevato smorzamento ($n < 0$ e piuttosto grande) e ad alta frequenza[5] (ω piuttosto grande): questo modo prende il nome di *modo di corto periodo*. La seconda coppia di autovalori corrisponde ad un modo oscillatorio con basso smorzamento ($n < 0$ e piuttosto piccolo) e bassa frequenza[6] (ω piccola): questo modo prende il nome di *modo fugoide*[7].

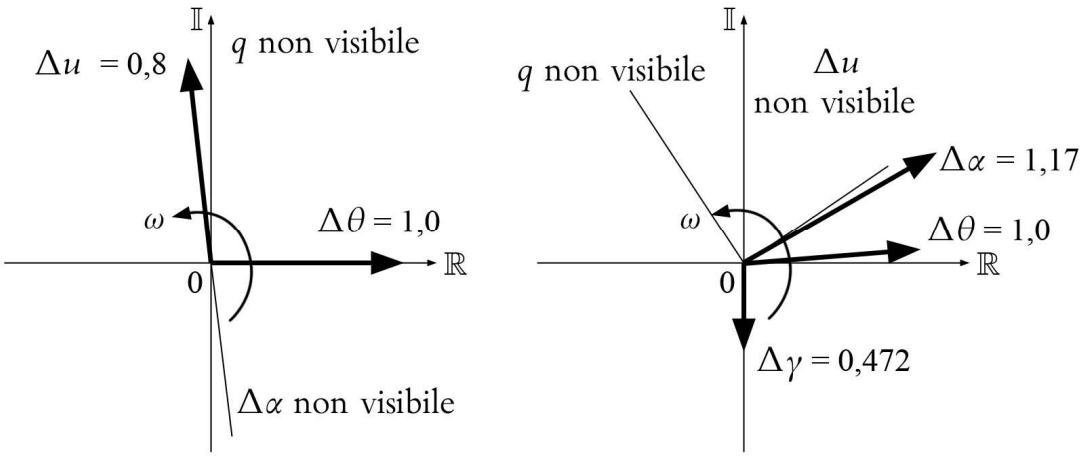
Una volta calcolati gli autovalori conosciamo tutto ciò che riguarda la dipendenza dal tempo del nostro sistema quando le condizioni iniziali siano diverse da zero. Questi tipo di risposte sono presenti, come vedremo, anche quando vengano fornite certe azioni sui controlli. Non abbiamo però ancora nessuna informazione sulle forme modali, cioè sulle variabili che risultano eccitate durante l'oscillazione di modo fugoide e di corto periodo. Queste informazioni derivano dall'analisi degli autovettori; supponiamo allora di aver fatto questa analisi, il cui risultato tipico è rappresentato nei due grafici riportati in figura 1. Parliamo prima del modo fugoide: ricordiamo che gli autovettori sono definiti a meno di una costante, quindi nella rappresentazione nel piano complesso[8] sono riportati normalizzati rispetto a $\Delta\theta$.

[5] Un modo ad alta frequenza ha un periodo di qualche secondo (2 - 4 s).

[6] Il periodo può arrivare anche a qualche minuto.

[7] Questo studio fu compiuto per la prima volta da un aerodinamico (Lanchester) all'inizio del secolo il quale osservò queste oscillazioni su modelli di alianti; lanciando dei modelli non propulsi, egli si accorse che il velivolo aveva una strana oscillazione con smorzamento piuttosto basso e periodo molto lungo. Il nome dato allora a questa oscillazione fu di *fugoide*.

[8] Se gli autovalori sono complessi coniugati, così saranno gli autovettori, perciò li rappresentiamo nel piano complesso.



Modo fugoide e modo di corto periodo - Figura 1

Le informazioni importantissime che otteniamo da questo tipo di analisi riguardano l'ampiezza e la fase (anche se quest'ultima non ci interessa molto) delle diverse variabili di stato, l'una rispetto all'altra. Osserviamo come nell'oscillazione fugoide, se la perturbazione sull'angolo di beccheggio è pari ad 1 ($\Delta\theta = 1$), nel caso di velivolo convenzionale, la perturbazione Δu sulla componente di velocità longitudinale è pari a 0,8 quindi è quasi dello stesso ordine di grandezza; invece la perturbazione su α (cioè su w) e su q non sono praticamente visibili perché sono notevolmente minori rispetto a quelle su θ e u. Gli autovettori rappresentano una condizione iniziale delle autosoluzioni, cioè se abbiamo un'oscillazione della fugoide le uniche variabili eccitate durante questa oscillazione, sono la velocità u e l'angolo di beccheggio; la cosa più importante che si deduce da questo discorso è che nel corso dell'oscillazione della fugoide sia l'angolo d'attacco che la velocità di beccheggio si mantengono praticamente costanti. Il modo fugoide è un modo poco smorzato e di periodo grande durante il quale l'angolo d'attacco si mantiene praticamente costante, mentre varia la componente longitudinale della velocità e l'angolo di beccheggio. Il $\Delta\theta$ varia molto lentamente e quindi la corrispondente velocità q sarà molto bassa.

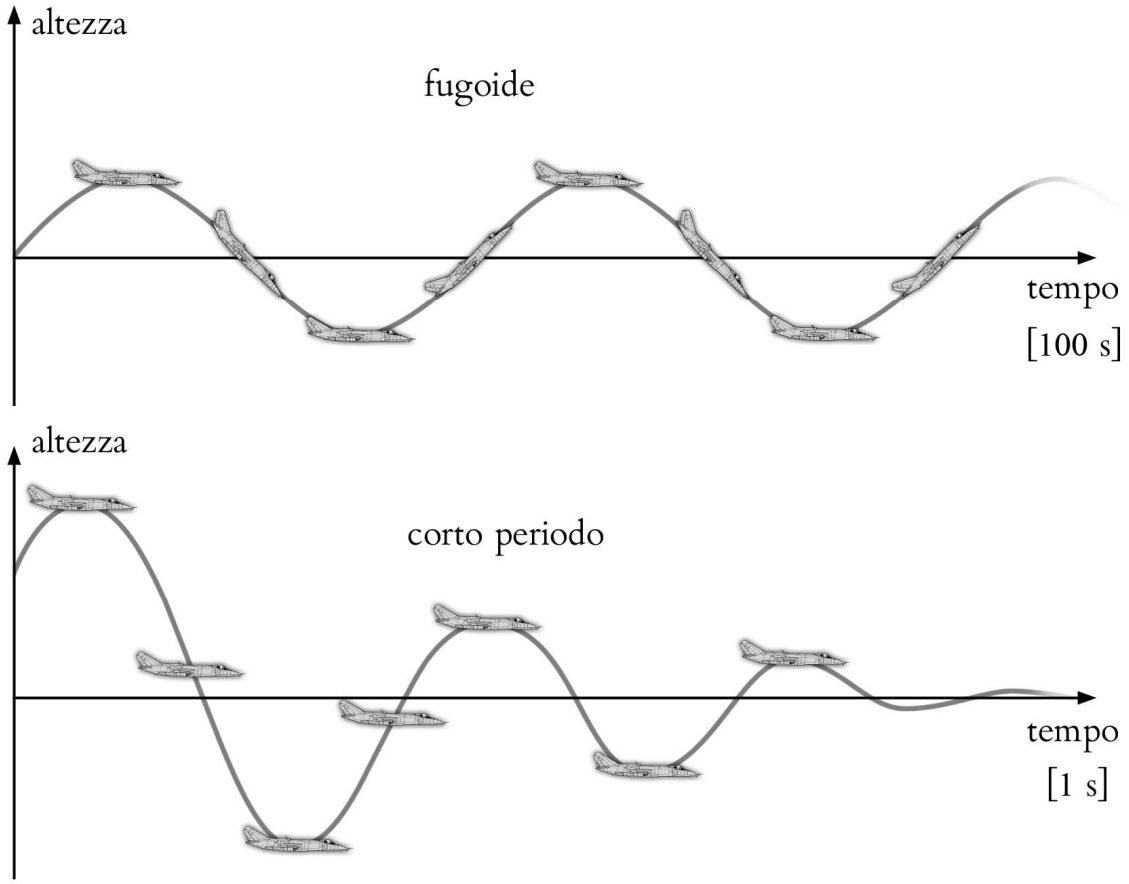


Figura 2

Per il corto periodo osserviamo come α e θ siano dello stesso ordine di grandezza e questa volta sono le variazioni della velocità longitudinale e della velocità di beccheggio ad essere di fatto trascurabili rispetto alle altre due. L'informazione più importante deducibile da questo secondo grafico è che il modo di corto periodo è un modo nel quale osserviamo variazioni dell'angolo di beccheggio e d'attacco e che durante questa oscillazione (di alta frequenza e molto smorzata) la velocità di volo è praticamente inalterata.

Forniamo adesso una descrizione qualitativa dei modi descritti (si veda figura 2). Nel modo fugoide il periodo è molto lungo ed osserviamo come durante l'oscillazione il velivolo mantenga di fatto inalterato α; inoltre il velivolo ha rilevanti perturbazioni della traiettoria, infatti se $\Delta\alpha \approx 0$ si ha $\Delta\gamma \approx \Delta\theta$: inizialmente il velivolo sale (θ iniziale è positivo cioè γ è positivo), ma a causa della traiettoria in salita la velocità va diminuendo ed allora se diminuisce la velocità con α costante, diminuisce L; il velivolo perciò inizia a scendere, aumenta nuovamente la velocità e, poiché α è costante, aumenta anche L; in questo modo la traiettoria è riportata verso l'alto ed il fenomeno si ripete con uno smorzamento molto piccolo. Quindi possiamo dire che il modo fugoide è un modo di traiettoria: osserviamo come sia visibile la variazione di quota e la perturbazione della posizione del baricentro.

Nel modo di corto periodo la velocità è costante ed il velivolo ruota attorno al baricentro producendo un $\Delta\alpha$; il modo consiste dunque in un'oscillazione ad alta frequenza e molto smorzata del velivolo attorno al suo baricentro, di conseguenza il corto periodo è un modo associato alla dinamica di assetto: la traiettoria è influenzata molto poco dall'oscillazione (c'è un $\Delta\gamma$, ma le cose avvengono molto rapidamente e quindi si può concludere che per ciò che riguarda il moto del baricentro il corto periodo ha un effetto poco evidente).

I modi visti sono quelli classici, ma la dinamica longitudinale può presentare situazioni un po' diverse; una di queste è quella dovuta ad un certo effetto della compressibilità e prende il nome di *modo di tuck*. In regime transonico, quando cioè si avvertono gli effetti della compressibilità (volo in crociera degli aviogetti da trasporto), le radici del corto periodo subiscono, all'aumentare di *M*, un leggero aumento sia di frequenza che di smorzamento, ma dal punto di vista della risposta qualitativa del sistema non accade niente di rilevante. Molto importante è invece l'effetto sul modo fugoide: all'aumentare di *M* le radici del fugoide tendono a spostarsi verso l'asse reale riducendo la parte immaginaria dell'autovalore finché il modo degenera in una coppia di modi aperiodici; una delle due radici si sposta verso sinistra nel piano complesso (determinando un modo aperiodico smorzato che non ci interessa), mentre l'altra si sposta verso destra e tende ad attraversare l'asse immaginario producendo un modo aperiodico divergente detto modo di *tuck*.

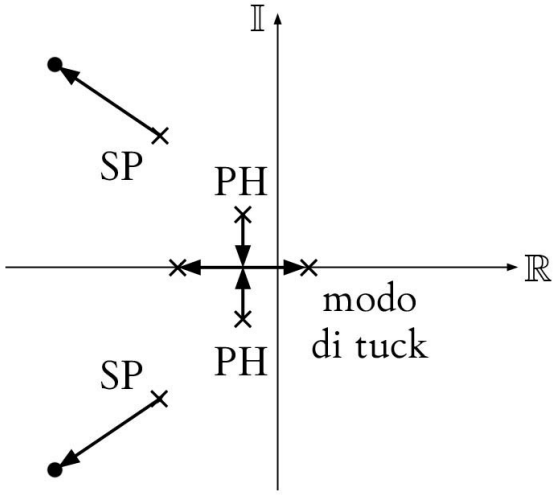


Figura 3

Il modo di *tuck* è un modo nel quale le variabili u e γ sono eccitate con segno opposto: se aumenta γ, allora u decresce e non succede niente di rilevante, ma se γ diminuisce, u aumenta ed il modo è divergente. Nella situazione in cui si manifesti il modo divergente si verifica una tendenza del velivolo a picchiare (diminuzione di γ) a cui si associa un aumento

della velocità di volo. Tale modo è fortemente influenzato dalla derivata[9] C_{M_u}. Come vedremo tra poco nel § 3, il fatto che la parte reale di una radice, da negativa, diventi positiva viola il *criterio generale di stabilità statica*.

Un'altra situazione, meno importante, è quella che porta alla nascita di un *terzo modo oscillatorio*; l'insorgere di tale modo dipende dalla posizione del baricentro, o meglio dal valore del margine statico; dunque quando studiamo il terzo modo oscillatorio studiamo l'effetto della posizione del baricentro sulla stabilità dinamica longitudinale. Partendo da una situazione in cui il margine statico sia positivo (stabilità statica) vediamo (figura 4) cosa accada alle radici del corto periodo e del fugoide man mano che il margine statico diminuisca, cioè man mano che il baricentro si sposti verso la coda. Per il corto periodo l'effetto iniziale riguarda solo la parte immaginaria delle radici, le quali si spostano verso l'asse reale fino a degenerare, per un certo valore, ancora positivo, del margine statico, in una coppia di radici reali e coincidenti; a questo punto il corto periodo non esiste più ed abbiamo due modi aperiodici convergenti. Continuando a diminuire il margine statico, le due radici (ormai reali) si spostano una verso sinistra e l'altra verso destra.

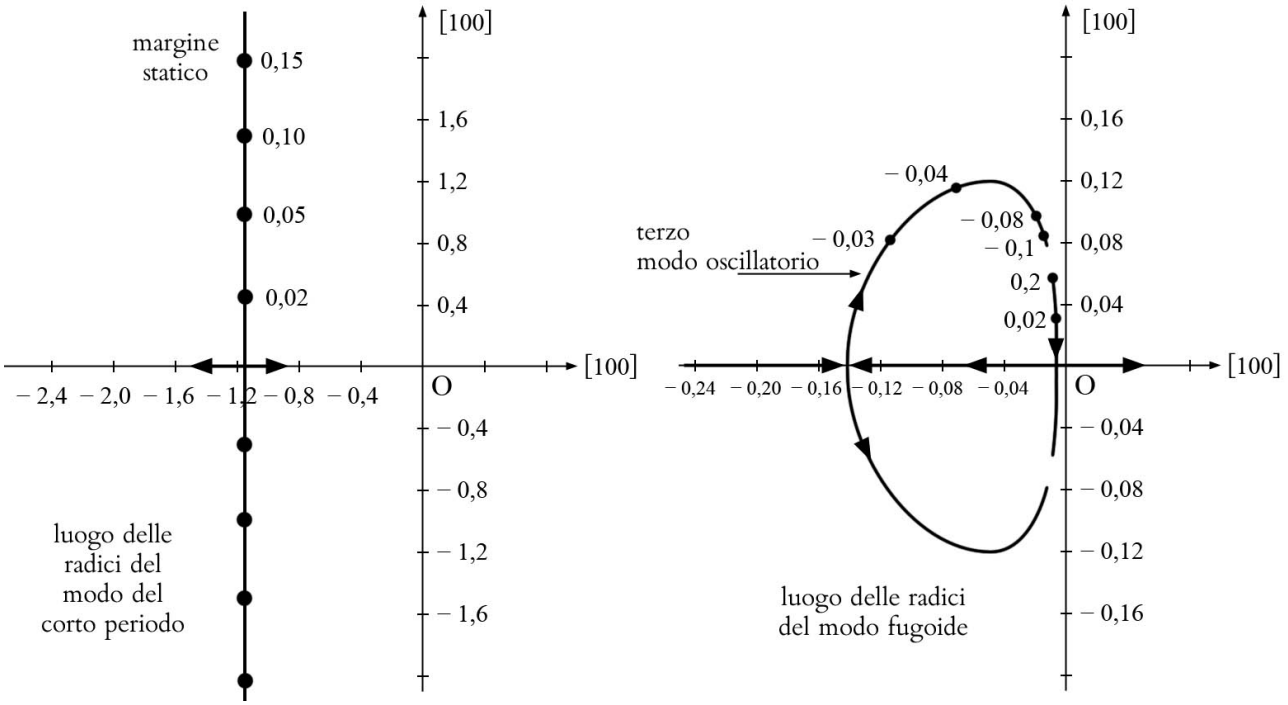


Figura 4

Anche nel caso del fugoide, l'effetto della diminuzione del margine statico riguarda la parte immaginaria delle radici, le quali arrivano a degenerare (per un valore ancora positivo del margine statico) in due modi aperiodici: una delle due radici si sposta verso sinistra dan-

[9] Osserviamo che fino a questo punto non abbiamo mai discusso criteri di stabilità statica in cui interviene tale derivata.

do luogo ad un modo sempre più smorzato, l'altra procede verso destra e per un valore nullo del margine statico attraversa l'asse immaginario e forma un modo aperiodico divergente. Osserviamo come la violazione del criterio di stabilità statica, che impone un valore positivo della rigidezza di beccheggio, corrisponde al fatto che una radice reale da negativa diventi positiva; se quindi viene meno la stabilità statica, a livello di dinamica ciò comporta che un autovalore reale da negativo diventi positivo. Notando che la scala in cui sono riportati i due grafici non è la stessa[10], è intuitivo che la radice del corto periodo che si sposti verso destra si incontrerà con la radice del fugoide che si sposta verso sinistra: quelle che erano due radici reali tornano a formare una coppia di radici e complesse coniugate, dando luogo ad un nuovo modo periodico, detto terzo modo oscillatorio. In questa situazione non dobbiamo più aspettarci di riconoscere un fugoide ed un corto periodo poiché la dinamica è caratterizzata dal terzo modo oscillatorio (che non ha né le caratteristiche della fugoide, né quelle del corto periodo), ma soprattutto dal moto aperiodico divergente che insorge quando il margine statico diventa negativo, cioè quando il criterio di stabilità statica longitudinale viene violato. Situazioni di questo tipo si presentano nei velivoli ad alte prestazioni come l'F-16; tale caccia in certe condizioni di volo presenta il terzo modo oscillatorio e in volo subsonico presenta una dinamica longitudinale divergente poiché, come abbiamo già visto, questo apparecchio è staticamente instabile; l'aereo viene riportato in una situazione stabilizzata attraverso un sistema di aumento di stabilità in modo che vengano soddisfatte le *qualità di volo*[11].

18.3 - CRITERIO GENERALE DI STABILITÀ

Abbiamo visto come l'analisi dinamica passi attraverso il calcolo di autovalori e di autovettori. Nel corso di un'analisi di stabilità non ci si può accontentare di sapere semplicemente se il velivolo sia stabile o meno: dovendo far sempre riferimento alle qualità di volo non possiamo rinunciare a conoscere le frequenze naturali, gli smorzamenti e le caratteristiche principali dei diversi modi. Se però, ad esempio, in uno studio di prima approssimazione, quello che ci interessa determinare è solo la stabilità del velivolo, possiamo anche evitare di

[10] La parte reale degli autovalori del fugoide è molto più piccola (anche di un ordine di grandezza) di quella degli autovalori del corto periodo.

[11] Le *qualità di volo* costituiscono una parte della meccanica del volo e definiscono un'insieme di norme da soddisfare per quanto riguarda la dinamica e la risposta ai controlli del velivolo. Nell'ambito delle qualità di volo si studiano e si definiscono, per esempio, quali debbano essere i valori della frequenza naturale e dello smorzamento per i diversi velivoli; immaginiamo che un progettista abbia realizzato un certo velivolo il quale ha caratteristiche dinamiche di base rappresentate da determinati valori di frequenza naturale e smorzamento per ciascun modo caratteristico. Nell'ambito delle normative sulle qualità di volo il progettista verifica se i valori ottenuti siano conformi con quelli previsti; se ciò non accadesse o si modifica la configurazione del velivolo, in modo che si modifichino le derivate di stabilità e quindi le caratteristiche dinamiche, oppure si utilizza un sistema di aumento di stabilità.

calcolare gli autovalori, poiché esistono dei criteri[12] i quali, tramite l'analisi dei coefficienti dell'equazione caratteristica del sistema, permettono di valutare la stabilità del sistema velivolo. Riscriveremo l'equazione caratteristica del sistema di quarto ordine

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

affinché questo sistema sia stabile deve essere

$$\begin{cases} a_1 > 0 \qquad a_2 > 0 \qquad a_3 > 0 \qquad a_4 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0 \end{cases}$$ discriminante di Routh (1905).

Se una di queste condizioni è soddisfatta il sistema è dinamicamente stabile, cioè tutte le radici reali sono negative e la parte reale di tutte le radici complesse coniugate è altrettanto negativa. Di questi criteri quelli più importanti sono

$$\begin{cases} a_4 > 0 \\ a_3(a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \end{cases}$$

Se il coefficiente a_4 diventa negativo al variare di uno dei parametri del moto (per esempio al variare di una delle derivate di stabilità), significa che una radice reale è diventata positiva, mentre se è il discriminante di Routh a diventare negativo, la parte reale di una coppia di radici complesse coniugate è diventata positiva. Possiamo associare il coefficiente a_4 alla stabilità statica del velivolo ed in particolare $a_4 = 0$ corrisponde ad una condizione limite per la stabilità statica. Ciò è immediato tenendo conto che a_4 è ciò che resta dell'equazione caratteristica in condizioni stazionarie, cioè per $s = 0$ (ricordiamo che s rappresenta una frequenza). La condizione $a_4 \geqslant 0$ corrisponde a quello che chiamiamo *criterio generale di stabilità statica*. Tale criterio è dedotto in modo corretto dal punto di vista matematico dall'equazione caratteristica del sistema e vedremo come tale criterio sia collegato a quello sulla rigidezza di beccheggio. Ricordiamo che introducendo la stabilità statica longitudinale abbiamo affermato che il criterio sulla rigidezza di beccheggio non è una condizione né necessaria né sufficiente per la stabilità dinamica; riscriviamo infatti la matrice di stato longitudinale

[12] Questi metodi sono stati sviluppati all'inizio del secolo (1900-1905) quando esisteva il problema pratico del calcolo delle radici dell'equazione caratteristica.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_e & 0 \\ M_u & M_w & M_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dove per ipotesi abbiamo posto $M_{\dot{w}} = 0$. Notiamo poi che abbiamo

$$a_4 = \det(-\mathbf{A}) = g\left(Z_u M_w - M_u Z_w\right)$$

perciò, affinché il sistema sia stabile, deve essere

$$\frac{M_w}{Z_w} - \frac{M_u}{Z_u} > 0$$

e quindi, ricordando le

$$Z_u = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial u}\bigg|_e = \frac{-\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c}\left(C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}\right)}{m} \qquad Z_w = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial w}\bigg|_e = \frac{-\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c}\left(C_{L_\alpha} + C_{D_e}\right)}{m}$$

e le

$$M_u = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial u}\bigg|_e = \frac{\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c} C_{M_u}}{I_y} \qquad M_w = \frac{1}{I_y}\frac{\partial M}{\partial w}\bigg|_e = \frac{\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c} C_{M_\alpha}}{I_y}$$

del capitolo precedente, abbiamo

$$\frac{\dfrac{\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c} C_{M_\alpha}}{I_y}}{\dfrac{-\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c}\left(C_{L_\alpha} + C_{D_e}\right)}{m}} - \frac{\dfrac{\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c} C_{M_u}}{I_y}}{\dfrac{-\frac{1}{2}\varrho u_e S\bar{c}\left(C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}\right)}{m}} > 0 .$$

Semplificando si ottiene

$$\frac{C_{M_\alpha}}{C_{L_\alpha}} < \frac{C_{M_u}}{C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}}$$

avendo tenuto conto che $C_{D_e} \ll C_{L_\alpha}$. Introducendo il margine statico, la precedente diventa

$$\frac{x_{cg}}{\overline{c}} - \frac{x_N}{\overline{c}} < \frac{C_{M_u}}{C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}}$$

quindi affinché il criterio generale di stabilità statica sia soddisfatto, la posizione del baricentro deve essere tale che

$$\frac{x_{cg}}{\overline{c}} < \frac{x_N}{\overline{c}} + \frac{C_{M_u}}{C_{L_{\hat{u}}} + 2C_{L_e}}$$

questo è un criterio di stabilità statica longitudinale di tipo generale e correttamente formulato dal punto di vista matematico. Rispetto a quanto avevamo detto parlando della stabilità statica longitudinale osserviamo che compare un termine in più che dipende proprio dalla derivata C_{M_u}; ricordiamo che tale derivata, per $M \ll 1$ è praticamente nulla e quindi il criterio si riduce a quello già formulato parlando di stabilità statica. In regime transonico invece C_{M_u} è negativa ed è circa pari a $-0{,}1$; supponendo inoltre che $C_{L_u} - 2C_{L_e} \approx 1$, il criterio di stabilità si scrive

$$x_{cg} < x_N - 0{,}1\,\overline{c}$$

Quindi la posizione del baricentro non deve solo essere anteriore al punto neutro, ma deve distare da questo un decimo di $\overline{c}$. In regime transonico la condizione basata sulla rigidezza di beccheggio non è più sufficiente, perché anche se il baricentro si trova davanti al punto neutro, la precedente può non essere soddisfatta[13]. La dinamica indotta dagli effetti della compressibilità è molto importante nel corso della crociera ed è in genere controllata da sistemi automatici; questi, durante la crociera, mantengono sotto controllo il numero di Mach agendo sull'equilibratore oppure sullo stabilizzatore, a seconda dei casi.

[13] Una situazione di questo tipo si è verificata su di un 707, il quale vola in crociera ad un Mach transonico: si è innescato un modo di *tuck* divergente, perciò il velivolo ha iniziato a picchiare perdendo quota. Inizialmente i piloti non poterono far molto perché, a quel valore del numero di Mach, tipicamente si forma un'onda d'urto sulla cerniera dell'equilibratore rendendolo praticamente inefficace; fortunatamente però, al diminuire della quota, la temperatura dell'aria (e quindi la velocità del suono) aumenta e di conseguenza diminuisce il numero di Mach; ciò ha di fatto eliminato l'urto sui piani di coda facendo tornare efficiente l'equilibratore ed i pioti hanno quindi potuto governare il velivolo.

18.4 - MODELLI DINAMICI SEMPLIFICATI DEL MODO DI CORTO PERIODO E DEL MODO FUGOIDE

Abbiamo notato come la dinamica longitudinale del velivolo sia di fatto rappresentata, in una condizione convenzionale, da due dinamiche abbastanza separate l'una dall'altra: fugoide e corto periodo. Ognuna di queste dinamiche corrisponde a qualcosa di molto simile all'oscillatore lineare smorzato discusso nel § 17.5. In molti casi la dinamica longitudinale si può scomporre in due sottodinamiche del second'ordine corrispondenti una al modo fugoide ed una al corto periodo. Il primo motivo per il quale formuliamo modelli approssimati è quello di capire, ottenendo soluzioni analitiche, su quali parametri dobbiamo agire per modificare le caratteristiche dei modi; un altro motivo riguarda il progetto dei sistemi di controllo del velivolo, il quale è spesso fatto studiando separatamente dinamiche di ordine ridotto: in genere non si lavora sulla dinamica completa del velivolo, ma si preferisce lavorare, nell'ambito della sintesi del sistema di controllo, su dinamiche semplificate.

Iniziamo ad occuparci del modo fugoide; un modello approssimato di questo modo fu formulato già da Lanchester[14] all'inizio del secolo (1904-1908); egli osservò l'esistenza di un modo nel quale $\Delta\alpha \approx 0$ ed in cui c'è uno scambio continuo tra velocità e quota (nel senso che aumentando la quota diminuisce la velocità e viceversa).

Quindi le ipotesi della teoria di Lanchester sono

$$\begin{cases} \Delta\alpha = 0 \\ T(t) = D(t) \end{cases}$$

dove l'ultima ipotesi rappresenta il fatto che il sistema viene considerato conservativo. Se indichiamo con E l'energia totale del sistema, abbiamo

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - mgz = \text{cost.} = \frac{1}{2} m V_e^2 .$$

---

[14] Frederick William Lanchester (Londra, 23 ottobre 1868 — Birmingham, 8 marzo 1946) ingegnere e matematico inglese, diede importanti contributi all'ingegneria ed all'aeronautica. Egli dichiarò di aver costruito la prima automobile inglese nel 1896, una passione che egli trasformò in una fabbrica di automobile di successo, considerato uno dei "grandi tre" ingegneri dell'auto inglese assieme ad Harry Ricardo ed Henry Royce.
Studiò al *Hartley University College* (ora *University of Southampton*) nel 1891, e quindi alla *National School of Science* nello *Imperial College*. Il suo primo lavoro post universitario fu una teoria aerodinamica, sviluppata nel 1892, ma egli venne persuaso a non pubblicarla altrimenti la sua teoria in un campo poco ortodosso avrebbe rovinato la sua reputazione di ingegnere. Finalmente pubblicò *Aerial Flight* nel 1907-08 e fu invitato a partecipare al *comitato per l'aeronautica* dal primo ministro Herbert Henry Asquith alla sua formazione nel 1909. Un aeroplano sperimentale disegnato insieme ad altri da Lanchester non sopravvisse al primo volo nel 1911 ed egli abbandonò l'aviazione pratica.

L'aeroplano vola nella condizione di riferimento alla quota h_e e con velocità V_e; z è un'ascissa positiva verso il basso e con origine alla quota di riferimento, quindi $z_e = 0$.

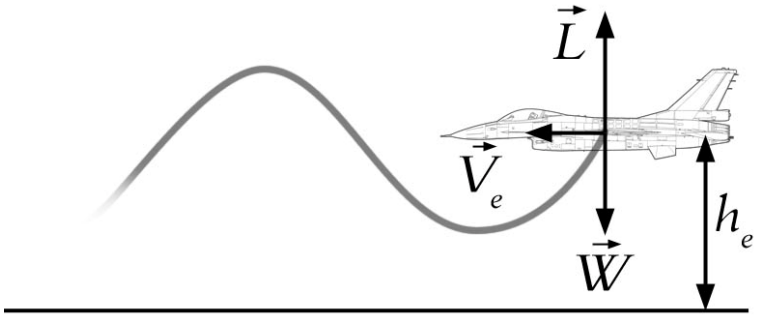


Figura 5

L'equazione del moto in direzione z è

$$m\ddot{z} = W - L = W - \frac{1}{2}\varrho V^2 S C_{L_e}$$

ed esprimendo la velocità di volo, dall'equazione dell'energia, come

$$V^2 = V_e^2 + 2gz$$

abbiamo

$$m\ddot{z} = W - \frac{1}{2}\varrho V_e^2 S C_{L_e} - gz\varrho S C_{L_e} = W - L_e - gz\varrho S C_{L_e}$$

ricordando che nella condizione di riferimento si ha $W = L_e$, otteniamo

$$\ddot{z} = -\frac{g\varrho S C_{L_e}}{m} z .$$

Questa equazione altro non è che l'equazione di un sistema oscillatorio privo di smorzamento, che rappresentata in frequenza diventa

$$s^2 = -\frac{g\varrho S C_{L_e}}{m}$$

i cui autovalori sono

$$\lambda_{PH} = \pm i\sqrt{\frac{g\varrho SC_{L_e}}{m}}\,.$$

Ricordando che

$$\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1 = 0$$

sostituendo $C_{L_e} = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\varrho S V_e^2} = \dfrac{mg}{\frac{1}{2}\varrho S V_e^2}$ la frequenza naturale è

$$\omega_{n\,PH} = \sqrt{\frac{g\varrho S}{m}\frac{2mg}{\varrho S V_e^2}} = \frac{g}{V_e}\sqrt{2}\,.$$

Il risultato, non intuitivo, è che ω_n non dipende dalle caratteristiche del velivolo e dalla quota, ma solo dalla velocità di volo: maggiore è V_e, minore è $\omega_{n\,PH}$ e quindi maggiore è il periodo

$$T_{PH} = \frac{2\pi}{\omega_{n\,PH}}\,.$$

Allo stesso risultato si arriva calcolandolo nello spazio di stato; la matrice di stato nel caso più generale si scrive

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_e & 0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ma poiché il moto avviene ad angoli d'attacco costanti possiamo trascurare la dinamica di assetto del velivolo perciò possiamo eliminare la terza riga di **A**. Se inoltre α è costante allora $\Delta w = \Delta\dot{w} = 0$ e quindi si può eliminare anche la seconda colonna. Le equazioni del moto in questo modello semplificato si scrivono perciò

$$\begin{cases} \Delta\dot{u} = X_u\Delta u - g\Delta\theta \\ 0 = Z_u\Delta u + u_e\Delta q \\ \Delta\theta = \Delta q \end{cases}$$

sostituendo la terza equazione nella seconda (che è un'equazione algebrica), otteniamo

$$\Delta\dot{\theta} = -\frac{Z_u}{u_e}\Delta u$$

e quindi il sistema da risolvere si riduce a

$$\begin{cases} \Delta\dot{u} = X_u\Delta u - g\Delta\theta \\ \Delta\dot{\theta} = -\dfrac{Z_u}{u_e}\Delta u \end{cases}$$

quindi la matrice di stato ed il vettore di stato nel modello ridotto sono dati da

$$\mathbf{A}_{PH} = \begin{bmatrix} X_u & -g \\ -\dfrac{Z_u}{u_e} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{X}_{PH} = \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta\theta \end{bmatrix}^T$$

Per l'analisi di stabilità dobbiamo calcolare il determinante della matrice

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s - \mathbf{X}_u & -g \\ -\dfrac{z_u}{u_e} & s \end{bmatrix}$$

dobbiamo quindi calcolare l'equazione caratteristica del nostro sistema

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{PH}) = 0$$

cioè

$$s^2 - X_u s - \frac{Z_u}{u_e} g = 0$$

tenendo presente l'analogia con l'oscillatore lineare smorzato, la precedente può essere riscritta come

$$s^2 + 2\zeta_{PH}\omega_{nPH}s + \omega_{nPH}^2 = 0$$

confrontando dunque tra loro le ultime due equazioni, otteniamo immediatamente per la fugoide

$$\omega_{n_{PH}} = \sqrt{-\frac{Z_u}{u_e} g}$$
$$\zeta_{PH} = -\frac{X_u}{2\omega_{n_{PH}}}.$$

Notiamo dunque che, nell'ambito della validità di questo modello approssimato la frequenza naturale dell'oscillazione della fugoide dipende dalla derivata Z_u, mentre nel rapporto di smorzamento compare la derivata X_u; ciò non permette ancora di determinare la dipendenza di questi parametri dalle derivate aerodinamiche del velivolo. Dobbiamo perciò esplicitare le derivate dimensionali in termini di derivate aerodinamiche; tenendo conto dell'espressione di $Z_u = \frac{1}{m}\frac{\partial Z}{\partial u}\Big|_e$ (si veda § 17.2), l'espressione di $\omega_{n_{PH}}$ diventa

$$\omega_{n_{PH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varrho u_e S}{u_e m}\left(C_{L_u} + 2C_{L_e}\right) g}$$

e poiché l'effetto di M sul coefficiente di portanza sarà trascurabile rispetto al valore del coefficiente di portanza all'equilibrio, cioè $C_{L_u} \ll 2C_{L_e}$, la precedente diventa

$$\omega_{n_{PH}} = \sqrt{\frac{\varrho S g}{m}\frac{2mg}{\varrho S u_e^2}} = \frac{g}{u_e}\sqrt{2}$$

dove, come abbiamo fatto per il modello di Lanchester, abbiamo espresso il coefficiente di portanza all'equilibrio. Confermiamo quindi che la frequenza naturale (e dunque il periodo), dipenda esclusivamente dalla velocità di volo e non dipende né dalla quota né dalle caratteristiche del velivolo. Vediamo ora il rapporto di smorzamento e ricordiamo che questo parametro non era disponibile nel caso del modello di Lanchester poiché tale modello faceva riferimento ad un sistema conservativo (non c'era dissipazione e quindi il rapporto di smorzamento era nullo); esplicitando X_u abbiamo

$$\zeta_{PH} = \frac{\frac{1}{2}\varrho u_e S\left[2\left(C_{D_e} - C_{T_e}\right) + C_{D_{\hat{u}}} - C_{T_{\hat{u}}}\right]}{2\sqrt{2}m\frac{g}{u_e}}$$

se ora supponiamo, per semplicità, di avere a che fare con un getto ($C_{T_{\tilde{u}}} = -2C_{T_e}$) e trascuriamo ragionevolmente gli effetti della compressibilità ($C_{D_u} \ll C_{D_e}$), otteniamo

$$\zeta_{PH} = \frac{\frac{1}{2}\varrho u_e^2 S C_{D_e}}{2\sqrt{2}mg} = \frac{1}{\sqrt{2}E_e}$$

lo smorzamento del modo fugoide, per lo meno nell'ambito dell'approssimazione relativa a questo modello ridotto, dipende esclusivamente dall'efficienza aerodinamica della configurazione di riferimento; quindi un velivolo con elevata E è caratterizzato da uno smorzamento ridotto del modo fugoide. Questo però non rappresenta un particolare problema perchè il periodo di oscillazione è sufficientemente grande da permettere al pilota di intervenire sui comandi e smorzare egli stesso l'oscillazione, con un comando sull'equilibratore. L'unico problema che può insorgere si manifesta nel caso in cui il pilota non abbia riferimenti visivi all'esterno, per esempio una situazione di volo senza visibilità; in questo caso il pilota non percepisce questa oscillazione (che in ogni caso, non è facilmente avvertibile) quindi, laddove la traiettoria debba essere controllata in modo accurato[15], potrebbero sorgere delle complicazioni. Osserviamo come si finisca sempre ad analizzare la fase di avvicinamento alla pista: in questa fase gli ipersostentatori sono estesi e sappiamo che questo produce una diminuzione dell'efficienza e quindi, in termini dinamici, si ha un effetto positivo in quanto aumenterà lo smorzamento del fugoide.

Parliamo adesso del modello approssimato del corto periodo; ripartiamo dalla matrice di stato longitudinale

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \\ Z_u & Z_w & u_e & 0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e cerchiamo di introdurre delle semplificazioni che ci permettano di arrivare ad un modello approssimato del secondo ordine. Ricordiamo che dall'analisi degli autovettori abbiamo concluso che tale modo avviene a velocità costante, perciò possiamo trascurare la prima colonna; inoltre questo modo è associato a rotazioni intorno al baricentro quindi la traiettoria non ne è influenzata; questo significa che possiamo trascurare tutto ciò che riguarda l'equilibrio dinamico lungo l'asse longitudinale e quindi possiamo eliminare anche la

[15] Un tipico esempio è l'avvicinamento alla pista d'atterraggio.

prima riga; in questo modo ci siamo di fatto ricondotti ad un sistema del secondo ordine. Risulta conveniente in questo caso lavorare in termini di $\Delta\alpha_x$ piuttosto che in termini di Δw (abbiamo già visto nel § 17.2 come tali due perturbazioni siano legate tra loro); le equazioni di equilibrio sono

$$\Delta\dot{\alpha}_x = \frac{Z_\alpha}{u_e}\Delta\alpha_x + \Delta q$$
$$\Delta\dot{q} = \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\frac{Z_\alpha}{u_e}\right)\Delta\alpha_x + \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\right)\Delta q .$$

La matrice ed il vettore di stato del modello semplificato del corto periodo diventano perciò

$$\mathbf{A}_{SP} = \begin{bmatrix} \dfrac{Z_\alpha}{u_e} & 1 \\ \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\dfrac{Z_\alpha}{u_e}\right) & \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\right) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{X}_{SP} = \begin{bmatrix} \Delta\alpha_x & \Delta q \end{bmatrix}^T$$

e quindi

$$\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{SP}\right) = \begin{bmatrix} s - \dfrac{Z_\alpha}{u_e} & -1 \\ -\left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\dfrac{Z_\alpha}{u_e}\right) & s - \left(M_\alpha + M_{\dot\alpha}\right) \end{bmatrix}$$

l'equazione caratteristica del modello semplificato del corto periodo è dunque

$$s^2 - \left(\frac{Z_\alpha}{u_e} + M_q + M_{\dot\alpha}\right)s + \frac{Z_\alpha}{u_e}M_q - M_\alpha = 0$$

abbiamo a questo punto tutti gli elementi necessari per esprimere i parametri che ci interessano, ossia

$$\omega_{nSP} = \sqrt{\frac{Z_\alpha}{u_e}M_q - M_\alpha}$$

$$\zeta_{SP} = -\frac{\left(\frac{Z_\alpha}{u_e} + M_q + M_{\dot{\alpha}}\right)}{2\omega_{n_{SP}}}$$

per la frequenza naturale di solito il secondo termine è più importante del primo quindi possiamo scrivere

$$\omega_{n_{SP}} \approx \sqrt{-M_\alpha}$$

che conviene esprimere in termini dei coefficienti non dimensionali come

$$\omega_{n_{SP}} \approx \sqrt{-\frac{1}{2}\varrho u_e^2 \frac{S\bar{c}}{I_y} C_{m_\alpha}}$$

confrontando questa con la definizione $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (§ 17.5) di frequenza naturale dell'oscillatore lineare, è immediato riconoscere che per il velivolo completo il ruolo della costante elastica è rappresentato dalla derivata C_{m_α}, la quale raffigura un effetto aerodinamico riconducibile a quello di una molla torsionale; il ruolo della massa invece è rappresentato dal momento di inerzia; nel caso del velivolo, che nell'approssimazione di corto periodo ha un grado di libertà rotazionale, la frequenza risulta proporzionale alla velocità di volo, quindi maggior velocità darà un periodo più basso; osserviamo come la frequenza sia ancora proporzionale alla quota di volo: all'aumentare della quota diminuisce la densità e quindi anche la frequenza (questa dipendenza non era presente nella fugoide); osserviamo infine come la presenza del termine

$$\frac{S\bar{c}}{I_y}$$

comporti la dipendenza della frequenza dalle dimensioni del velivolo. Parlando del rapporto di smorzamento ricordiamo che questo modo deve essere sempre smorzato; mentre infatti è possibile, anche se non previsto dalle qualità di volo, volare con un fugoide debolmente instabile, non si può accettare una instabilità del corto periodo in quanto la frequenza di questo modo è talmente elevata da non permettere al pilota di interagire con questo tipo di dinamica.

Per quanto concerne lo smorzamento possiamo dire che il termine più importante è proprio la derivata M_q nella quale compare lo smorzamento di beccheggio che fornisce il contributo maggiore allo smorzamento del modo di corto periodo. Se il velivolo progettato

non ha le caratteristiche desiderate relativamente allo smorzamento del modo di corto periodo, possiamo modificare il velivolo agendo sulla derivata M_q [16]; questo tipo di interventi è però sconsigliabile giacché quando modifichiamo qualche parametro possiamo produrre effetti indesiderati, quindi la soluzione adottata, soprattutto su aerei di certe dimensioni è quella dell'uso di sistemi che aumentino la stabilità. Osserviamo infine che anche lo smorzamento dipende dalla quota: il termine al numeratore dipende dalla densità, mentre il denominatore dipende dalla radice della densità, quindi all'aumentare della quota il rapporto di smorzamento decresce. In genere il modello del corto periodo fornisce una buona approssimazione, mentre il modello del modo fugoide non è molto accurato, soprattutto per quanto riguarda il calcolo dello smorzamento.

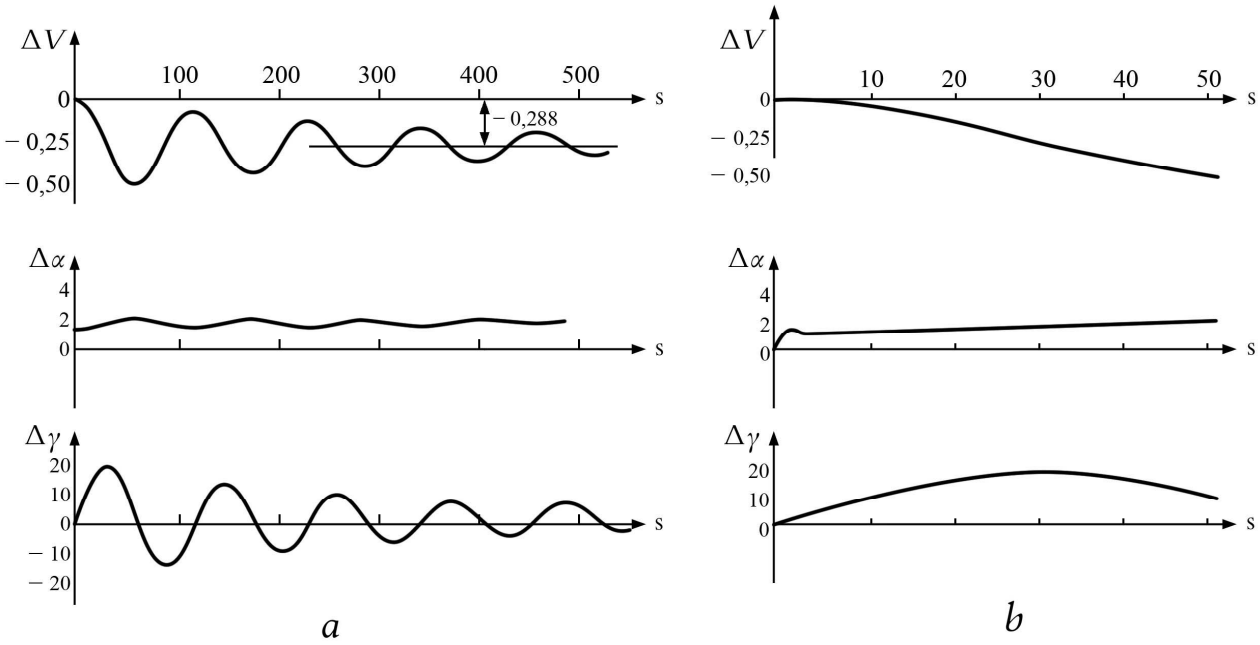
18.5 - RISPOSTA AI COMANDI LONGITUDINALI

Vediamo di completare quanto già detto, quando abbiamo interpretato la risposta stazionaria del velivolo alle possibili azioni di controllo longitudinali esercitate dal pilota. Avevamo spiegato che possiamo interpretare la risposta alle azioni di controllo facendo riferimento alle curve di spinta disponibile e spinta necessaria; se diamo un comando all'equilibratore od alla manetta, vi sarà un certo transitorio che dipenderà dalle caratteristiche dinamiche del velivolo (e che adesso possiamo analizzare), esaurito il quale si arriva alla soluzione stazionaria, la quale mette in evidenza come (si veda § 11.1) una variazione dell'angolo dell'equilibratore produca come primo effetto, a partire da una certa velocità di equilibrio, una variazione di velocità e come secondo effetto una variazione dell'angolo di rampa, mentre una variazione sulla manetta produce esclusivamente una variazione dell'angolo di rampa. Completiamo questa analisi osservando cosa accada durante il transitorio, quindi sotto l'aspetto della risposta dinamica longitudinale del velivolo. In figura 6a e 6b troviamo dei grafici che rappresentano la risposta ad un comando a gradino sull'equilibratore a richiamare (equilibratore ruotato verso l'alto) calcolata integrando numericamente le equazioni complete del moto (non lineari) per un getto da trasporto che voli in condizione di crociera (velocità e quota elevate); abbiamo appena detto che una volta smorzati i transitori dobbiamo aspettarci, per una rotazione negativa, una diminuzione di velocità ed un certo aumento dell'angolo di rampa; un comando sull'equilibratore è un comando che squilibra i momenti di beccheggio attorno al baricentro ed è un comando che *eccita le dinamiche di assetto del velivolo, in particolare la dinamica del corto periodo*. Ricordiamo come il corto periodo sia un modo fortemente smorzato, perciò riconosciamo la sua presenza solo in figura 6b, dove la scala dei tempi va da $t = 0$ a $t = 50$ s; osserviamo in conseguenza di ciò come l'angolo d'attacco raggiunga quasi istantaneamente il valore stazionario, seguendo una dina-

[16] Per esempio possiamo allontanare la coda dal baricentro.

mica di corto periodo che si esaurisce praticamente dopo circa tre secondi, passati i quali il valore di α_x oscilla con un periodo molto lungo e con uno smorzamento molto piccolo (e dunque con le caratteristiche della fugoide) attorno al valore stazionario.

Notiamo che la risposta sull'angolo d'attacco è in anticipo rispetto a quella sulla velocità: il corto periodo infatti, essendo essenzialmente un modo di assetto, non eccita quasi per niente la velocità, che dunque inizialmente impiega molto tempo a rispondere al comando sull'equilibratore (il primo picco lo troviamo infatti intorno ai 50 secondi); a questo punto interviene la fugoide (che ricordiamo è invece un modo che eccita la velocità) e quindi con notevoli oscillazioni la velocità viene perturbata e oscilla attorno al suo valore stazionario che sarà raggiunto lentamente a causa del piccolo smorzamento del modo fugoide; tale valore stazionario è negativo (cioè la velocità diminuisce) così come indicato dall'analisi stazionaria.

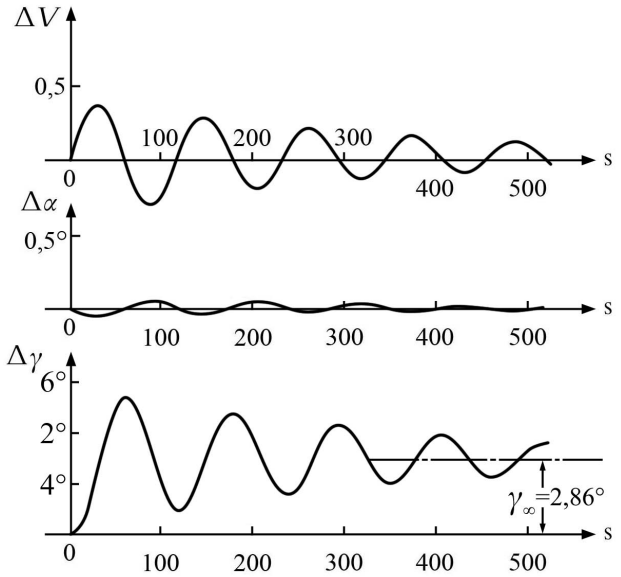


Risposta ad un comando a gradino sull'equilibratore - Figura 6

Osserviamo poi come la risposta sull'angolo di rampa sia più veloce rispetto alla risposta sulla velocità (il primo picco è a circa 30 secondi dal momento in cui è stato dato il comando): inizialmente l'angolo di rampa sale perché l'angolo d'attacco ha una risposta istantanea, mentre la velocità praticamente resta costante e di conseguenza la portanza aumenta producendo una traiettoria di salita; l'angolo di rampa procede poi con la dinamica della fugoide e, dopo molto tempo, raggiungerà il valore stazionario che prevede un aumento, abbastanza piccolo, dell'angolo di rampa. Riassumendo, la risposta del velivolo ad un comando sull'equilibratore (e questa è una caratteristica della dinamica longitudinale), il cui effetto si manifesta soprattutto sulla velocità (come soluzione stazionaria), produce una risposta istan-

tanea che è principalmente in termini dell'angolo di rampa, poiché la velocità risponde con maggior ritardo.

Analizziamo la risposta dinamica ad un comando a gradino sulla manetta; l'analisi stazionaria prevedeva, per effetto di un comando sulla manetta, in questo caso un aumento di spinta, solo ed esclusivamente un aumento dell'angolo di rampa e nessuna variazione della velocità di volo. Un'azione sulla manetta produce, a livello di risposta istantanea, uno squilibrio delle forze longitudinali dell'aeroplano, quindi il primo effetto è un aumento di velocità; osserviamo inoltre come il primo picco sulla velocità avverrà dopo 20 - 30 secondi dal comando e tale picco è in anticipo rispetto al primo picco sull'angolo di rampa. Il comando sulla spinta *eccita quindi la dinamica della fugoide* e non produce quasi nessuna perturbazione rispetto alla dinamica del corto periodo. Di conseguenza, durante il transitorio, la velocità oscilla attorno al valore iniziale ed anche dopo 500 secondi, come ci aspettavamo, non v'è nessuna variazione dal valore di equilibrio. L'angolo d'attacco invece presenta delle piccole oscillazioni attorno al valore stazionario e non cambia in quanto l'equilibratore è rimasto nella posizione originaria; l'angolo di rampa infine oscilla attorno ad un valore perturbato maggiore di quello di equilibrio. Quando il transitorio si sarà esaurito il velivolo volerà alla stessa velocità ma con maggiore angolo di rampa.



Risposta ad un comando a gradino sulla manetta - Figura 7

Osserviamo come, anche in questo caso, risposta istantanea e risposta stazionaria siano quasi l'una l'opposto dell'altra; la risposta stazionaria prevede solo una variazione dell'angolo di rampa, mentre quella istantanea principalmente una variazione di V e solo con ritardo una variazione dell'angolo di rampa.

18.6 - PILOTAGGIO IN MANOVRA: FASE DI AVVICINAMENTO ALLA PISTA

Ciò che abbiamo visto nei §§ precedenti ha notevole importanza nell'interpretazione delle tecniche di pilotaggio, anche perché il discorso non è così intuitivo, dato che nel caso longitudinale abbiamo due controlli e tre variabili indipendenti: velocità, angolo di rampa ed angolo di beccheggio (od angolo d'attacco).

Supponiamo che si voglia aumentare la velocità del velivolo mantenendo costante la quota: l'analisi stazionaria prevedeva che per aumentare la V a quota costante, dobbiamo dare un comando sull'equilibratore e poi produrre una variazione di spinta che mantenga a zero l'angolo di rampa.

A partire da una velocità di equilibrio diamo un comando sull'equilibratore a picchiare ed otteniamo la variazione di velocità indicata in figura 8 (prodotta da una variazione positiva dell'equilibratore); se non agiamo sulla spinta avremmo un eccesso di spinta negativo e quindi un angolo di rampa negativo; aumentando la spinta invece passiamo dalla condizione di equilibrio A alla posizione di equilibrio B: volo in orizzontale ad una velocità maggiore della precedente. Il pilota agisce contemporaneamente sui due comandi. Vediamo ora come indirizzare il velivolo verso una traiettoria di salita, mantenendo costante la velocità; in questo caso l'analisi stazionaria ammette che questa manovra può essere effettuata utilizzando soltanto la manetta; il transitorio è però molto lungo; per effettuare questa manovra dunque il pilota agisce sia sull'equilibratore che sulla manetta: egli darà un comando a richiamare e un aumento di spinta. Con l'equilibratore, eccitando la dinamica del corto periodo, produciamo una variazione quasi istantanea della portanza, quindi modifichiamo la traiettoria del velivolo; nei secondi successivi, non volendo modificare la velocità di volo, riportiamo l'equilibratore nella posizione originaria; alla fine rimane solo l'azione sulla manetta. In questo modo la manovra è più rapida.

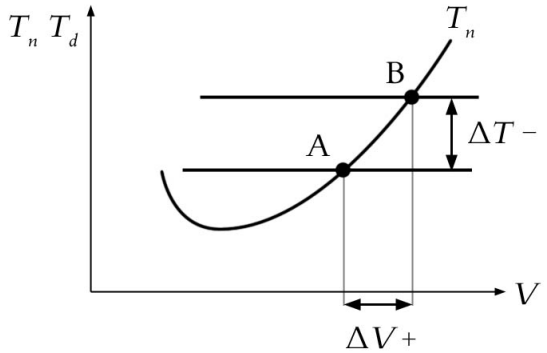


Figura 8

Per concludere il discorso ritorniamo al classico esempio di volo con traiettoria sottoposta a stretto controllo, cioè alla fase di avvicinamento alla pista. Mettiamo a fuoco certe

affermazioni già fatte parlando di stabilità propulsiva e vediamo di interpretare certi fenomeni dal punto di vista della dinamica. Abbiamo ricapitolato gli effetti stazionari dell'azione sul comando della manetta e sul comando dell'equilibratore; abbiamo poi visto come il velivolo nelle fasi di volo manovrato viene sempre condotto agendo su tutti e due i comandi, anche nel caso in cui sarebbe sufficiente agire solo su di uno. Nella fase dell'avvicinamento alla pista il velivolo viene posto in una condizione stabilizzata, cioè in una certa configurazione ad una certa velocità lungo la traiettoria e, molto importante, ad una certa velocità verticale perché quando l'aeroplano si trova in questa situazione, il problema è quello di mantenerlo il più accuratamente possibile lungo quel radio sentiero la cui posizione rispetto al velivolo viene indicata al pilota dagli strumenti. Abbiamo detto, parlando di stabilità propulsiva, come su aerei di grandi dimensioni il controllo accurato del velivolo in questa fase viene effettuato assegnando all'equilibratore il controllo della traiettoria e alla manetta il mantenimento della velocità: se il pilota nota uno spostamento dalla traiettoria di discesa, per esempio il velivolo si trova più in alto o più in basso rispetto al sentiero, per guadagnare o perdere quota il pilota agirà sull'equilibratore; durante questa fase di volo, che di fatto è una fase di volo che passa attraverso piccole manovre in progressione per riportare il velivolo nella situazione stabilizzata, il pilota guarda l'indicatore della velocità e, se riscontra scostamenti della velocità lungo la traiettoria, agisce sulla manetta; il comando sulla manetta viene dunque regolato da una sorta di retroazione sulla velocità. Quindi, anche se la manetta è la variabile preposta a modificare l'angolo di rampa, questa non è efficiente dal punto di vista dei tempi di risposta. Quindi conviene controllare la traiettoria con l'equilibratore, eccitando delle dinamiche di corto periodo (molto più rapide) piuttosto che farlo eccitando con la manetta delle dinamiche di modo fugoide. Un aeroplano di piccole dimensioni (quindi leggero) invece, non segue questa tecnica nella fase terminale di volo: in genere il pilota usa la manetta per il controllo della traiettoria, mentre l'equilibratore viene usato per il controllo della velocità di volo. Per questi velivoli si opera dunque in modo diverso e cioè la traiettoria viene comandata con una dinamica di modo fugoide (quindi una dinamica lenta); teniamo presente che parliamo di apparecchi leggeri per i quali la velocità di volo è piuttosto bassa ed in particolare lo è in fase di atterraggio; ricordiamo che la frequenza della fugoide cresce al diminuire della velocità, perciò per un aereo leggero la fugoide ha dei tempi caratteristici abbastanza brevi da consentire un controllo accurato della traiettoria. Il fatto di controllare la velocità usando l'equilibratore, quindi secondo la tecnica canonica, presenta dei vantaggi in termini di sicurezza: usando l'equilibratore solo in riferimento alla velocità da mantenere non corriamo, infatti, il rischio di trovarci a velocità troppo basse, il che può accadere usando l'equilibratore per il controllo della traiettoria. Se, per esempio, ci troviamo al di sotto del sentiero di discesa e per salire usiamo l'equilibratore, la velocità si riduce e rischiamo di passare nel secondo regime, con il risultato che, se siamo ancora bassi e per salire continuiamo a richiamare, questa manovra non corrisponde più ad una traiettoria in salita, bensì ad una traiettoria in discesa.

Capitolo 19

STABILITÀ DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

19.1 - MODO DI ROLLIO, MODO SPIRALE E MODO DI DUTCH ROLL

Partiamo dalla matrice e dal vettore di stato latero-direzionale scritta in condizioni di volo di riferimento su traiettoria orizzontale

$$\mathbf{X}_{lat} = \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\varphi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{u_e} & 0 & -1 & \dfrac{g}{u_e} & 0 \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ai fini dell'analisi di stabilità studieremo il sistema omogeneo

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}\,.$$

Il sistema, nella forma in cui è stato scritto, è del quinto ordine; osserviamo però che in nessuna delle prime quattro equazioni compare la variabile ψ (l'ultima colonna della matrice di stato è formata solo da zeri), quindi le prime quattro equazioni non dipendono dall'angolo di imbardata; questo significa che, per quanto riguarda l'analisi di stabilità, possiamo eliminare l'ultima equazione[1]. Dunque, nell'ambito dell'analisi di stabilità latero-direzionale, lavoriamo con una matrice 4×4, ottenuta da quella generale eliminando l'ultima riga e l'ultima colonna. Gli autovalori della matrice di stato, nel solito caso convenzionale, sono quattro radici di cui *due reali* e *due complesse coniugate*.

Un primo autovalore reale è in genere negativo, molto piccolo in modulo ed a questo autovalore corrisponde un modo detto *modo spirale*; il secondo autovalore reale è rappresentato da un numero negativo molto grande e la dinamica corrispondente è rappresentata da

[1] Ricordando il significato dell'angolo di imbardata è intuitivo che la stabilità del velivolo non varia se voliamo verso nord oppure verso nord-est.

un modo aperiodico molto smorzato, quindi rapidamente convergente, che prende il nome di *modo di rollio*. Il terzo ed il quarto autovalore formano una coppia di numeri complessi coniugati e ne risulta un modo periodico, con un periodo dell'ordine della decina di secondi e con smorzamento non particolarmente elevato, che prende il nome di *Dutch roll* (rollio olandese).

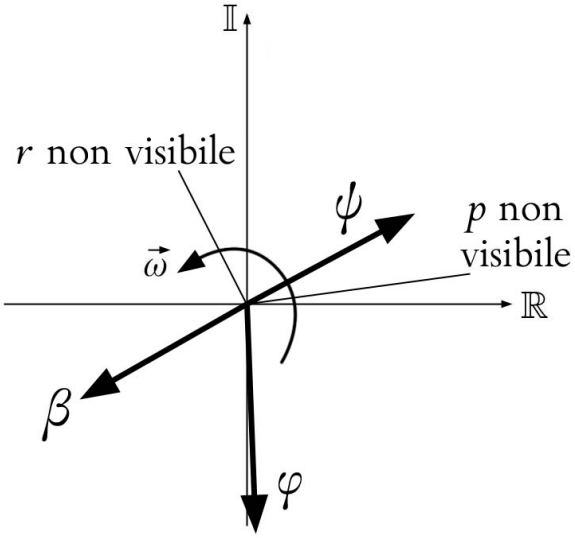
Per determinare quali grandezze siano eccitate in ciascuno dei modi caratteristici dobbiamo procedere al calcolo degli autovettori; supponiamo anche qui di averli determinati in qualche modo e di avere a disposizione una rappresentazione (si veda figura 1) che ci fornisce il seguente ordine di grandezza delle diverse variabili di stato latero-direzionale

$\lambda_S = -0{,}0098\ \mathrm{s}^{-1}$ modo spirale
$\lambda_R = -8{,}435\ \mathrm{s}^{-1}$ modo di rollio
$\lambda_{DR} = -0{,}487 \pm 2{,}24\ i\ \mathrm{s}^{-1}$ *Dutch roll*

rollio $\begin{cases} \beta : \varphi : \psi = 0{,}0016 : 1 : -0{,}029 \\ \beta : \hat{p} : \hat{r} = 0{,}014 : 1 : 0{,}029 \end{cases}$

spirale $\begin{cases} \beta : \varphi : \psi = 0{,}0014 : -0{,}15 : 1 \\ \beta : \hat{p} : \hat{r} = 1 : -0{,}052 : 0{,}35. \end{cases}$

Il modo di rollio rappresenta un modo nel quale le variabili eccitate sono quasi esclusivamente l'angolo di rollio φ e la velocità di rollio p; osserviamo che l'angolo di rollio risulta avere un ordine di grandezza maggiore di β e di ψ (abbiamo quest'ultimo riportato per completezza). Osserviamo inoltre come dal confronto tra l'angolo di derapata e le velocità non dimensionali $\hat{p}$ ed $\hat{r}$ si ricava che la velocità di rollio è maggiore di qualche ordine di grandezza, il che per lo meno giustifica il nome che gli è stato dato: il modo di rollio corrisponde ad una rotazione che è quasi esclusivamente di rollio.



Rollio olandese - Figura 1

Parlando del modo spirale (che rappresenta il modo con autovalore solitamente negativo e comunque molto piccolo) le cose iniziano a complicarsi; vediamo soprattutto un'imbardata del velivolo con un certo valore dell'angolo di rollio ed un valore molto più basso dell'angolo di derapata. In termini di velocità non dimensionali, dagli autovettori ricaviamo che la velocità di imbardata è maggiore della velocità di rollio. Il modo spirale è dunque un modo in cui si manifesta principalmente una variazione dell'angolo di imbardata, ma anche una certa variazione dell'angolo di rollio, mentre la derapata è molto piccola rispetto agli altri angoli; in termini di velocità angolari abbiamo valori molto piccoli sia di $\hat{p}$ che di $\hat{r}$ e, come ci aspettiamo analizzando gli angoli, troviamo che $\hat{r}$ è maggiore di $\hat{p}$.

Vediamo infine il modo di *Dutch roll*; gli autovalori sono complessi coniugati e perciò sono complessi coniugati anche gli autovettori. Osserviamo che tutti gli angoli sono eccitati (riconosciamo una variazione visibile dell'imbardata, dell'angolo di derapata e dell'angolo di rollio), dall'analisi degli autovettori arriviamo a concludere che l'oscillazione di *Dutch roll* corrisponde a qualcosa nella quale dobbiamo aspettarci variazioni su tutti i gradi di libertà latero-direzionale.

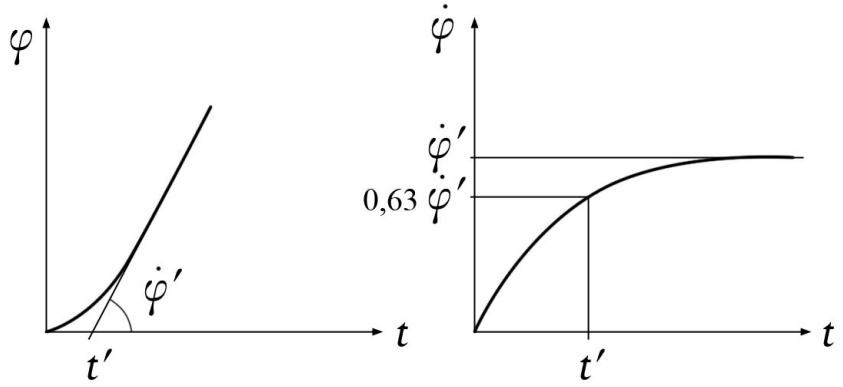


Figura 2

Diamo adesso un'interpretazione fisica di queste informazioni e cominciamo parlando del modo di rollio. Il modo di rollio viene eccitato per effetto di un comando sugli alettoni e corrisponde di fatto ad una rotazione attorno ad una direzione molto prossima all'asse longitudinale del velivolo. È un modo quasi completamente disaccoppiato dagli altri in quanto coinvolge solo l'angolo di rollio e la relativa velocità. Riconosciamo che il modo di rollio è un modo aperiodico fortemente smorzato, perciò se studiamo la risposta in termini di velocità angolari di rollio (si veda figura 2) ad un comando sugli alettoni osserviamo l'andamento tipico della risposta a gradino di un sistema del primo ordine fortemente smorzato: la velocità di rollio raggiunge molto rapidamente[2] un valore stazionario, e si mantiene su quel valore. Perciò l'aereo risponde molto rapidamente ad un comando sugli alettoni (la costante di tempo è piccola) e la velocità angolare indotta dall'azione degli alettoni raggiunge molto rapidamente il valore stazionario.

Parliamo ora del modo spirale e diamo una descrizione qualitativa in accordo con le osservazioni dedotte dall'analisi di autovalori e di autovettori; questo tipo di modo può insorgere per effetto di una raffica laterale. In particolare vediamo cosa accada nel caso divergente, immaginando che vi sia una raffica di vento che provenga dalla sinistra del pilota.

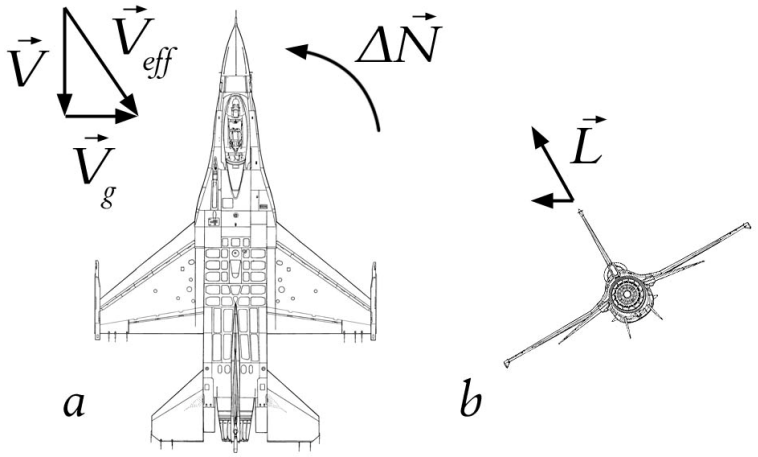


Figura 3

Uno degli effetti aerodinamici indotti da questa perturbazione atmosferica è l'insorgere di una variazione dell'angolo β, cioè si sviluppa un angolo di derapata di perturbazione, che nel caso di raffica proveniente da sinistra sarà negativo; un angolo di derapata diverso da zero provocherà la generazione (o comunque la variazione) di forze e momenti aerodinamici, in particolare, per quanto riguarda l'effetto della stabilità direzionale, avremo un momento di imbardata dato da

[2] Molto rapidamente significa una frazione di secondo (un valore ragionevole è circa 0,5 secondi).

$$\Delta N = N_\beta \Delta\beta < 0$$

negativo poiché la derivata N_β di stabilità direzionale è positiva. Quindi, se l'aereo possiede una stabilità direzionale positiva, nel momento in cui viene investito da una folata laterale tende ad orientare la prua verso la direzione del vento; l'altro effetto indotto da una variazione di β è un momento di rollio, che per quanto riguarda la dipendenza da β sarà dato da

$$\Delta L' = L_\beta \Delta\beta > 0$$

tale contributo è, nel nostro esempio, positivo e perciò tenderebbe a far alzare l'ala sopravvento[3] all'apparecchio. Abbiamo usato il condizionale perché in realtà questo non è l'unico effetto da prendere in considerazione: a causa del momento di imbardata si genera una velocità di imbardata negativa[4] in conseguenza della quale avremo un secondo effetto in termini di momento di rollio

$$\Delta L'' = L_r \Delta r < 0\,.$$

In questa relazione compare la derivata L_r (momento di rollio prodotto da una rotazione di imbardata) che nel nostro esempio è positiva: il velivolo imbarda verso sinistra (r è quindi negativa) per mettersi nel letto del vento perciò la semiala destra si trova investita da una corrente più intensa e quindi risulterà più portante dell'altra; il velivolo allora tende a rollare verso sinistra e dunque il momento di rollio $\Delta L''$ è negativo. Se quest'ultimo contributo risulta maggiore di quello stabilizzante fornito dall'effetto diedro (cioè se $\Delta L''$ risulta maggiore del contributo $\Delta L'$) l'apparecchio ruota verso sinistra e via via aumenta l'angolo di rollio. Alla rotazione di imbardata corrisponde perciò un angolo di rollio (figura 3b) che inclina il vettore portanza rispetto alla verticale, creando una componente orizzontale della forza aerodinamica, la quale determina una traslazione verso sinistra del velivolo che di fatto mantiene diverso da zero l'angolo di derapata.

[3] Dal lato dal quale spira il vento.

[4] Abbiamo detto che il velivolo tende a ruotare mettendosi nel letto del vento.

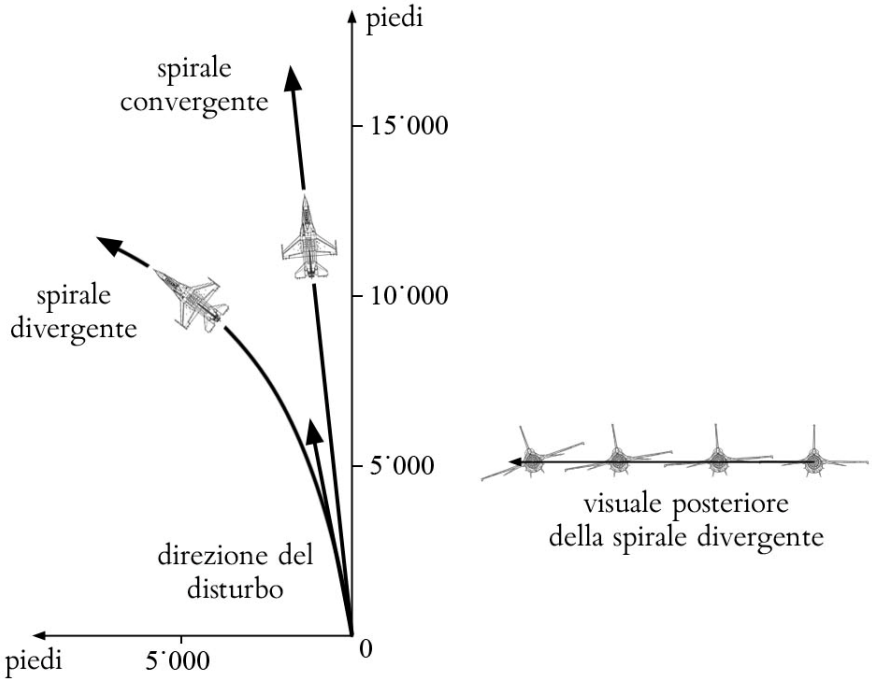
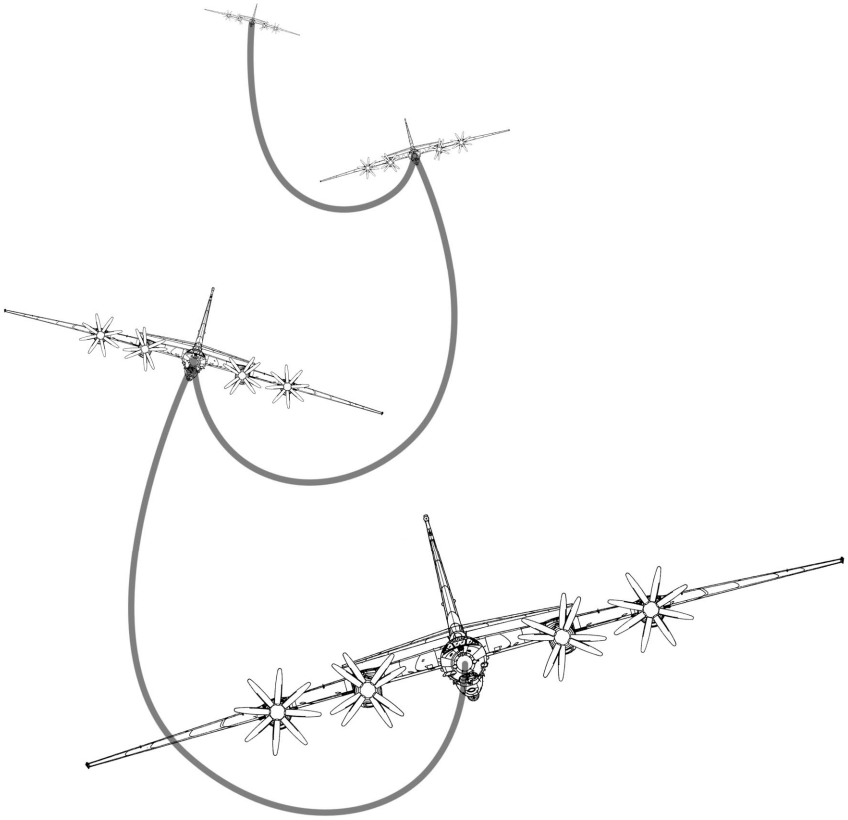


Figura 4

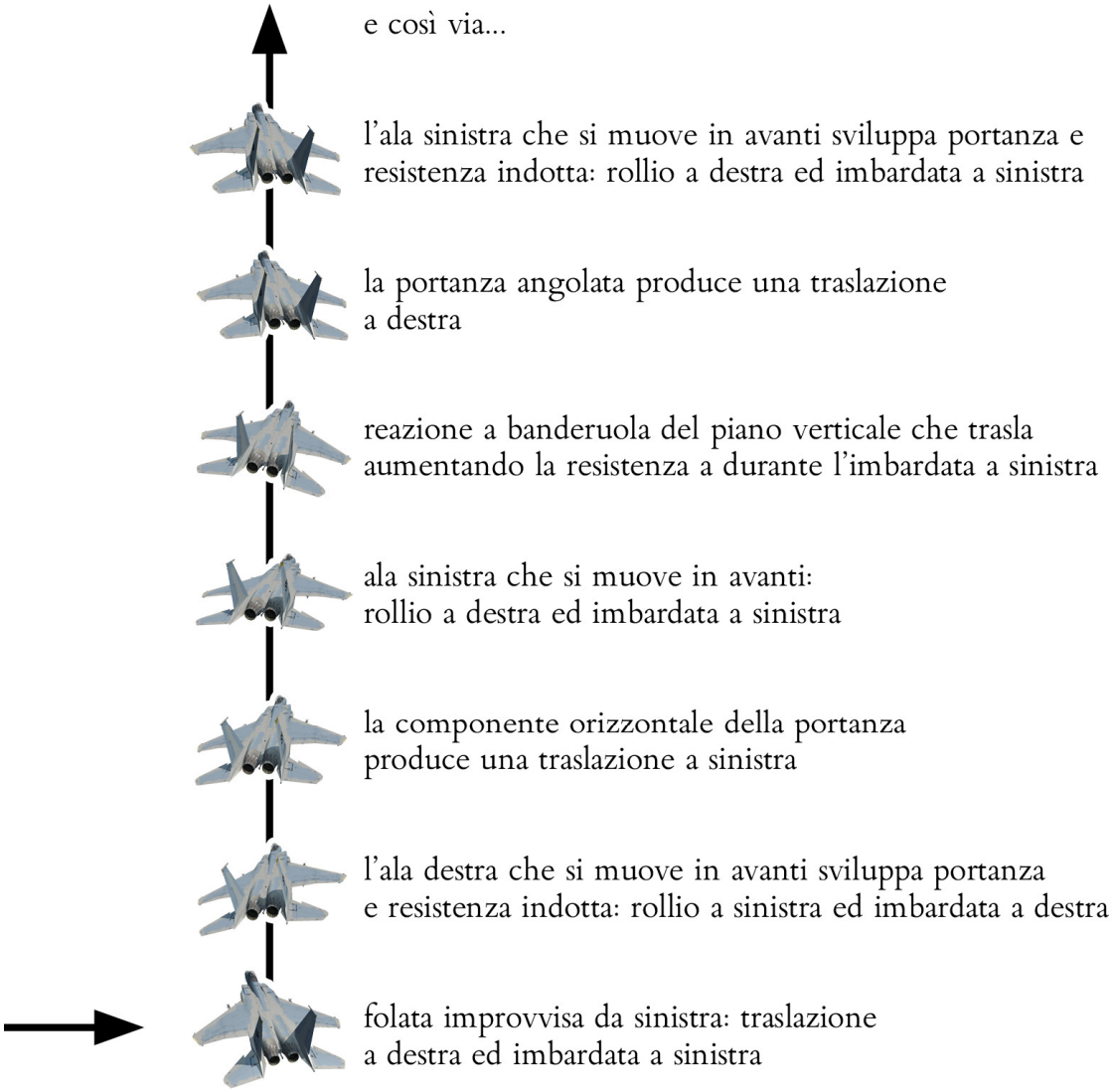
Riassumiamo brevemente ciò che avviene, (si veda figura 4): in presenza di una raffica laterale, l'aeroplano tende a ruotare per mettersi nel letto del vento, ma tale rotazione di imbardata tende a farlo sbandare; non appena l'apparecchio inizia a sbandare, trasla lateralmente e mantiene l'angolo di derapata diverso da zero; la stabilità direzionale (siamo nell'ipotesi che il velivolo sia stabile) tende a farlo ruotare ulteriormente per metterlo nel letto del vento, perciò il velivolo rolla ancora di più e più rolla e più trasla: il risultato è che tutto avviene come se il velivolo stesse compiendo una virata con sbandamento, nella quale l'angolo di derapata, sia pure piccolo, si mantiene diverso da zero e nella quale il raggio va man mano diminuendo: la traiettoria corrisponde perciò a quella di una spirale. Vedremo che questo tipo di divergenza, se esiste, è prodotta da un eccesso di stabilità direzionale rispetto alla stabilità laterale. Se avessimo abbastanza effetto diedro saremmo costretti ad entrare in virata con sbandamento, ma il modo spirale non sarebbe presente. Quindi il modo spirale in genere è divergente quando è presente *un eccesso di stabilità direzionale rispetto all'effetto diedro*. Questo significa che è molto forte la tendenza del velivolo ad imbardare ed è troppo debole la tendenza del velivolo a mantenere le ali livellate (l'effetto diedro si oppone alla rotazione di rollio). Questo modo può dunque essere instabile (anche se ciò non è previsto dalle qualità di volo), ma dato che l'autovalore è comunque molto piccolo, la cosa non presenta grossi problemi perchè *il pilota ha tutto il tempo di intervenire* e riportare il velivolo nella traiettoria giusta.



Vista frontale di un Tu-95 in rollio olandese - Figura 5

L'ultimo modo caratteristico direzionale è quello chiamato *Dutch roll*. In figura 5 troviamo una vista frontale di un velivolo nel corso di un'oscillazione divergente di *Dutch roll*; immaginiamo che la causa perturbativa iniziale sia una raffica che proviene da destra (del pilota); supponiamo che predomini la stabilità direzionale, quindi per effetto della raffica tendono a svilupparsi tutti quei fenomeni associati al momento di rollio prodotti dalla stabilità laterale. Dunque, sempre per effetto della raffica, il velivolo tende ad alzare l'ala sopravvento (ricordiamo quanto detto parlando di effetto diedro) e quindi il vettore della portanza risulterà ruotato rispetto alla verticale ed il velivolo inizia a traslare lateralmente; se questa traslazione è troppo intensa, dopo un certo transitorio, il velivolo finisce per acquistare una velocità relativa rispetto all'aria di segno opposto a quella iniziale, in questo esempio da sinistra. A questo punto l'effetto diedro tende a fare sollevare la semiala sinistra (la quale è diventata quella sopravvento), perciò il velivolo inizia a rollare ed a traslare dalla parte opposta (cioè verso destra); se, anche in questo caso, l'effetto è troppo intenso, la velocità del vento risulterà proveniente di nuovo dalla destra del pilota ed il fenomeno si ripete. In figura 5 si vede la traiettoria disegnata dall'aereo nel piano verticale, la quale ha portato a chiamare questo modo col nome di *Dutch roll*. Durante il modo di *Dutch roll* il velivolo perde quota perché nel momento in cui il velivolo possiede un angolo di rollio diverso da zero una parte della portanza non contribuisce più al sostentamento. In figura 6 abbiamo un disegno che evidenzia come l'oscillazione di *Dutch roll* rappresenti una situazione nella quale tutti i gradi di

libertà latero-direzionali sono eccitati: c'è una traslazione laterale, valori diversi da zero dell'angolo di derapata, rotazioni di imbardata e rotazioni di rollio. Di questo effetto studieremo qualche conseguenza nel momento in cui dovremo formulare il modello approssimato di *Dutch roll*, il quale risente del fatto che questo modo difficilmente è riconducibile ad una dinamica del secondo ordine.



Rollio olandese visto da un osservatore esterno - Figura 6

19.2 - MODELLI APPROSSIMATI DEI MODI LATERO-DIREZIONALI: EFFETTO DI C_{L_β} E DI C_{N_β}

Analizziamo i modelli approssimati dei modi appena descritti e cominciamo da quello più semplice che è il modo di rollio. In questo caso l'unico stato diverso da zero è rappresentato dalla perturbazione della velocità angolare; ciò significa che del sistema di partenza,

l'unica equazione che resta è la seconda, quella che riguarda la dinamica del momento di rollio

$$\Delta\dot{p} = L'_p \Delta p \,.$$

La precedente costituisce proprio l'equazione del modello approssimato del modo di rollio. La radice dell'equazione caratteristica è allora

$$\lambda_R = L'_p \,.$$

Ricordiamo che lo *smorzamento di rollio* L'_p è una derivata fondamentale che è sempre negativa, almeno al di sotto dell'incidenza critica, e quindi il modo di rollio è, come abbiamo detto, un modo convergente.

Passiamo ora al modo spirale; in questo caso le cose diventano più complicate perché nel caso latero-direzionale è molto più difficile separare i diversi gradi di libertà. Parlando dello spirale possiamo immaginare che l'angolo di derapata si mantenga costantemente piccolo durante questa situazione e quindi possiamo supporre che l'equilibrio delle forze laterali rimanga soddisfatto istante per istante; ciò consente di eliminare la prima equazione del sistema. Abbiamo visto (si veda § 1) dall'analisi degli autovettori del modo spirale che tra le due velocità angolari, dalle quali dipendono i momenti aerodinamici, quella più piccola è la velocità di rollio, quindi dovendo formulare un modello approssimato scegliamo di porre $\Delta p = \Delta\dot{p} = 0$[5]. La seconda e la terza equazione diventano perciò

$$\begin{aligned} \Delta L'_\beta \Delta\beta + \Delta L'_r \Delta r &= 0 \\ \Delta\dot{r} &= N'_\beta \Delta\beta + N'_r \Delta r \end{aligned}$$

quindi il fatto di considerare una variazione nulla dell'angolo di derapata non significa che β, anche se piccolo, non venga tenuto in considerazione. Dalla prima delle precedenti ricaviamo

$$\Delta\beta = -\frac{L'_r}{L'_\beta}\Delta r$$

[5] Tutte e due le velocità angolari sono piccole, ma tra le due la velocità di rollio è minore di quella di imbardata e quindi dovendo ridurre il nostro sistema dinamico immaginiamo trascurabile la perturbazione in termini di velocità di rollio rispetto a quella in termini di velocità di imbardata.

che sostituita nella seconda diventa

$$\Delta\dot{r} = \left[-\frac{L'_r}{L'_\beta} N'_\beta + N'_r \right] \Delta r = \frac{N'_r L'_\beta - N'_\beta L'_r}{L'_\beta} \Delta r$$

e anche in questo caso abbiamo ottenuto un sistema del primo ordine (trattandosi di un moto aperiodico è l'unica scelta possibile); l'espressione dell'autovalore corrispondente è

$$\lambda_S = \frac{N'_r L'_\beta - N'_\beta L'_r}{L'_\beta}$$

e per la stabilità (ricordiamo che tutte le radici reali devono essere negative) deve essere

$$\lambda_S < 0 .$$

L'effetto diedro che compare a denominatore della espressione dell'autovalore è una grandezza negativa perciò la condizione per un modo spirale stabile diventa

$$N'_r L'_\beta > N'_\beta L'_r$$

dove le grandezze a primo membro (effetto diedro e smorzamento di imbardata) sono tutte e due negative e quindi il primo termine della disuguaglianza è una quantità positiva, mentre le grandezze a secondo membro (stabilità direzionale e derivata che rappresenta il momento di rollio prodotta da una rotazione di imbardata) sono quantità positive e quindi anche il secondo membro è positivo. Affinché la precedente sia soddisfatta, la stabilità direzionale non deve essere troppo elevata e questo conferma quanto detto da un punto di vista qualitativo: non dobbiamo avere un eccesso di stabilità direzionale rispetto all'effetto diedro altrimenti il modo spirale può essere un modo instabile. Come già anticipato all'inizio del § 16.1 dunque, l'analisi di stabilità statica latero-direzionale non è troppo importante, mentre nel caso longitudinale il fatto di avere stabilità statica è una chiara indicazione del fatto che avremo stabilità dinamica. Un'altra informazione interessante è che se applichiamo questo criterio a diversi velivoli possiamo sempre ritenere giusta l'informazione sul segno dell'autovalore approssimato, mentre in genere commettiamo grossi errori sul modulo dell'autovalore. Non ci dobbiamo perciò aspettare che questa approssimazione fornisca una informazione accurata sul modulo di λ_S, mentre fornisce correttamente l'informazione sulla possibile stabilità od instabilità del moto spirale. La condizione espressa dall'equazione precedente si può riscrivere nella forma

$$N'_r L'_\beta - N'_\beta L'_r > 0$$

mentre possiamo scrivere l'equazione caratteristica latero-direzionale nella forma

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$$

e ricordiamo che uno dei requisiti per la stabilità dinamica è $a_4 > 0$ il che corrisponde al criterio generale di stabilità statica; è possibile dimostrare, calcolando i coefficienti dell'equazione caratteristica, che tale condizione corrisponde esattamente alla $N'_r L'_\beta - N'_\beta L'_r > 0$. In conclusione uno spirale instabile corrisponde al fatto che il criterio generale di stabilità statica latero-direzionale è stato violato. Se non c'è stabilità statica latero-direzionale, secondo il criterio generale, otteniamo come primo effetto il fatto che il modo spirale diviene instabile.

Spesso si usa un modello approssimato del modo spirale che fornisce informazioni più accurate di questo sul modulo dell'autovalore; tale modello non deriva da nessuna considerazione di carattere fisico sul modo spirale, ma solo dal fatto che, essendo l'autovalore quasi sempre molto piccolo, si possono trascurare nell'equazione caratteristica tutti i termini in cui compaiono potenze di *s* superiori alla prima. Possiamo cioè dire che, a causa del fatto che λ_S è sempre piccolo, l'equazione caratteristica si può scrivere nella forma

$$a_3 \lambda_S + a_4 \approx 0$$

quindi l'espressione approssimata di λ_S è data da

$$\lambda_S \approx -\frac{a_4}{a_3}$$

questo modello, per quanto riguarda il modulo dell'autovalore, funziona meglio di quello che abbiamo formulato sulla base di un criterio fisico, cioè dall'analisi delle caratteristiche del moto.

Parliamo infine del modello approssimato del *Dutch roll*; otteniamo questo modello, i cui risultati provengono più dall'esperienza che da un'indicazione chiara ottenuta dagli autovalori, a partire dalla matrice di stato latero-direzionale che verrà semplificata nel modo opportuno. Tale matrice, nel caso generale è

$$\mathbf{A}_{lat} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{u_e} & 0 & -1 & \dfrac{g}{u_e} \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo, però, che l'analisi degli autovettori del *Dutch roll* aveva portato a concludere che in questo modo tutte le variabili di stato sono eccitate, quindi è un modo nel quale è presente sia un angolo di derapata, sia un angolo di rollio che un angolo di imbardata; quindi il fatto di ridurre un modello dinamico rappresentativo di un modo che di fatto ha tre gradi di libertà (due di rotazione ed uno di traslazione) a un modello dinamico del secondo ordine è una semplificazione forzata; nel caso del *Dutch roll* il modello dinamico semplificato che viene formulato e che si uniforma sufficientemente ai dati sperimentali, parte dal presupposto che durante questa oscillazione, pur essendo tutti gli stati eccitati, ciò che riguarda il rollio (quindi sia momenti che angoli) è meno apprezzabile del resto. Dunque il modello semplificato del *Dutch roll* si basa sul fatto che sia legittimo considerare meno importante tutto ciò che riguarda il grado di libertà relativo alle rotazioni attorno all'asse longitudinale[6]. Trascuriamo dunque la seconda equazione, quella appunto dell'equilibrio dinamico dei momenti di rollio e trascuriamo anche la seconda colonna della matrice di stato; il sistema così semplificato si riduce ad una situazione in cui la matrice ed il vettore di stato sono

$$\mathbf{A}_{DR} = \begin{bmatrix} \dfrac{Y_\beta}{u_e} & -1 \\ N'_\beta & N'_r \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{X}_{DR} = \begin{bmatrix} \Delta\beta & \Delta r \end{bmatrix}^T$$

Abbiamo così ridotto il sistema ad un sistema del secondo ordine. Dunque

[6] Supponiamo che la perturbazione dell'angolo di rollio sia nulla o semplicemente possiamo dire che non ci interessa ciò che riguarda questa variabile perché uno schema così ridotto non ha bisogno di far intervenire tale variabile.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{DR}) = \begin{bmatrix} s - \dfrac{Y_\beta}{u_e} & 1 \\ -N'_\beta & s - N'_r \end{bmatrix}$$

e perciò l'equazione caratteristica è

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{DR}) = s^2 - \left(\frac{Y_\beta}{u_e} + N'_r\right)s + \frac{Y_\beta}{u_e}N'_r + N'_\beta = 0$$

confrontando tale equazione con l'equazione caratteristica scritta nella forma canonica otteniamo per la frequenza naturale e per il rapporto di smorzamento del *Dutch roll*

$$\omega_{n_{DR}} = \sqrt{N'_\beta + \frac{Y_\beta}{u_e}N'_r}$$

$$\zeta_{DR} = -\frac{\dfrac{Y_\beta}{u_e} + N'_r}{2\omega_{n_{DR}}}.$$

Discutiamo questo risultato: per quanto riguarda la frequenza naturale in genere il termine più importante è N'_β, quindi possiamo con una certa approssimazione scrivere

$$\omega_{n_{DR}} = \sqrt{N'_\beta} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\varrho u_e^2 SbC_{N_\beta}}{I_z}}$$

con $N'_\beta \approx N_\beta$ per semplicità. Il termine principalmente responsabile della frequenza del *Dutch roll* è proprio il coefficiente di stabilità direzionale C_{N_β}, il quale, dal punto di vista fisico, gioca il ruolo di costante elastica di una molla torsionale, così come abbiamo già visto per quanto riguarda la derivata C_{M_α} quando abbiamo parlato di modo di corto periodo (vedi § 18.4); vediamo dunque che la stabilità direzionale del velivolo interviene anche a caratterizzare la frequenza dell'oscillazione di *Dutch roll*. Per lo smorzamento il contributo più importante è quello legato alla derivata N'_r, smorzamento di imbardata, la quale è negativa; quindi, se vogliamo intervenire sullo smorzamento di *Dutch roll*, ed abbiamo la possibilità di modificare le caratteristiche del velivolo, dobbiamo modificare i parametri da cui dipende lo smorzamento di imbardata; le norme sulla qualità di volo prevedono che il *Dutch roll* abbia uno smorzamento positivo, in particolare nelle fasi in cui è necessario mantenere un controllo accurato della traiettoria tipo la fase di avvicinamento alla pista: nella fase di at-

terraggio non è possibile ammettere che il velivolo possa avere un'oscillazione poco smorzata che finisce per perturbare lateralmente la traiettoria; un *Dutch roll* poco smorzato è inoltre particolarmente fastidioso per i passeggeri, perché questo tipo di oscillazione laterale è un effetto che si avverte molto facilmente. Di fatto, allora, tutti i velivoli di una certa dimensione installano sistemi di aumento della stabilità associata a questo moto; questi sistemi prendono il nome di *yaw damper* (smorzatori di moto di imbardata) che agiscono comandando delle rotazioni sul timone proporzionali alla velocità angolare di imbardata, in modo che aumenti artificialmente lo smorzamento di imbardata attraverso una retroazione sulla variabile di controllo del timone. Un'ultima osservazione su quanto valga l'approssimazione che abbiamo formulato: abbiamo appena detto che questo tipo di modello dinamico viene utilizzato proprio per il progetto preliminare di una parte del sistema di controllo e di aumento di stabilità latero-direzionale del velivolo perché se confrontiamo i parametri caratteristici del moto ottenuti da tale modello con quelli esatti non possiamo aspettarci un risultato molto accurato; il problema è che, come già sottolineato, questo è un modo a tre gradi di libertà, quindi il fatto di trascurare ciò che riguarda il rollio rappresenta una approssimazione piuttosto grossolana; in particolare notiamo come nella espressione di $\omega_{n_{DR}}$ e di conseguenza nella espressione di ζ_{DR} non compare esplicitamente la derivata L_β, la quale è implicita in N'_β essendo

$$N'_\beta = N_\beta + \frac{I_{xz}}{I_z} L_\beta$$

ma ricordiamo che per semplicità abbiamo posto $N'_\beta \approx N_\beta$. L_β è invece un parametro molto importante anche nella dinamica del *Dutch roll*, perciò solo nel caso in cui l'effetto diedro sia piccolo possiamo pensare che il modello approssimato funzionerà abbastanza bene; ciò è anche intuitivo poiché un valore ridotto dell'effetto diedro ridurrà l'accoppiamento tra gradi di libertà, mentre se l'effetto diedro è grande un angolo di derapata produrrà momenti di rollio grandi e quindi diventa assai più difficile affermare che sia trascurabile la dinamica attorno all'asse longitudinale. Un altro termine che gioca un certo ruolo per quanto concerne gli accoppiamenti fra gradi di libertà, è il prodotto d'inerzia: se I_{xz} è piccolo, l'accoppiamento fra i due gradi di libertà sarà piccolo (§ 17.4), ma se non è piccolo, un $\Delta\dot{r}$ diverso da zero produce un'accelerazione angolare sulla velocità di rollio p e quindi aumenta l'accoppiamento fra i modi. In conclusione dunque, quando studiamo questi modelli, dobbiamo tener presente che la loro validità dipende anche dal tipo di velivolo che stimo studiando.

Riassumiamo l'effetto di due derivate latero-direzionali che sono emerse un po' ovunque e che risultano, forse, le più importanti: N_β (o più in generale N'_β) ed L_β (o più in generale L'_β), quindi *stabilità direzionale* e *stabilità di rollio*; parlando dello spirale abbiamo

identificato una condizione limite per la stabilità di tale modo, la quale è rappresentata dal fatto che il coefficiente a_4 dell'equazione caratteristica risulti uguale a zero, cioè dal fatto che la stabilità statica latero-direzionale risulti violata.

Anche nel caso del *Dutch roll* siamo in grado di arrivare ad una condizione matematica che ci fornisca una indicazione di quando questo modo da stabile diventi instabile. La situazione che abbiamo appena definito corrisponde al fatto che la parte reale della coppia di radici complesse coniugate da negativa diventi positiva e questo accade proprio quando il discriminante di Routh si annulla

$$\Delta_R = a_3\left(a_1 a_2 - a_3\right) - a_1^2 a_4 = 0$$

tale criterio interessa difatti proprio le radici complesse coniugate, perciò quando il discriminante di Routh è uguale a zero si passa da un *Dutch roll* stabile ad un *Dutch roll* instabile. Le due derivate di cui parlavamo prima compaiono in una forma più o meno semplice in ciascuna delle due condizioni ora viste[7]; tracciamo perciò un grafico nel quale abbiamo in ordinata la stabilità direzionale e in ascissa l'effetto diedro e riportiamo su tale grafico le relazioni corrispondenti a queste due condizioni (figura 7).

La condizione $a_4 = 0$, scritta in termini di N'_β ed L'_β, rappresenta l'equazione di una retta passante per l'origine, la quale divide il piano in due regioni: a destra di tale retta si ha $a_4 < 0$ e quindi siamo in una situazione di instabilità sullo spirale, mentre a sinistra si ha $a_4 > 0$ e dunque stabilità. L'andamento qualitativo della funzione che corrisponde al valore nullo del discriminante di Routh è quello riportato in figura 7 ed anche in questo caso abbiamo due zone, una di stabilità ed una di instabilità del *Dutch roll*.

Notiamo come solo nella zona in bianco avremo stabilità sia del modo spirale che del *Dutch roll*, perciò in entrambi i casi dobbiamo avere un rapporto opportuno, come ordine di grandezza, fra effetto diedro e stabilità direzionale.

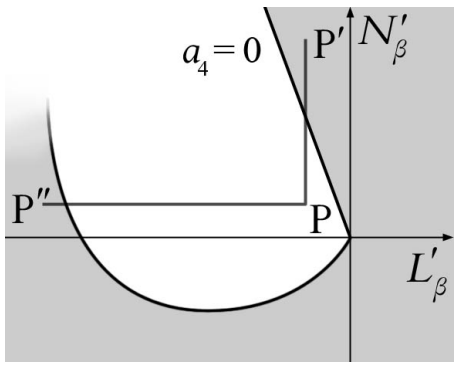


Figura 7

[7] La condizione su a_4 l'abbiamo scritta esplicitamente (si veda § 19.2).

Questo concetto rappresenta una notevole differenza dal caso longitudinale e da tante altre situazioni nelle quali si dà un grosso peso alla stabilità statica. Supponiamo di avere un velivolo le cui caratteristiche in termini di stabilità direzionale ed effetto diedro siano rappresentate dal punto P in figura: se decidiamo di aumentare la stabilità direzionale[8] fino al punto P', ci spostiamo da una condizione di stabilità dinamica sullo spirale ad una condizione di instabilità; allo stesso modo un eccesso di effetto diedro porta ad avere un'instabilità del *Dutch roll*. Non è dunque opportuno ricercare valori eccessivamente elevati in modulo di queste derivate, ma occorre trovare un compromesso. Questo è uno dei motivi per cui si vedono tanti velivoli con ala alta rispetto alla fusoliera che hanno angolo diedro negativo piuttosto pronunciato.

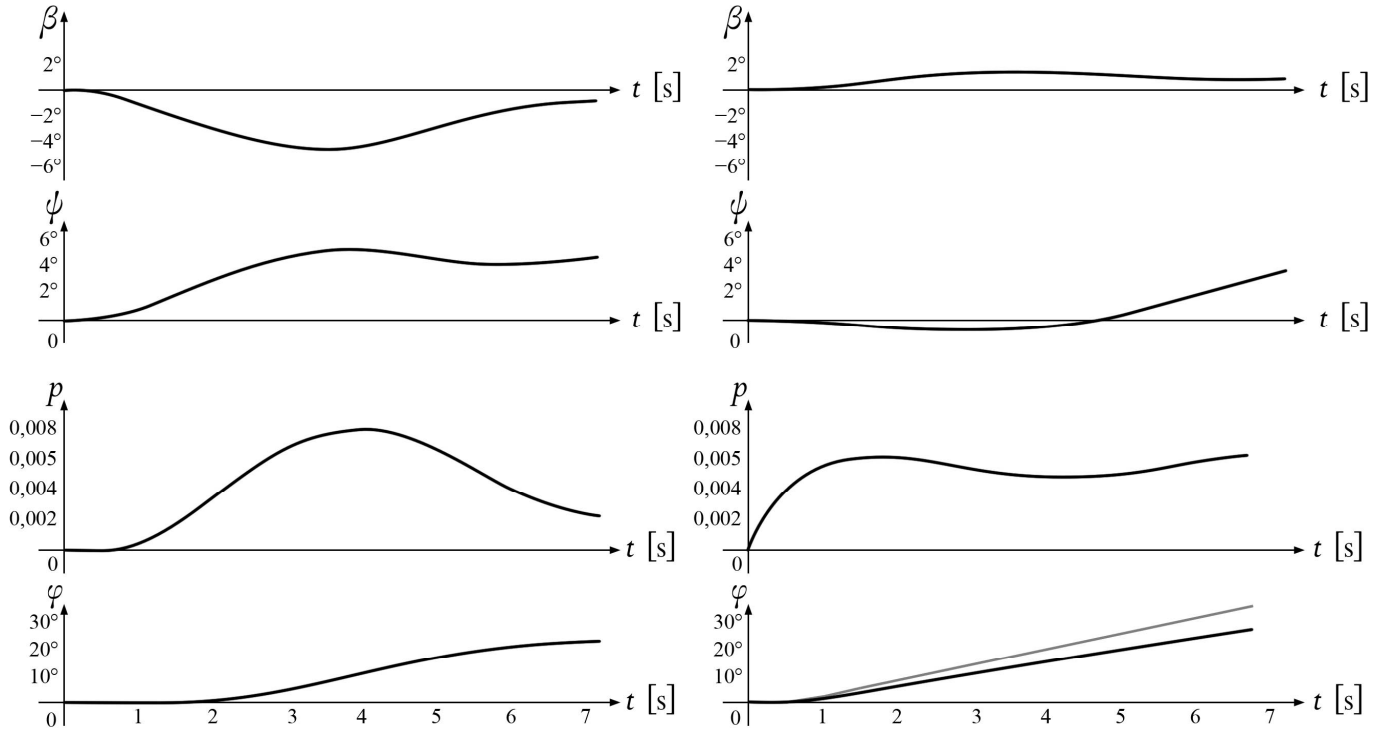
19.3 - RISPOSTA AI CONTROLLI LATERO-DIREZIONALI: MOTO DI PURO ROLLIO

Cominciamo ad analizzare la risposta del velivolo ai controlli latero-direzionali, premettendo subito che faremo solo un discorso qualitativo. Il timone[9] e gli alettoni, per quanto riguarda le manovre, hanno principalmente lo scopo di generare una variazione del vettore velocità nel piano orizzontale per compiere delle virate e quindi per far variare la direzione di volo. Interpretiamo la risposta dinamica del velivolo analizzando delle simulazioni[10] (si veda figura 8), così come avevamo fatto nel caso longitudinale, le quali ci permettono di determinare la risposta rispettivamente ad un comando sul timone e ad un comando sugli alettoni.

[8] Perché ad esempio vogliamo avere maggiore stabilità statica.

[9] Abbiamo citato molti effetti del timone parlando di controllabilità e stabilità statica.

[10] Queste simulazioni riguardano lo stesso aeroplano analizzato nel caso longitudinale, cioè un trasporto a getto che vola ad alta quota in condizioni di crociera. Interessa in quanto costituisce un esercizio molto semplice in cui interpretiamo la risposta dell'aereo: abbiamo i risultati sotto forma di grafici e dobbiamo capire perché il velivolo si è comportato in un certo modo; in genere ci troviamo a risolvere questi problemi quando abbiamo effettuato una simulazione e verifichiamo se i conti siano giusti o meno.



a - risposta di un comando a gradino sul timone

b - risposta di un comando a gradino sull'alettone

Figura 8

Il primo caso che trattiamo è quello di una risposta di un comando a gradino sul timone (figura 8*a*) e perciò supponiamo che il pilota voglia effettuare una virata utilizzando solo il timone[11]; analizziamo l'andamento dell'angolo di derapata, dell'angolo di imbardata, della velocità di rollio e dell'angolo di rollio, per un comando a gradino negativo (cioè verso destra) sul timone. Se diamo tale comando al timone produciamo una forza laterale F_y che fa ruotare il velivolo attorno al suo baricentro, generando così una rotazione di imbardata, ma il velivolo continua a muoversi per qualche istante nella direzione originaria; negli istanti iniziali cioè, il velivolo mantiene la stessa velocità, però con un angolo di imbardata rispetto all'orientamento iniziale; in questa situazione l'angolo di imbardata corrisponde, a meno del segno, all'angolo di derapata.

Osserviamo in figura 8*a*, a conferma di quanto ora detto, che nei primi istanti l'angolo di imbardata cresce e l'angolo di derapata diminuisce, seguendo inizialmente l'andamento, ma col segno opposto, dell'angolo di imbardata. Dopo qualche secondo la presenza di un

[11] Nel corso delle virate, soprattutto di velivoli di grandi dimensioni come ad esempio il 747, l'uso del timone è abbastanza limitato poiché si cerca di evitare, in particolare alle alte velocità, di produrre sollecitazioni sulla struttura applicando carichi laterali ad una distanza molto grande dal baricentro, in modo tale che la fusoliera non sia sottoposta a grosse sollecitazioni. Nel caso in cui si voglia effettuare una virata corretta, il timone ruota automaticamente il necessario in seguito ad un comando dato sugli alettoni, quindi in genere l'azione su timone e alettoni è coordinata.

angolo di derapata diverso da zero produce una variazione del momento di rollio il cui effetto è definito, ancora una volta, dall'effetto diedro. Quindi l'angolo di derapata produrrà l'insorgere di forze e momenti aerodinamici e tra questi è particolarmente importante l'effetto sul momento di rollio ed essendo la variazione di β negativa e l'effetto diedro negativo avremo lo sviluppo di un momento di rollio positivo e questo è esattamente quello che ci aspettiamo: ricordiamo, infatti, che la stabilità laterale del velivolo deve essere tale da far rialzare l'ala sopravvento.

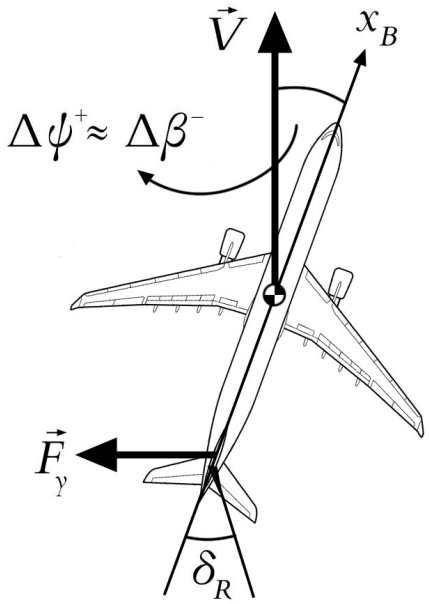


Figura 9

La conferma ci viene ancora dai diagrammi riportati in figura 8*a*, dai quali possiamo osservare come nel momento in cui l'angolo di derapata comincia ad assumere dei valori non trascurabili insorge una velocità di rollio positiva. Il velivolo, dunque, alza l'ala sopravvento e ruota verso destra con la semiala destra abbassata rispetto alla semiala sinistra; quindi ad una velocità di rollio diversa da zero seguirà, con un certo ritardo, un angolo di rollio diverso da zero e quindi dopo un tempo piuttosto lungo, anche se siamo entrati in virata usando solo il timone, arriviamo ad una situazione in cui stiamo effettuando una virata con un angolo di rollio cioè una virata con sbandamento.

Analizziamo ora cosa accade quando entriamo in virata con un comando solo sugli alettoni[12]; se agiamo sugli alettoni eccitiamo il modo di rollio, quindi il velivolo risponde con la sola dinamica di rollio, che ricordiamo è una dinamica al primo ordine con un tempo caratteristico molto rapido. Osserviamo infatti in figura 8*b* il grafico rappresentativo della velocità di rollio: dopo meno di un secondo la velocità angolare di rollio p (o $\hat{p}$) raggiunge il suo valore stazionario. In conclusione quindi abbiamo un transitorio rapidissimo dominato dalla dinamica di rollio. Notiamo come l'angolo di rollio segua l'andamento della velocità con un certo ritardo, trattandosi di una grandezza integrata rispetto alla precedente; notiamo a tale proposto come l'andamento di φ può essere considerato lineare poiché in fondo, a parte la fase iniziale, la velocità di rollio è quasi costante.

[12] Da un punto di vista pratico questo è il caso più frequente.

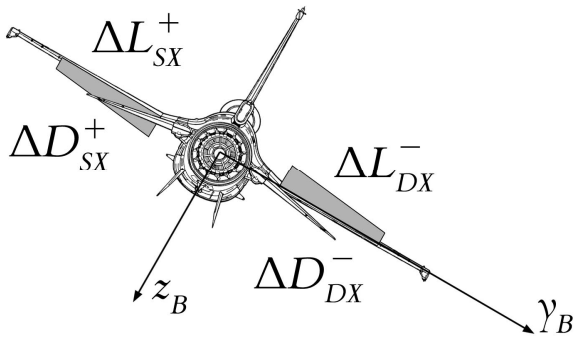


Figura 10

Per quanto riguarda l'angolo di imbardata, notiamo come esso inizialmente sia negativo: noi vogliamo virare verso destra, ma apparentemente il velivolo acquista un certo angolo nel verso opposto. Tale comportamento può essere ricondotto al fenomeno di imbardata inversa ed infatti possiamo riconoscere almeno due effetti di imbardata inversa; il primo effetto è legato proprio all'azione sugli alettoni: ruotando gli alettoni per effettuare la virata a destra aumentiamo la portanza sulla semiala sinistra e la diminuiamo sulla semiala destra; in conseguenza di ciò avremo anche una variazione positiva della resistenza sulla semiala sinistra ed una variazione negativa della resistenza sulla semiala destra. Il risultato è un momento di imbardata negativo. C'è però un ulteriore effetto, che abbiamo già analizzato e che certamente è più complesso del precedente, legato al momento di imbardata indotto da rotazioni di rollio (quindi N_p) il quale produce ancora una coppia di imbardata negativa.

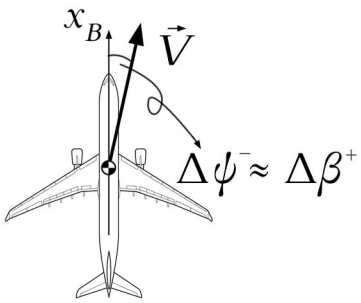


Figura 11

L'imbardata negativa che così nasce, produce un certo angolo di derapata positivo e tale angolo di derapata produrrà certi effetti aerodinamici; in particolare a noi interessa considerare l'effetto in termini di momento di imbardata che esprimiamo come

$$\Delta N = N_\beta \Delta\beta$$

ma essendo la stabilità direzionale (cioè N_β) positiva, il velivolo deve tendere a mantenersi nel letto del vento e quindi finalmente inizia a ruotare dalla parte voluta; a conferma di ciò, in figura 8*b* possiamo notare che l'angolo di derapata si mantiene piccolo ma positivo e l'angolo di imbardata finalmente comincia ad aumentare con il segno positivo. Teniamo infine presente che il fatto di rollare il velivolo, lo abbiamo detto tante volte ma lo ripetiamo perché è molto importante, determina una componente della portanza laterale nel piano orizzontale, la quale produce a sua volta una traslazione laterale che permette di compiere la virata. Osserviamo come per l'aeroplano considerato, virare utilizzando unicamente gli alettoni non è efficiente perché si trova in una situazione di virata con sbandamento, quindi con un certo angolo di rollio e con un certo angolo di imbardata crescente dopo un tempo lungo.

19.4 - PILOTAGGIO IN VIRATA

Nella pratica[13] il pilota per effettuare la virata, ad esempio a destra, inclina la barra od il volantino dalla parte destra, ma poi il volantino o la barra non vengono tenuti in quella posizione perché altrimenti effettueremmo una manovra di *tonneau*. Il comando iniziale serve dunque solo per la fase transitoria che perturba lo stato di equilibrio ed eccita queste dinamiche, permettendo di portare il velivolo in un certo assetto; tipicamente poi, nel momento in cui l'angolo di sbandamento raggiunge i ⅔ del valore previsto per la virata, il pilota riporta i comandi nella posizione nella quale dovranno essere tenuti per effettuare la fase stazionaria della virata. Quindi per entrare in virata occorre un tipo di comando, mentre per mantenere il velivolo in virata stazionaria i comandi saranno molto più vicini al centro e saranno quelli necessari per equilibrare forze e momenti nella fase di virata stazionaria. Può essere necessario utilizzare anche il pedale e se vogliamo mantenere la quota dovremo dare anche un certo comando a richiamare[14]. Se il pilota opera in condizioni di visibilità, durante la virata si regola guardando l'orizzonte per valutare lo sbandamento del velivolo e avrà un riferimento sul terreno, che indichi come sia variata e quanto velocemente, la sua direzione; se invece non è in condizioni di buona visibilità il pilota controlla gli strumenti e come riferimento ha un pannello a **T** (si veda figura 12) nel quale si trovano, in genere disposti in quest'ordine, gli strumenti più importanti dal punto di vista del pilotaggio: dall'indicatore di assetto[15] ottiene l'informazione sullo sbandamento del velivolo[16] e l'indicatore della situazione orizzontale gli fornisce l'indicazione di come stia variando l'angolo di rollio.

[13] Comunque la tecnica dipende molto dal tipo di aereo.

[14] Ricordiamo che in virata una certa parte della portanza non contribuisce più ad equilibrare il peso.

[15] Detto "orizzonte artificiale".

[16] Durante un volo notturno si è verificato un incidente di un 747, caduto proprio perché era guasto l'indicatore di assetto: il pilota ha continuato a rollare l'aeroplano non avvedendosi che l'angolo di sbandamento aumentava più del dovuto, fino a che l'aereo è caduto. Questo solo per mettere in evidenza che certe grandezze non vengono percepite facilmente dal pilota.

orizzonte artificiale
anemometro
altimetro
Machmetro
veriometro
situazione orizzontale
Figura 12

Capitolo 20

IL VOLO IN TURBOLENZA ATMOSFERICA

20.1 - RISPOSTA ALLA RAFFICA A GRADINO

Tratteremo il problema della risposta del velivolo alle perturbazioni atmosferiche nel modo più semplice possibile[1] per giungere, come risultato finale, alla definizione di un diagramma, detto *di raffica*, il quale è un diagramma n - V (dove n è il fattore di carico normale e V è la velocità), un parente stretto del diagramma di manovra. Le agitazioni atmosferiche rappresentano un aspetto importantissimo delle perturbazioni esterne che interessano il velivolo; il primo tipo di perturbazione che abbiamo considerato, in modo qualitativo, è quello dovuto alle azioni di controllo; il secondo problema di risposta che viene tradizionalmente studiato nella dinamica è appunto quello riguardante le perturbazioni atmosferiche. Una perturbazione del campo di velocità in cui opera l'aeromobile produce una modifica del campo aerodinamico sul velivolo e dunque forze e momenti di perturbazione, i quali hanno un effetto sulla dinamica e sulla struttura; in particolare tali azioni producono sollecitazioni e problemi di fatica sulla struttura dell'aereo (quindi problemi di dinamica strutturale) e perturbazioni del moto, in particolare accelerazioni e variazioni del fattore di carico che si riflettono sull'azione del pilota e sullo stato del carico (per esempio sui passeggeri). Tutto questo, soprattutto ciò che riguarda il pilota e le strutture, è in qualche misura accoppiato al sistema di controllo; quello che può accadere, per quanto riguarda il pilotaggio ed il controllo del velivolo, si riflette in un degrado delle prestazioni del sistema di controllo, in problemi di maggior carico di lavoro da parte del pilota ed in problemi di qualità della crociera[2]. Il problema del volo in presenza di turbolenza è sia vasto che complesso, anche perché le perturbazioni indotte dalla turbolenza atmosferica sono rappresentate da funzioni di tipo probabilistico; affronteremo perciò situazioni semplificate, partendo dal caso più semplice possibile, cioè quello della risposta ad una raffica a gradino (ovverosia istantanea); ciò porterà comunque ad ottenere delle informazioni molto valide, in modo predominante negli aspetti progettuali dell'aereo e proprio attraverso il diagramma di raffica.

Il primo passo è il calcolo della risposta del velivolo ad una raffica a gradino verticale; per agevolare al massimo le cose, questo problema viene risolto con ottimi risultati utilizzando un modello del velivolo ad un solo grado di libertà: supponiamo di avere un apparecchio posto ad esempio in galleria del vento, il quale è libero esclusivamente di traslare lungo

[1] In realtà il volo in presenza di turbolenza atmosferica costituisce una branca molto vasta della dinamica del volo, delle strutture ed anche del controllo.

[2] Se voliamo su un aeroplano sballottati tutto il tempo, non apprezzeremo affatto la qualità del volo.

una direzione parallela alla verticale; l'equazione del moto di questo sistema, facendo riferimento ad uno schema linearizzato[3], è

$$m\Delta\dot{w} = \left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e \Delta w = u_e \left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e \frac{\Delta w}{u_e} = u_e \left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e \Delta\alpha = \frac{\partial Z}{\partial \alpha}\Delta\alpha$$

quindi l'unico effetto che consideriamo è quello di una variazione delle forze aerodinamiche lungo l'asse z, indotta da una variazione dell'angolo d'attacco. In termini di derivate dimensionali (si veda § 17.2) la precedente diventa

$$\Delta\dot{w} = Z_\alpha \Delta\alpha\,.$$

Possiamo esprimere la perturbazione su α come somma di un effetto legato alla variazione della velocità w di perturbazione, come abbiamo sempre fatto sinora, e di un effetto legato alla raffica, la quale a sua volta produrrà una variazione di incidenza

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta w}{u_e} - \frac{w_g(t)}{u_e}$$

dove $w_g(t)$ rappresenta la velocità di raffica, in generale funzione del tempo, positiva nel verso dell'asse z

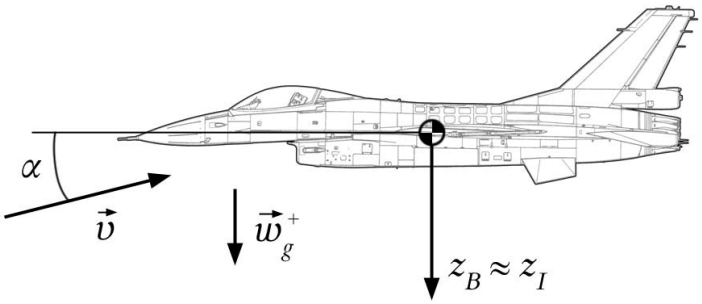


Figura 1

quindi, in questo semplice schema, una raffica di velocità negativa, cioè diretta verso l'alto, produce come effetto una variazione positiva dell'angolo d'attacco[4]. Sostituendo la precedente nella equazione di $\Delta\dot{w}$ otteniamo

[3] Supponiamo cioè di studiare le perturbazioni del sistema rispetto ad una condizione di riferimento.

[4] Ecco il perché del segno meno nella equazione di $\Delta\alpha$.

$$\Delta\dot{w} = \frac{Z_\alpha}{u_e}\Delta w - \frac{Z_\alpha}{u_e} w_g(t)$$

la quale, definendo il parametro $\tau = -\dfrac{u_e}{Z_\alpha}$ detto *costante di tempo* del sistema, diventa

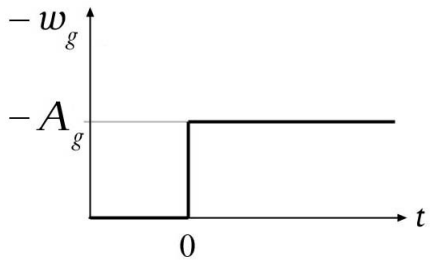
$$\Delta\dot{w} = -\frac{1}{\tau}\Delta w + \frac{1}{\tau} w_g(t)$$

il sistema ottenuto è del primo ordine nella variabile w; trasformiamo questo sistema secondo Laplace ed otteniamo

$$\left(s + \frac{1}{\tau}\right)\Delta\bar{w}(s) = \frac{1}{\tau}\bar{w}_g(s).$$

Abbiamo detto che considereremo una funzione di ingresso di raffica a gradino, perciò

$$\begin{cases} w_g = 0 & t \le 0 \\ w_g = A_g & t > 0 \end{cases}$$



dove A_g rappresenta la velocità della raffica nel gradino ed è una grandezza costante (e negativa dato che stiamo considerando una raffica verso l'alto). Ricordando che la trasformata di Laplace della funzione a gradino è pari ad $1/s$

$$\bar{w}_g(s) = \frac{A_g}{s}$$

e la soluzione nel dominio della frequenza è data da

$$\Delta\bar{w}(s) = \frac{1}{\tau}\frac{A_g}{s\left(s + \frac{1}{\tau}\right)} = A_g\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}\right).$$

L'anti-trasformata di tale relazione si ottiene molto semplicemente applicando il metodo delle frazioni parziali; in questo caso abbiamo che le due radici del denominatore sono

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau}$$

e dunque antitrasformando

$$\Delta w(t) = A_g\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Riportando su un diagramma l'andamento dell'espressione così ricavata, che costituisce la risposta del mezzo, otteniamo il grafico in figura 2.

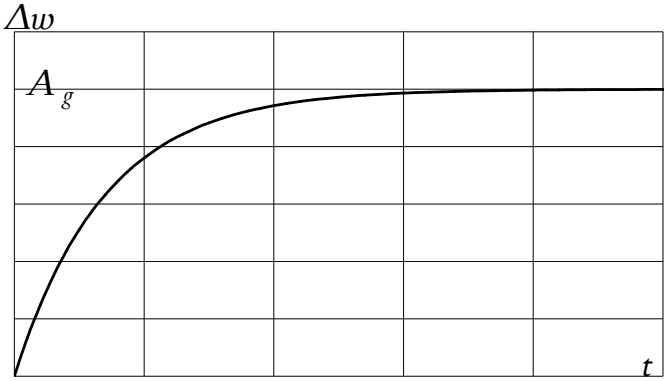


Figura 2

Notiamo che, essendo la raffica diretta verso l'alto, il velivolo acquista una velocità di perturbazione verso l'alto e quindi negativa, che tende ad A_g; quindi l'effetto di una raffica a gradino è che dopo un certo transitorio il velivolo si muove lungo una traiettoria non più orizzontale, ma con un certo angolo di rampa diverso da zero. Una cosa importante è l'effetto della costante di tempo: τ dal punto di vista fisico rappresenta il valore del tempo in corrispondenza del quale la variabile di perturbazione Δw raggiunge il 63% del valore stazionario, infatti

$$\Delta w(\tau) = A_g\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63 A_g .$$

Il risultato appena ottenuto ci aiuta a capire che cosa accada quando il velivolo venga investito dalla raffica, ma non fornisce delle informazioni utili per la fase progettuale, sia per quanto riguarda gli effetti sulla qualità del volo, sia (cosa molto più importante) per quanto riguarda il fattore di carico. Per esprimere il fattore di carico normale dobbiamo calcolare delle accelerazioni; per definizione infatti abbiamo

$$n_z = \frac{W - m\Delta\dot{w}}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad n_z = 1 - \frac{\Delta\dot{w}}{g}$$

per ottenere $\Delta\dot{w}$ non dobbiamo far altro che derivare l'equazione di $\Delta w(t)$ ottenendo

$$\Delta\dot{w} = \frac{A_g}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Osserviamo come il valore massimo dell'accelerazione si abbia nell'istante iniziale

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\dot{w} = \Delta\dot{w}_{max} = \frac{A_g}{\tau}$$

quello che interessa ricavare è il fattore di carico massimo, cioè

$$n_{max} = 1 - \frac{A_g}{g\tau}$$

(si tenga presente che la velocità di raffica è negativa). Possiamo concludere la parte analitica riportando il grafico del fattore di carico in funzione del tempo.

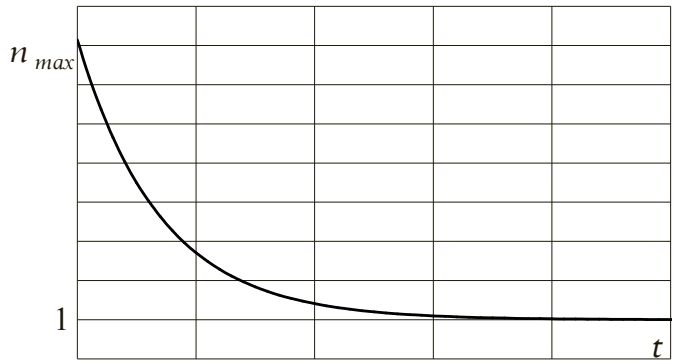


Figura 3

Nell'istante iniziale abbiamo il massimo del fattore di carico e poi tale grandezza diminuisce fino al valore stazionario che sarà molto prossimo ad uno. L'espressione dello n_{max} contiene delle informazioni molto importanti; infatti sostituendo la costante di tempo

$$Z_\alpha = u_e Z_w = u_e \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial w}\bigg|_e$$

$$\left.\frac{\partial Z}{\partial w}\right|_e = -\frac{1}{2}\varrho u_e S\left(C_{L_\alpha} + C_{D_e}\right)$$

otteniamo

$$n_{max} = 1 + \frac{A_g}{g u_e} Z_\alpha = 1 + \frac{A_g}{g u_e}\left[-\frac{1}{2}\varrho u_e^2 \frac{S}{m}\left(C_{L_\alpha} + C_{D_e}\right)\right]$$

ricordiamo però che $C_{D_e} \ll C_{L_\alpha}$, perciò alla fine

$$n_{max} = 1 - \frac{\varrho u_e A_g C_{L_\alpha}}{2W/S} \qquad \text{con } A_g < 0 .$$

Questa è una relazione utile perché tra le altre cose mette in evidenza quali parametri influenzino il valore del fattore di carico sviluppato nel caso in cui il velivolo incontri una raffica verticale. Osserviamo come, tenendo presente che il caso dagli effetti più interessanti è quello in cui la velocità di raffica sia negativa, il fattore di carico che si sviluppa è tanto maggiore quanto maggiore sarà la velocità di volo ed osserviamo come, per una data velocità di raffica A_g, il fattore di carico vari linearmente con la velocità di volo; possiamo perciò cominciare a tracciare un diagramma nel quale riportiamo u_e in ascissa ed il fattore di carico in ordinata.

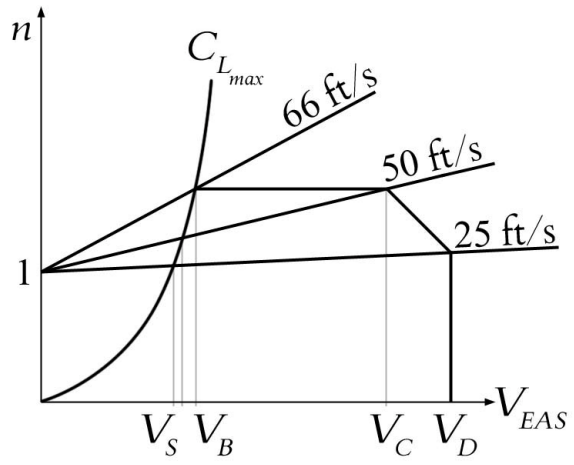
Figura 4

La pendenza di tale retta sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà la velocità di raffica. Per quanto riguarda il contributo della densità, notiamo che il fattore di carico assume valori tanto minori quanto maggiore è la quota di volo; abbastanza importante è poi il contributo del C_{L_α}: il fattore di carico sviluppato in presenza di una raffica sarà tanto maggiore quanto maggiore è il C_{L_α}; velivoli con ala a geometria variabile (come ad esempio il Torna-

do, lo F-111, il B-1B od il Su-24), nelle missioni che prevedono il volo a bassissima quota, dove maggiori sono le probabilità di incontrare perturbazioni atmosferiche, ripiegano le ali verso la coda (quindi aumentano l'angolo di freccia) per abbassare il C_{L_α} dell'ala[5], ricordiamo che un aumento dell'angolo di freccia determina una riduzione della pendenza della retta di portanza. Al denominatore abbiamo il carico alare e questa è un'altra dipendenza importantissima: un velivolo con carico alare maggiore sarà meno sensibile all'influenza della perturbazione atmosferica; abbiamo visto come i velivoli militari, per esigenze legate alla manovrabilità, non posseggono carichi alari elevati e questo si riflette negativamente sulla risposta ad una raffica[6].

20.2 - DIAGRAMMA DI RAFFICA

A questo punto abbiamo proprio tutti gli elementi per discutere il diagramma di raffica, il quale fornisce un'informazione che deve essere costruita in base a quanto previsto dalle normative. Nel diagramma di raffica abbiamo ancora una rappresentazione n - V_{EAS}; sull'asse delle ascisse riconosciamo quelle velocità caratteristiche limite che abbiamo già discusso nel diagramma di manovra. Tracciamo sul diagramma la curva relativa al $C_{L_{max}}$ che già conosciamo, riportiamo il valore unitario del fattore di carico e tracciamo tre rette che rappresentano la variazione del fattore di carico in funzione della velocità, per tre diversi valori della velocità di raffica (prescritti dalle norme ed ottenuti mediante indagini sperimentali, durante le quali sono stati misurati i valori medi delle intensità di raffica).



[5] Un altro motivo è che cosi facendo, la configurazione diventa più efficiente dal punto di vista strutturale, tenendo conto che in queste fasi di volo le sollecitazioni indotte da perturbazioni atmosferiche sono molto elevate.

[6] Ancora una volta siamo di fronte al fatto che uno stesso parametro ha effetti contrastanti a seconda che ci si occupi di un aspetto oppure dell'altro.

Figura 5

Abbiamo una prima retta corrispondente ad un valore della velocità di raffica pari a 66 ft/s, una seconda retta corrispondente ad un valore di 50 ft/s ed una terza retta corrispondente al valore di 25 ft/s. Associamo la velocità di 25 ft/s (cioè la più bassa) alla velocità V_D, che è la massima velocità prevista nel nostro diagramma; associamo la seconda velocità di raffica (50 ft/s) alla velocità di crociera V_C ed infine consideriamo l'intersezione tra la curva relativa al $C_{L_{max}}$ e la retta relativa alla massima intensità di raffica considerata. Unendo tra loro con delle rette i punti così individuati abbiamo il diagramma riportato in figura; vediamo che resta evidenziata una regione caratteristica, la quale è una regione ammissibile per il volo e all'interno della quale il velivolo deve essere collaudato per dimostrare che le sollecitazioni previste in base a questo diagramma, moltiplicate per un opportuno coefficiente di sicurezza, non producano delle deformazioni permanenti sulla struttura; in altre parole, quello che vale nella regione evidenziata è esattamente uguale, per l'uso che ne viene fatto, a quanto abbiamo detto a proposito del diagramma di manovra. La differenza tra i due diagrammi risiede nel fatto che mentre il diagramma di manovra riassume ciò che è previsto per quanto riguarda le manovre del mezzo (maggiori valori del fattore di carico i quali dipendono dalla categoria del velivolo), il diagramma di raffica definisce una regione n - V per quanto riguarda i carichi che derivano dalle raffiche. È chiaro che, a seconda delle caratteristiche del velivolo, potranno risultare più penalizzanti le specifiche che derivano dal diagramma di raffica rispetto a quelle derivanti dal diagramma di manovra, o viceversa; possiamo anche sovrapporre tali due diagrammi e determinare l'inviluppo delle condizioni possibili; la cosa importante è comunque che tutti e due debbono essere considerati.

A questo punto è spontaneo chiedersi perché vengano considerate tre velocità diverse di raffica che vanno a diminuire all'aumentare della velocità di volo alla quale sono associate. Vediamo che la massima intensità di raffica è legata ad una certa velocità che nelle norme troviamo indicata con V_B e che prende il nome di *velocità di progetto per la massima intensità di raffica*; a tale proposito si ammette che se il velivolo dovesse incontrare una raffica dell'intensità massima il pilota ne sarebbe in qualche modo preavvertito e quindi avrebbe la possibilità di ridurre la velocità fino a V_B; quindi associamo la massima intensità di raffica ad una velocità relativamente bassa perché diamo per scontato che il pilota non si trovi a volare in condizioni di massima turbolenza senza aspettarselo e quindi che la velocità sia ridotta ad un valore relativamente basso[7]; Abbiamo poi una velocità di raffica minore associata a V_C ed una velocità di raffica ancora più bassa associata alla V_D e questo perché l'aeroplano

[7] Se sappiamo che c'è una turbolenza molto forte dobbiamo ridurre la velocità di volo in modo da ridurre le sollecitazioni sul velivolo.

viaggerà alla V_D per un tempo limitato durante la sua vita operativa[8] e quindi sarebbe troppo penalizzante associare a quella velocità di volo delle raffiche molto intense.

20.3 - FATTORE DI ATTENUAZIONE

Per quanto riguarda le FAR 25, il diagramma di raffica è calcolato in base alla espressione di n_{max} ricavata nel precedente paragrafo, nella quale si introduce però un coefficiente $k_g < 1$ detto *fattore di attenuazione di raffica*

$$n_{max} = 1 - \frac{\varrho A_g u_e C_{L_\alpha}}{2W/S} k_g .$$

Questo fattore di attenuazione tiene conto del fatto che nell'aria intesa come fluido reale non esistono raffiche a gradino come quella che noi abbiamo considerato, perchè ci sarà sempre una certa variazione in un tempo finito od in uno spazio finito della velocità. La raffica a gradino, per quanto riguarda lo sviluppo di fattori di carico, corrisponde al caso più penalizzante che possiamo considerare. Nel caso reale quindi non avviene una variazione istantanea di velocità perché la viscosità dell'aria fa sì che vi sia un certo gradiente di velocità; se per esempio considerassimo uno schema di variazione della raffica come il seguente

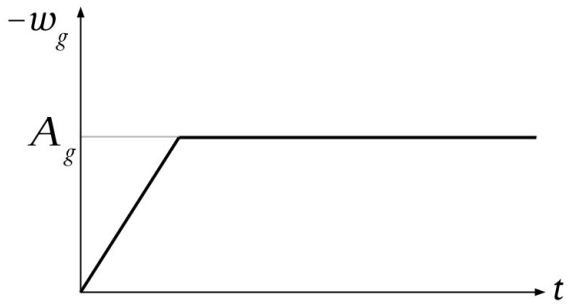


Figura 6

cioè con un certo gradiente costante per un certo intervallo di tempo, l'andamento del fattore di carico sarebbe quello di figura 7.

[8] Un velivolo commerciale non si troverà quasi mai a viaggiare alla massima velocità di progetto prevista, se non in qualche rara manovra di emergenza.

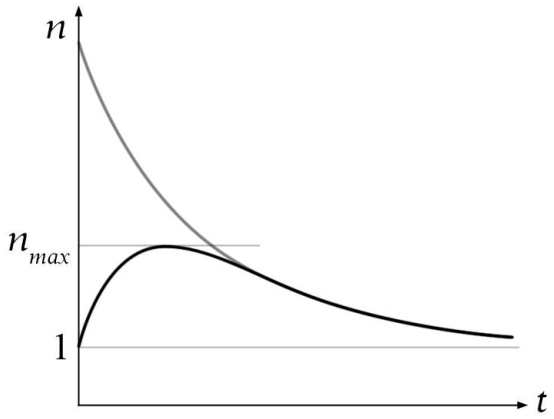


Figura 7

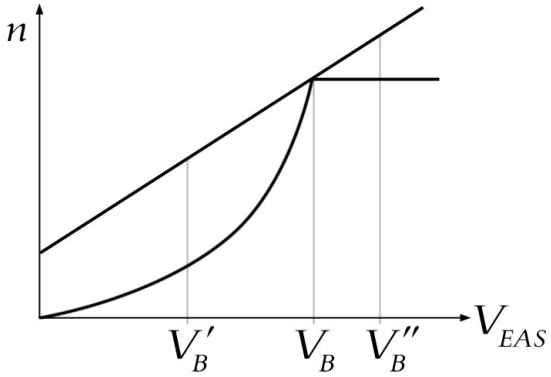


Figura 8

Notiamo che il valore massimo del fattore di carico sarebbe ridotto rispetto al caso precedente e quindi la normativa tiene giustamente conto di questo effetto. Tiene inoltre conto del fatto che la variazione dell'angolo d'attacco non produce una variazione istantanea della portanza (lo abbiamo già più volte ribadito) perché esistono degli effetti di aerodinamica instazionaria che contribuiscono a diminuire il valore massimo del fattore di carico.

Illustriamo un ultimo aspetto riguardo alla velocità V_B ed in particolare consideriamo che cosa accada nel caso di massima intensità di raffica, volando ad una velocità maggiore o minore della V_B. Se la velocità è superiore a V_B si supera il valore del fattore di carico previsto e quindi conseguiamo una sollecitazione eccessiva della struttura; se invece l'apparecchio incontra la raffica di massima intensità alla V_B'' entrerà in g-stallo, ma senza che si verifichi nessun problema strutturale, perché non raggiunge il fattore di carico massimo. Delle due situazioni è preferibile la prima perché l'apparecchio verrà sollecitato poco oltre il fattore di carico, quindi ben al di sotto del margine di sicurezza. Il problema del g-stallo in presenza di raffiche è un problema molto fastidioso per gli ultraleggeri: questi velivoli volano a velocità molto bassa e quindi variazioni di velocità della raffica anche non elevate producono delle variazioni dell'angolo d'attacco molto grandi che possono facilmente portare allo stallo; se pensiamo ad esempio ad un ultraleggero che voli a 30 m/s, una raffica verticale di 15 m/s porta immediatamente allo stallo.

Capitolo 21

IL VOLO IN AVVITAMENTO

21.1 - EFFETTI INERZIALI NELLE MANOVRE DI ROLLIO: FENOMENO DELLO ACCOPPIAMENTO DI ROLLIO

Prima di discutere il comportamento dell'aeroplano nel volo in avvitamento, dobbiamo analizzare separatamente due fenomeni, uno di tipo inerziale ed uno di tipo aerodinamico. Gli effetti di tipo inerziale, che finora non abbiamo considerato, costituiscono un elemento importante nella determinazione degli equilibri ai momenti durante il volo in vite. Tali effetti intervengono nell'equilibrio dei momenti e corrispondono, in termini di equazioni del moto, al termine $\underline{\underline{I}}\vec{\omega}$, il quale non interveniva nell'analisi linearizzata attorno ad una condizione di volo su traiettoria rettilinea. Studieremo l'effetto di quel termine con lo scopo di interpretare certi equilibri nel volo in avvitamento, ma anche per interpretare certi fenomeni di divergenza del moto. Fenomeni di divergenza iniziarono a manifestarsi intorno agli anni 50' quando i velivoli cominciarono ad assumere delle configurazioni con fusoliera piuttosto allungata, ali a basso allungamento e massa concentrata nella regione della fusoliera (i serbatoi andavano spostandosi verso la fusoliera); per questo tipo di velivoli nella esecuzione di certe manovre che consistevano soprattutto in rapide rollate attorno all'asse longitudinale si patirono dei problemi di divergenza del moto: tipicamente il moto iniziava da una situazione convenzionale in cui il velivolo aveva l'asse corpo longitudinale molto prossimo, come orientamento, al vettore velocità; in presenza di tale divergenza il velivolo iniziava a ruotare attorno ad un asse opportuno (che non specifichiamo) con una componente di velocità angolare che era soprattutto una velocità p di rollio, perciò durante la rotazione andava aumentando l'angolo fra l'asse corpo ed il vettore velocità e molto rapidamente il velivolo tendeva a disporsi ad angoli sempre maggiori rispetto alla direzione della corrente. Una situazione di questo tipo portava a conseguenze catastrofiche poiché ciò che si verifica per questo tipo di moti divergenti è di solito la perdita dell'impennaggio verticale di coda il quale si trova investito da una corrente ad una incidenza tale da non poter più sopportare le forze agenti e quindi si rompe. Questi effetti rientrano anche nella definizione di fenomeni di *roll-coupling* (accoppiamento di rollio): accoppiamenti di tipo inerziale durante l'effettuazione di rapide rollate. Supponiamo di lavorare in una terna di assi principali di inerzia in modo tale che i termini legati al momento misto di inerzia non intervengano; occupiamoci dei termini

$$(I_z - I_x)\,pr \qquad \left(I_x - I_y\right)pq \qquad \left(I_y - I_z\right)qr$$

nei quali compare il prodotto di componenti di velocità angolari. Quando sono grandi i valori della velocità di rollio e della differenza tra momenti di inerzia, gli effetti associati a questi termini nelle equazioni possono diventare rilevanti e modificare il comportamento dell'apparecchio. Faremo prima di tutto un discorso di tipo generale partendo da un esempio e poi vedremo di interpretare quello che accade con riferimento a due manovre che coinvolgono delle rotazioni attorno all'asse longitudinale, le quali cioè hanno la caratteristica di iniziare con delle rotazioni di rollio. Partiamo dal seguente schema semplificato del velivolo.

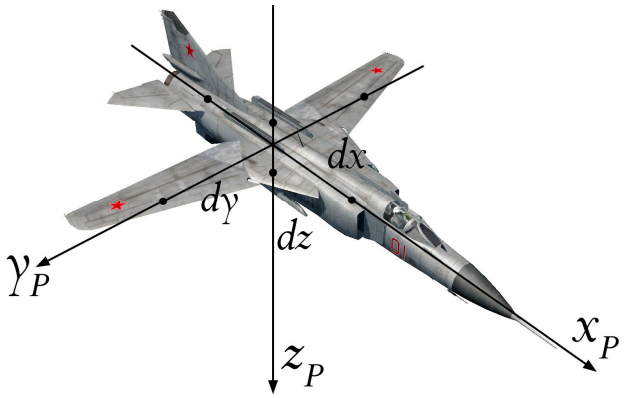


Figura 1

Immaginiamo che la distribuzione delle masse relative al velivolo che stiamo considerando possa essere schematizzata come un insieme di sei masse concentrate, a ciascuna delle quali è associata 1/6 della massa totale, e poste due a due lungo gli assi principali d'inerzia x_P, y_P e z_P. Usiamo questo schema semplificato al fine di esprimere i momenti d'inerzia del velivolo, in particolare

$$\begin{cases} I_x = 2\dfrac{1}{6}m\left(dy^2 + dz^2\right) \\ I_y = 2\dfrac{1}{6}m\left(dx^2 + dz^2\right) \\ I_z = 2\dfrac{1}{6}m\left(dx^2 + dy^2\right) \end{cases}$$

supponiamo che il velivolo, schematizzato tracciando semplicemente l'asse x_P e l'asse y_P (si veda figura 2), sia in rotazione attorno all'asse indicato con x' giacente nel piano $x_P y_P$) con velocità angolare $\vec{\omega}$ e sia inoltre δ l'angolo compreso fra l'asse x_P e l'asse x'.

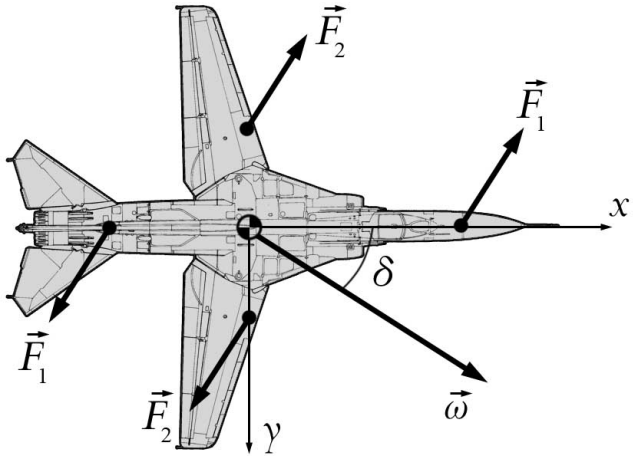


Figura 2

Per studiare gli effetti inerziali dobbiamo tener conto degli effetti di forza centrifuga indotti dalla rotazione del velivolo su quel sistema di masse. Abbiamo una coppia di forze che chiamiamo F_1 associata alle masse disposte lungo l'asse x_P e una coppia di forze che chiamiamo F_2 associata alle masse disposte lungo l'asse y_P, date da[1]

$$F_1 = \frac{1}{6} m\omega^2 dx \operatorname{sen}\delta$$
$$F_2 = \frac{1}{6} m\omega^2 dy \cos\delta.$$

Non è tanto utile considerare le forze, quanto piuttosto le coppie ad esse associate; la coppia di forze F_1 genera un momento di imbardata antiorario che tende a far allontanare l'asse x_P dall'asse di rotazione e che, in base alle convenzioni adottate, è una coppia negativa data da[2]

$$N_1 = -2F_1 dx \cos\delta = -\frac{1}{6} m\omega^2 dx \operatorname{sen}\delta \cdot 2dx \cos\delta = -\frac{1}{6} m\omega^2 dx^2 \operatorname{sen} 2\delta$$

la coppia di forze F_2 è, invece, tale da far ruotare l'asse longitudinale allineandolo con l'asse di rotazione perciò il momento di imbardata ad essa associato sarà un momento positivo dato da

$$N_2 = 2F_2 dy \operatorname{sen}\delta = \frac{1}{6} m\omega^2 dy \operatorname{sen}\delta \cdot 2dy \operatorname{sen}\delta = \frac{1}{6} m\omega^2 dy^2 \operatorname{sen} 2\delta$$

---

[1] $F = mV\omega = m\omega^2 r$

[2] $2 \operatorname{sen}\delta \cos\delta = \operatorname{sen} 2\delta$

possiamo concludere che la coppia N_1 produce un effetto destabilizzante in quanto tende ad allontanare l'asse longitudinale del velivolo dall'asse di rotazione, mentre la coppia N_2 da un contributo stabilizzante. Il momento totale di imbardata che risulta dagli effetti inerziali che stiamo considerando è

$$N = N_1 + N_2$$

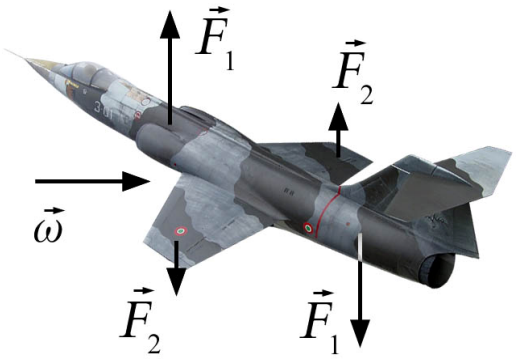
se quindi prevale la coppia N_2 rispetto alla coppia N_1 l'asse longitudinale dell'aereo tende a ruotare allineandosi con l'asse di rotazione e quindi tutti questi effetti tendono a ridursi. Sostituendo le espressioni di N_1 ed N_2 nella precedente otteniamo

$$N = \frac{1}{6} m\omega^2 \operatorname{sen}(2\delta)\left(dy^2 - dx^2\right) = \frac{1}{6} m\omega^2 \operatorname{sen}(2\delta)\frac{2}{2}\left(dy^2 + dz^2 - dx^2 - dz^2\right)$$

e quindi in termini dei momenti di inerzia

$$N = \frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{sen}(2\delta)\left(I_x - I_y\right)$$

questa è l'espressione finale che cercavamo. Questo effetto diverrà tanto più intenso quanto maggiore sarà il modulo della velocità angolare e quanto maggiore sarà la differenza tra i momenti di inerzia. Il segno di questa coppia sarà definito dalla differenza fra i momenti d'inerzia; se tale differenza è negativa osserviamo come la coppia di imbardata sarà negativa e questo corrisponderà ad una situazione di tipo divergente. In un velivolo con caratteristiche convenzionali il momento d'inerzia rispetto a x e quello rispetto a y (d'ora in poi ometteremo il pedice P) sono più o meno dello stesso ordine di grandezza, quindi questo effetto, se presente, non risulta particolarmente intenso, anche perché un velivolo con caratteristiche convenzionali non effettua in genere manovre di rollio ad alta velocità angolare. Le cose cambiano completamente per i velivoli con caratteristiche supersoniche, nei quali le masse sono concentrate per lo più lungo la fusoliera (un esempio estremo ne è l'F-104) e quindi il momento di inerzia rispetto ad x è notevolmente minore del momento di inerzia rispetto ad y e ciò porta di solito ad un effetto destabilizzante molto pronunciato.



Osserviamo come il vettore velocità $\vec{\omega}$ può essere scomposto nelle due componenti lungo l'asse y e lungo l'asse x

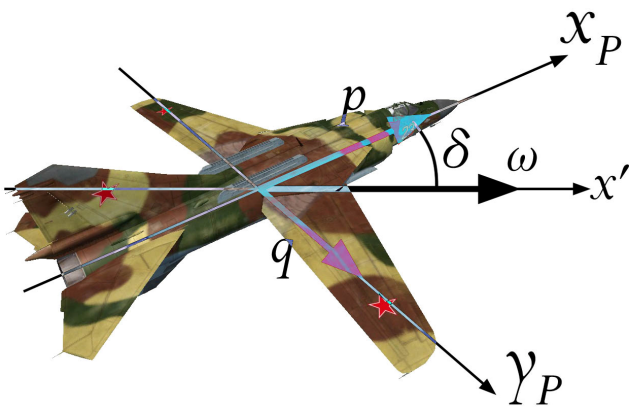


Figura 3

le due componenti sono

$$p = \omega \cos\delta$$
$$q = \omega \operatorname{sen}\delta$$

che sostituite nell'equazione del momento totale di imbardata danno

$$N = \frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{sen}(2\delta)\left(I_x - I_y\right) = \left(I_x - I_y\right) pq$$

questo è proprio il termine che compare nelle equazioni del moto; tale termine è stato portato al secondo membro nell'equazione quindi trattato come una coppia esterna agente sul velivolo. Cerchiamo di interpretare gli effetti ora discussi, ma soprattutto vediamo quale sia la genesi di questo fenomeno, descrivendo come un aeroplano possa arrivare nella situazione rappresentata nello schema che abbiamo discusso analiticamente. Immaginiamo la seguente condizione (si veda figura 4): il velivolo sta volando con un certo angolo di derapata positivo (figura 4a) ed inizia una rotazione di rollio positiva attorno all'asse longitudinale x che corrisponde all'asse longitudinale d'inerzia; osserviamo che dopo una rotazione positiva di 90° l'angolo di derapata si trasforma in un angolo d'attacco negativo (figura 4b). Se dunque la rotazione, come in questo caso, avviene attorno ad un asse longitudinale c'è una continua variazione degli angoli aerodinamici; nell'esempio che stiamo facendo se inizialmente avevamo un angolo di derapata questo si è trasformato dopo 90° di rotazione positiva in un angolo d'attacco negativo.

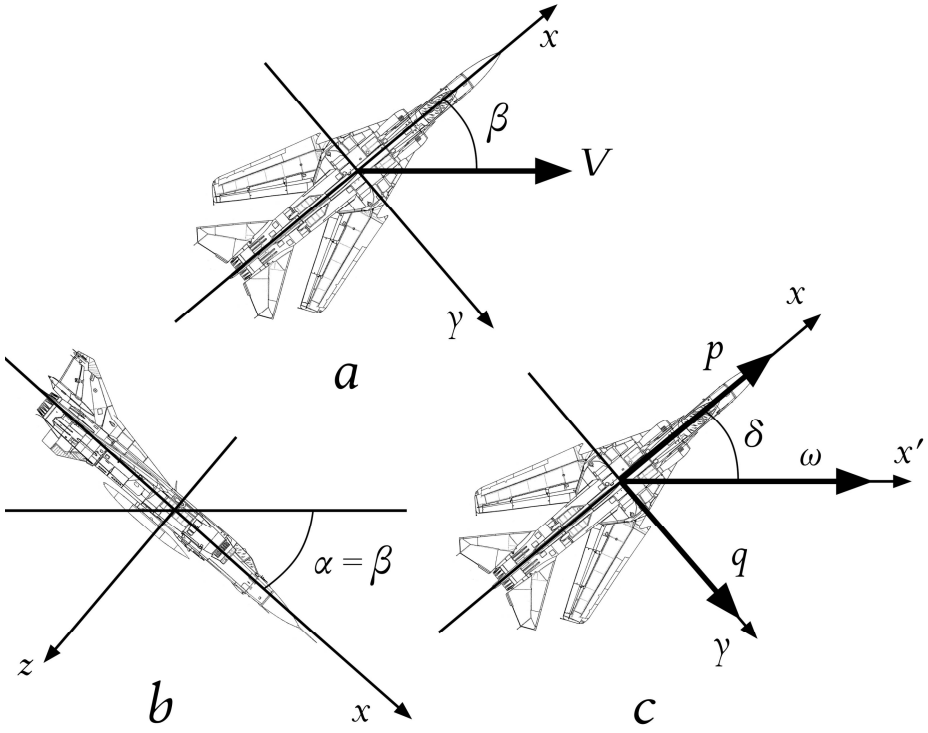


Figura 4

Osserviamo come questo non sarebbe avvenuto se avessimo effettuato la rotazione attorno all'asse vento: se il velivolo avesse ruotato attorno all'asse vento dopo una rotazione di 90° ci saremmo trovati nella stessa situazione iniziale. Quando un pilota comanda una manovra di rollio si può dimostrare che la rotazione avvenga attorno ad un asse compreso fra l'asse corpo longitudinale e l'asse vento, la cui posizione è determinata sia dalla distribuzione di massa che dalle caratteristiche di stabilità aerodinamica dell'apparecchio. Non entriamo in dettaglio su questo punto, ma citiamo soltanto il fatto che velivoli di forma allungata tendono a ruotare attorno all'asse corpo, mentre velivoli con notevole stabilità statica aerodinamica tendono a ruotare attorno all'asse vento[3]. In generale è molto meglio che la rotazione avvenga attorno all'asse vento in quanto, in questo modo, evitiamo di modificare continuamente durante la rotazione i valori di α e di β. Dal momento che tale rotazione ha provocato una variazione dell'angolo d'attacco interviene la stabilità statica longitudinale del velivolo che tende a riportare il valore dell'angolo d'attacco nella condizione iniziale; quindi si produrrà una variazione del momento aerodinamico di beccheggio data da

$$\Delta M = M_\alpha \Delta\alpha$$

[3] Per esempio l'F-16 ha un sistema di aumento del controllo laterale tale che, quando il pilota comanda una rollata, il velivolo utilizza gli alettoni e il timone per effettuare la manovra attorno all'asse vento.

questa variazione è positiva poiché sia M_α che $\Delta\alpha$ sono negativi, e quindi tende a far ruotare l'apparecchio con velocità di beccheggio positiva (come indicato in figura 4c). Il moto di rotazione finale che consideriamo ha una componente di velocità angolare q lungo l'asse y indotta dalla stabilità statica longitudinale; allora la rotazione ed in particolare l'asse di rotazione del velivolo sarà tale che avremo sia una velocità di rollio diversa da zero e positiva sia una velocità di beccheggio diversa da zero e positiva, quindi in figura 4c ritroviamo proprio lo schema delle figure 2 e 3, nel quale vediamo proprio la componente di velocità p e la componente di velocità q, entrambe positive, la cui somma darà il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$. Abbiamo già accennato al fatto che l'asse di rotazione, che abbiamo indicato con x', sarà compreso fra l'asse corpo e l'asse vento e che una forte stabilità statica aerodinamica tende a far ruotare l'aereo attorno all'asse vento; intuitivamente ciò è spiegabile tenendo conto che la stabilità statica aerodinamica fa sì che si sviluppino momenti che tendano ad opporsi a qualunque modifica degli angoli aerodinamici e poiché la rotazione attorno all'asse vento è quella che non modifica gli angoli aerodinamici una elevata stabilità statica tende a produrre appunto una rotazione attorno all'asse vento. Osserviamo inoltre che tanto maggiore è la stabilità statica longitudinale e tanto maggiore sarà la velocità q che questa induce, ma notiamo (si veda figura 4c) che più la velocità di beccheggio è grande e tanto più l'asse di rotazione si discosta dall'asse corpo e si avvicina all'asse vento. Il risultato è lo sviluppo di un momento di imbardata la cui caratteristica stabilizzante o destabilizzante dipende dalla differenza tra i due momenti di inerzia. Una situazione stabilizzante è quella in cui la coppia inerziale tende ad allineare il velivolo con l'asse di rotazione, mentre un effetto destabilizzante è quello in cui durante la rotazione il velivolo si discosta sempre più dall'asse di rotazione (questa situazione vedrebbe aumentare sempre di più l'incidenza del piano di coda verticale).

Abbiamo parlato di sviluppo di momenti di imbardata determinati da effetti inerziali, vediam0 adesso lo sviluppo di momenti di beccheggio i quali, di nuovo, possono essere sia stabilizzanti che destabilizzanti.

Questa volta (si veda figura 5a) consideriamo una rotazione che inizialmente avviene attorno all'asse di rollio con un certo valore dell'angolo d'attacco; dopo una rotazione di 90° quello che era un angolo d'attacco è divenuto un angolo di derapata (si veda figura 5b) e quindi si è prodotta una perturbazione proprio su β.

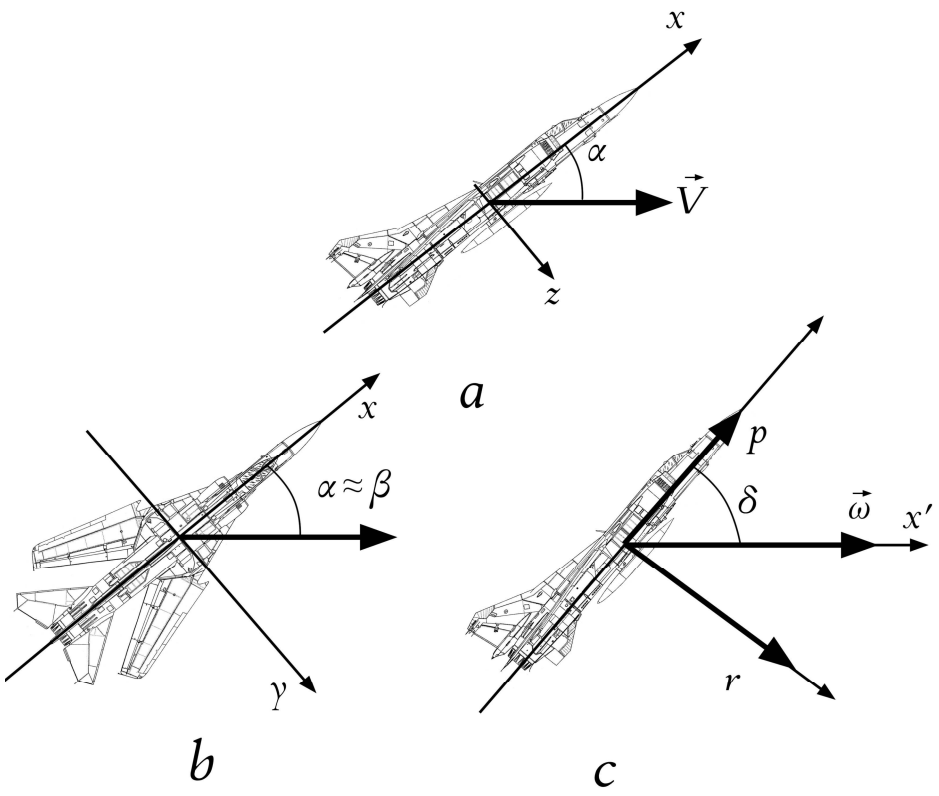


Figura 5

La perturbazione su β fa intervenire la stabilità statica direzionale del velivolo, la quale tende a ruotarlo mettendone il muso nel letto del vento; se vogliamo interpretare le cose in termini di effetti aerodinamici e derivate di stabilità avremo

$$\Delta N = N_\beta \Delta\beta$$

e poiché sia la variazione di β che la stabilità direzionale sono positive, avremo che $\Delta N > 0$; tale momento determinerà l'insorgere di una velocità angolare di rotazione r positiva e quindi la rotazione finale vedrà diverse da zero e positive sia la componente di velocità angolare p sia la componente di velocità angolare r; queste componenti identificano un vettore velocità angolare $\vec{\omega}$ inclinato di un angolo δ rispetto all'asse longitudinale (si veda figura 5c). Esaminiamo lo schema delle forze centrifughe indotte dalla rotazione attorno all'asse che abbiamo chiamato x' ed osserviamo una coppia legata alle masse disposte lungo l'asse x che tende ad aumentare δ e che produce un effetto destabilizzante ed una coppia legata alle masse disposte lungo l'asse y, che tende a ridurre δ e quindi ha un effetto stabilizzante. Il momento di beccheggio risultante, con un procedimento analogo a quello che ci ha portato alla espressione di N, sarà

$$M = (I_z - I_x)\, pr$$

in genere $I_z > I_x$ e quindi l'effetto risultante è di tipo destabilizzante: una coppia di beccheggio positiva tende a far ruotare il velivolo aumentando l'angolo δ. Questa tendenza ad aumentare δ, che corrisponde ad un aumento dell'angolo d'attacco, sarà possibilmente compensata dalla stabilità statica longitudinale; se, però, la stabilità statica longitudinale non riesce ad opporsi a questa tendenza il moto sarà divergente con conseguenze che possono essere catastrofiche.

Concludiamo mostrando per alcuni velivoli il rapporto I_y / I_x

Apparecchio	I_y / I_x
Jet Star	1,2
Boeing 747	1,8
F-4C	4
F-104	16,5
X-15	22

È interessante notare come per un 747 questo rapporto sia circa 2, mentre per velivoli molto allungati (F-104, X-15) questo rapporto aumenti di un ordine di grandezza (in questo caso tutti gli aspetti negativi risultano notevolmente accentuati).

21.2 - L' AUTOROTAZIONE

Abbiamo messo in evidenza certi effetti di tipo inerziale che risultano importanti negli equilibri del volo in avvitamento ed abbiamo anche citato un fenomeno, indotto da questi effetti inerziali, molto importante per le manovre di rollio di aeroplani ad alte prestazioni; studiamo adesso un altro fenomeno, di carattere esclusivamente aerodinamico, il quale è l'elemento che innesca il fenomeno della cosiddetta *vite*; questo fenomeno prende il nome di *autorotazione*.

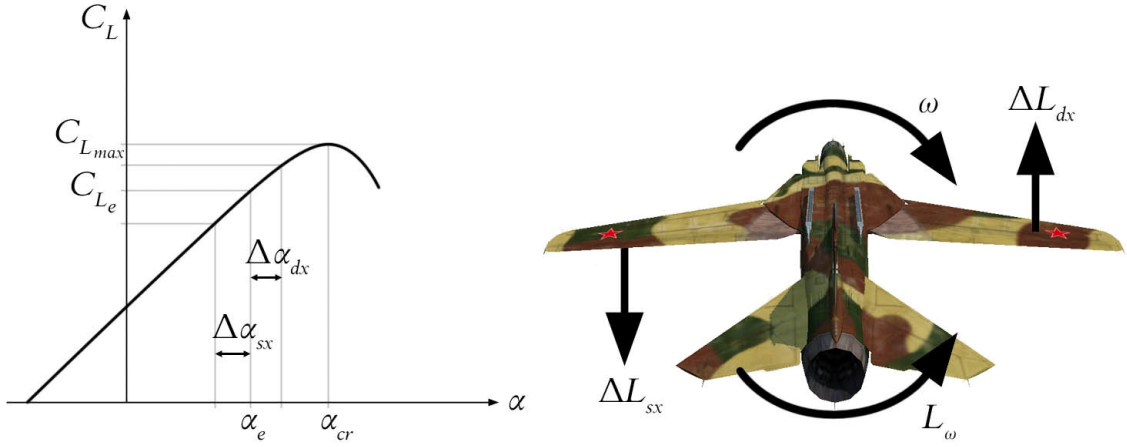


Figura 6

Ne diamo prima una descrizione qualitativa: immaginiamo di avere un modello di aereo, o più semplicemente un modello di ala, posto in galleria del vento e vincolato in modo tale che si possa variare l'angolo d'attacco (si vedano le figure 12 e 13); il modello è inoltre libero di ruotare attorno ad un albero x' parallelo alla direzione della corrente all'infinito (quindi non intervengono gli effetti di tipo inerziale visti nel § precedente). Supponiamo di avere un motore che agisca sull'albero, con il quale siamo in grado di imprimere certe velocità angolari di rotazione $\vec{\omega}$ al nostro modello e di avere anche uno strumento opportuno che ci permetta di misurare la coppia fornita dal motore. Vogliamo studiare come vari questa coppia al variare della velocità angolare di rotazione (mantenuta poi costante) del modello ed al variare dell'angolo d'attacco. Supponiamo di avere il modello a bassa incidenza, comunque inferiore a quella critica; sappiamo che i momenti aerodinamici indotti da rotazioni (rotazioni di rollio), sono rappresentati a basse incidenze[4] dalla derivata L_p. Per effetto della velocità angolare aumenterà l'incidenza sulla semiala che si abbassa e diminuisce l'incidenza sulla semiala che si alza; il risultato è quello di un momento di rollio negativo in questo schema (rollata a destra), il quale si oppone alla rotazione del nostro modello. A bassi valori dell'angolo d'attacco le cose vanno perciò come ci aspetteremmo: per mantenere il modello in rotazione a velocità angolari (costanti) più elevate dobbiamo applicare una coppia motrice che sarà sempre maggiore all'aumentare della velocità di rotazione (costante) che vogliamo ottenere. Se ripetiamo questa prova aumentando i valori dell'angolo d'attacco, osserveremo che per angoli di incidenza superiori a quello critico, impartendo un atto di moto di rotazione iniziale, il modello, senza che sia applicata nessuna coppia motrice, si mette in rotazione ed accelera fino a raggiungere un valore di rotazione stazionario, quindi inizia a ruotare con una velocità angolare costante. In questa situazione ci troviamo in condizioni di autorotazione: di fatto il modello sfrutta l'energia della corrente per mantenere una certa velocità

[4] Più è piccola l'incidenza e più l'asse di rotazione si avvicina a quello di rollio e quindi la velocità angolare di rotazione è quasi esclusivamente una velocità di rollio *p*.

angolare. L'interpretazione di questo fenomeno è particolarmente complicata; la differenza tra il caso in cui non c'è autorotazione e quello in cui c'è autorotazione risiede proprio nel fatto che, a seconda del valore dell'angolo d'attacco, il momento aerodinamico (attorno all'asse di rotazione) può essere smorzante o motore. Questo fatto dipende dalla curva di portanza; vediamo prima il caso in cui l'incidenza sia minore di quella critica, come in figura 6 (sia α_e l'angolo d'attacco al quale è posto il nostro modello).

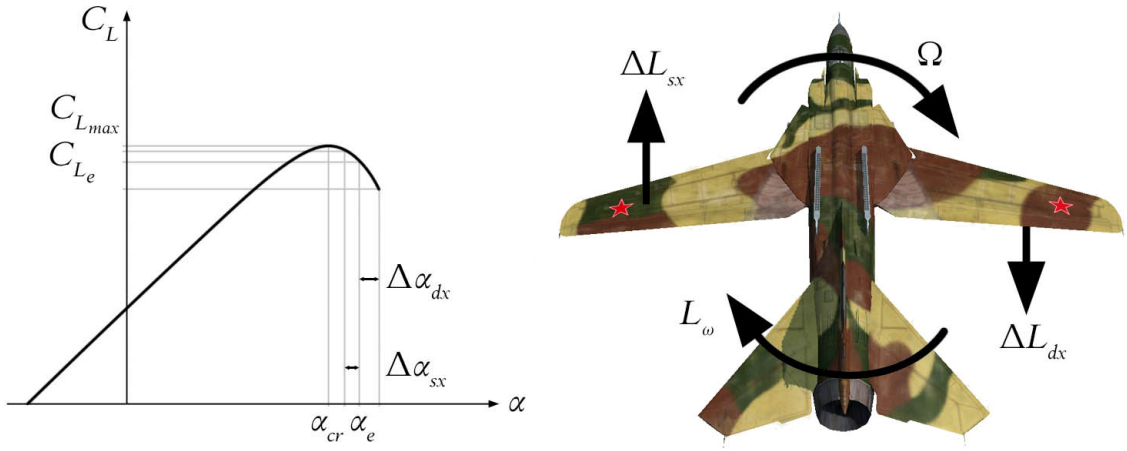


Figura 7

Il velivolo, visto dalla coda, ruota con una certa velocità $\vec{\Omega}$ positiva; sulla semiala destra abbiamo una variazione positiva di incidenza, mentre sulla semiala sinistra abbiamo una variazione negativa di incidenza; ad un aumento dell'angolo d'attacco sulla semiala destra corrisponde una variazione positiva del coefficiente di portanza e analogamente ad una variazione negativa dell'angolo d'attacco sulla semiala sinistra corrisponde una variazione negativa del coefficiente di portanza. L'effetto è quello di un momento aerodinamico $\vec{L}_\omega$ (riferito cioè all'asse di rotazione) negativo che si oppone alla rotazione.

Quando invece il modello è calettato ad un'incidenza maggiore di quella critica, continuiamo ad avere un aumento dell'angolo d'attacco sulla semiala destra a cui però questa volta corrisponde una diminuzione del coefficiente di portanza. Rispetto al caso precedente sulla semiala destra vi sarà un aumento dell'angolo d'attacco a cui corrisponde una diminuzione della portanza. Analogamente sulla semiala sinistra troveremo anche in questo caso una diminuzione dell'incidenza, ma trovandoci ad incidenze superiori a quella critica, ciò corrisponde ad una variazione positiva della portanza. Perciò ad una variazione positiva dell'incidenza sulla semiala destra si accompagna questa volta una diminuzione del coefficiente di portanza ed ancora sulla semiala sinistra ad una diminuzione dell'incidenza si accompagna una variazione positiva del coefficiente di portanza: l'effetto risultante è un momento non più smorzante, ma motore. In corrispondenza dell'incidenza critica si ha un comportamento simmetrico sulle due semiali e quindi non è né un momento smorzante né un momento motore. Questo tipo di problemi rappresentati dal cambio di segno di certi effetti collegati

alla generazione di momenti di rollio accadano tutte le volte che l'apparecchio si trovi a volare al di sopra dell'incidenza critica[5].

Ciò che abbiamo detto finora giustifica solo qualitativamente che cosa avviene, perché in realtà alle incidenze alle quali si manifesta questa situazione è necessario lavorare in termini di coefficiente di forza risultante totale, piuttosto che in termini di coefficiente di portanza; esprimere solo il coefficiente di portanza, cioè, è una approssimazione grossolana per valori di incidenza piuttosto elevati. Però, prima di procedere nel formulare un criterio che ci indichi quando siamo in condizioni di autorotazione e quando non siamo in condizioni di autorotazione, possiamo completare il discorso iniziato parlando di prove pratiche, richiamando un diagramma che viene costruito sperimentalmente proprio allorquando si studino fenomeni di autorotazione e che aggiunge qualche elemento in più a ciò che abbiamo detto sino a questo punto.

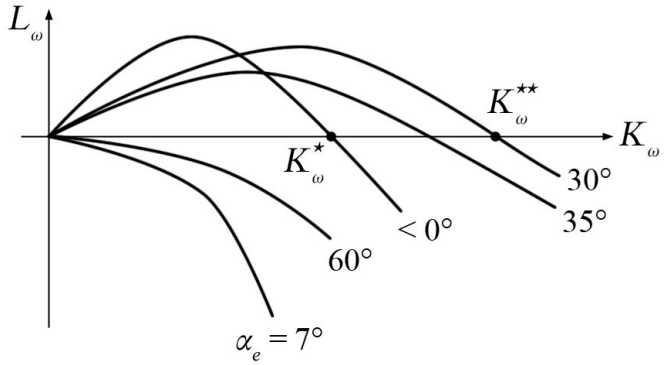


Figura 8

Su tale grafico è riportato il momento L_ω, di cui abbiamo parlato, in funzione di un parametro detto *parametro di autorotazione* il quale è definito come

[5] In un incidente che ha coinvolto un ATR-42 la situazione critica cominciò con uno stallo provocato dalla formazione di ghiaccio sulle ali; nei dati della scatola nera si trovò una risposta in termini di momento di rollio al comando degli alettoni dato dal pilota che era sempre di segno opposto per lo meno per buona parte del tempo; il pilota cercava infatti di contrastare una tendenza dell'aereo a rollare a destra (lo stallo non avviene mai in modo simmetrico, ma in genere stalla sempre prima un'ala dell'altra; in quel caso stallò per prima la semiala destra), dando un comando sugli alettoni dalla parte opposta: il risultato fu però quello di creare un momento che accentuò ancora di più l'angolo di rollio. Allora la cosa venne interpretata osservando che questo comportamento esisteva solo per angoli d'attacco superiori a quello critico, quindi un aumento di incidenza sulle sezioni alari in corrispondenza degli alettoni, per il fatto che l'ala era stallata, aveva prodotto l'effetto opposto, ovvero un aumento dell'angolo d'attacco invece di produrre un aumento del coefficiente di portanza produsse una diminuzione del coefficiente di portanza. Non fu questo il fatto che provocò la conclusione catastrofica dell'incidente quanto il fatto che rimase il *trim* impostato con un comando tutto a cabrare (non si è capito per quale motivo) e ciò impedì di fatto di riportare l'angolo d'attacco a valori inferiori a quello critico.

$$K_\omega = \frac{\omega b}{2V}$$

K_ω è cioè una velocità angolare resa non dimensionale mediante il termine $\frac{b}{2V}$. Supponiamo di aver a disposizione uno strumento che misuri il momento L_ω. Per condizioni di volo a bassa incidenza (per esempio quando α sia uguale a 7°), all'aumentare della velocità angolare di rotazione dobbiamo aspettarci un L_ω negativo perciò smorzante, quindi con il motore dobbiamo fornire una coppia motrice uguale ed opposta ad L_ω per mantenere il velivolo in rotazione per quel valore di K_ω. Se aumentiamo l'angolo d'attacco a valori superiori all'incidenza critica, (per esempio $\alpha_e = 30°$) possiamo trovarci di fronte ad una situazione del tutto diversa per qualunque velocità maggiore di zero e minore di una certa velocità caratteristica, il momento L_ω è positivo e quindi otteniamo una coppia aerodinamica motrice e, senza che il motore intervenga, la velocità di rotazione aumenta; questo avviene sino a $K_\omega = K_\omega^{\star\star}$ perché per questo valore la coppia aerodinamica è nulla, e quindi la velocità angolare di rotazione è costante: siamo in una condizione di autorotazione ed il velivolo mantiene costantemente quella velocità angolare senza che il motore eroghi alcuna coppia; dal punto di vista fisico ciò corrisponde la fatto che il velivolo assorbe energia dalla corrente per mantenersi in rotazione. Osserviamo che se aumentiamo ulteriormente la velocità angolare dopo aver raggiunto un valore corrispondente all'autorotazione, la coppia aerodinamica cambia segno per poi aumentare con segno negativo; perciò al di sopra di un certo valore della velocità angolare torniamo nelle condizioni in cui il momento è smorzante. Questo comportamento è dovuto al fatto che all'aumentare della velocità angolare aumenta il termine $\Delta\alpha = \frac{y\omega}{V}$ rispetto al valore di equilibrio.

$$\alpha_d = \alpha_e + \Delta\alpha_d$$
$$\alpha_s = \alpha_e + \Delta\alpha_s$$

Figura 9

Quindi all'aumentare della velocità angolare il campo aerodinamico corrisponde sempre di più a quello che avremmo con un modello che ruota senza avere una componente di velocità all'infinito; all'aumentare di ω vale a dire, quello che conta di più è la parte di perturbazione rispetto ad α_e; in questa situazione sulla semiala destra c'è una forza aerodinamica assimilabile ad una resistenza diretta verso l'alto, mentre sulla semiala sinistra si manifesta una resistenza, diretta verso il basso, ma più piccola in modulo. Si genera così una coppia di rollio negativa e quindi smorzante. Notiamo che dal punto di vista qualitativo è lo stesso risultato che si ottiene mettendo il modello in rotazione ad una certa velocità angolare e ridu-

cendo la velocità all'infinito: man mano che V diminuisce conta sempre di più il campo di velocità indotte dalla rotazione e non la velocità all'infinito e quindi il momento torna ad essere smorzante.

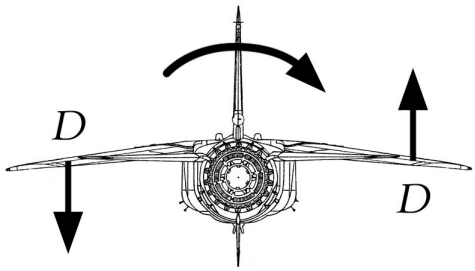


Figura 10

Tipicamente all'aumentare dell'angolo d'attacco il parametro di autorotazione diviene sempre più grande sino ad una situazione in cui, per un aumento dell'angolo d'attacco, K_ω comincia a diminuire e per un certo valore di α il fenomeno dell'autorotazione scompare. Questo giustifica la necessità di formulare un criterio che ci possa indicare quando sussistano le condizioni per l'autorotazione. Possiamo porre i risultati della nostra analisi sperimentale, che ci hanno permesso di tracciare il grafico di figura 8, in una forma più interessante; otteniamo tale forma quando riportiamo $K_\omega^\star$, punto di intersezione fra l'asse $L_\omega = 0$ e queste curve, in funzione dell'angolo d'attacco α_e.

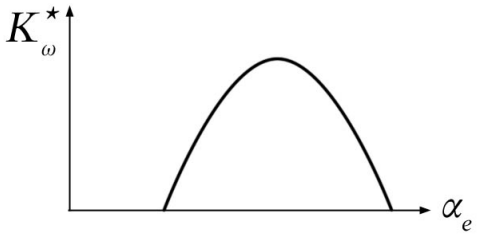


Figura 11

Questo diagramma (ottenuto sempre per via sperimentale) indica in quale intervallo di angolo d'attacco possano sussistere condizioni di autorotazione, ed è specifico per un certo tipo di aeroplani o per una certa ala.

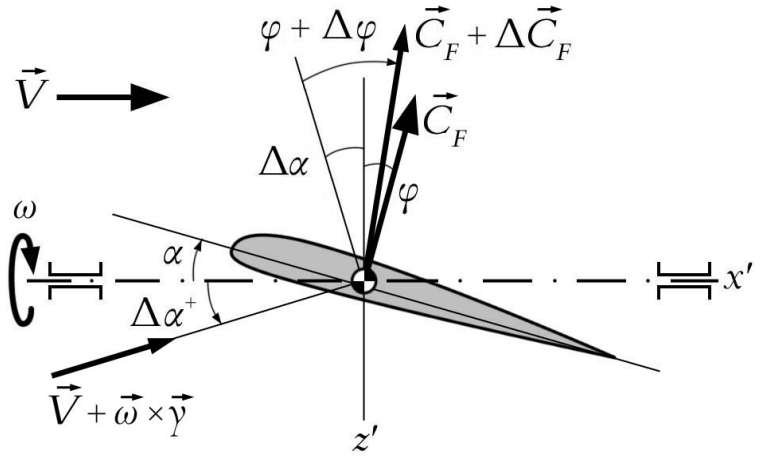
21.3 - CRITERIO DI KNIGHT

Effettuare delle prove sperimentali è più costoso che valersi un criterio di tipo analitico. Un criterio sufficientemente semplice è il *criterio di Knight*, il quale fornisce un risultato molto interessante e utile. Quello che faremo sarà studiare cosa accada mediamente su ciascuna delle due semiali quando tutto il sistema sia in rotazione, e ciò permetterà di valu-

tare analiticamente, in modo più corretto di quanto non fatto nel paragrafo precedente, il momento L_ω. Tale studio deve essere fatto per valori elevati dell'angolo d'attacco quindi dobbiamo esprimerci in termini del coefficiente di forza aerodinamica C_F (che abbiamo già richiamato in altre occasioni) e che è definito come

$$C_F = \sqrt{C_L^2 + C_D^2}$$

quindi dobbiamo tener conto non solo della portanza, ma anche della resistenza che per questi valori dell'angolo d'attacco diventa molto elevata. Valutiamo il contributo al momento L_ω generato da ciascuna delle due semiali, facendo un discorso qualitativo, ma sufficientemente accurato. La semiala destra, la quale per velocità di rotazione positive si abbassa, avverte un aumento dell'angolo d'attacco. Valutiamo la variazione della forza aerodinamica per questa semiala, per effetto di questa rotazione.



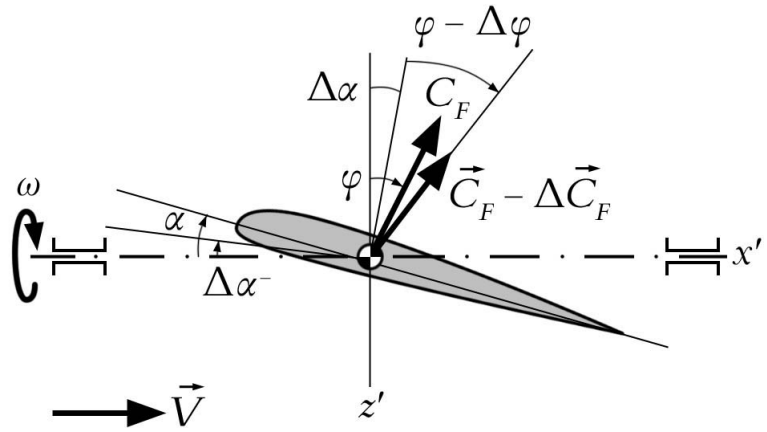
Sezione della semiala destra a distanza y dall'osservatore - Figura 12

Supponiamo che quella in figura sia una sezione della semiala destra, la quale sta ruotando attorno all'asse di rotazione x'; in condizioni di volo ad alta incidenza (superiori a quella critica) una regola accettata è quella di considerare la risultante delle forze aerodinamiche perpendicolare al piano alare (cioè alla corda del profilo); la direzione di $\vec{C}_F$ è quindi individuata dall'angolo φ formato con la perpendicolare alla corrente; questo se la velocità angolare è nulla, mentre se il sistema è in rotazione, sulla semiala destra otterremo un aumento dell'angolo d'attacco; per effetto di questa variazione dell'angolo d'attacco osserveremo una certa variazione del coefficiente di forza aerodinamica $\vec{C}_F + \Delta\vec{C}_F$; la perpendicolare alla nuova corrente all'infinito sarà inclinata di $\Delta\alpha_{dx}$ rispetto all'asse z'. Introduciamo un altro angolo che serve per identificare l'orientamento del vettore forza aerodinamica rispetto alla direzione perpendicolare alla corrente: indichiamo tale angolo come $\varphi + \Delta\varphi$. Ricordiamo che se fossimo a bassa incidenza il vettore forza aerodinamica sarebbe diretto in un

modo molto prossimo alla perpendicolare alla corrente di qui l'interesse a far intervenire un angolo φ o $\varphi + \Delta\varphi$ che dà proprio una misura di quanto questo vettore sia ruotato rispetto alla perpendicolare. Per calcolare il momento L_ω rispetto ad x' dobbiamo calcolare la variazione della componente di forza secondo la direzione perpendicolare all'asse di rotazione, cioè la variazione di forza proiettata nella direzione z', perpendicolare ad x'

$$\Delta C_{z_{dx}} = (C_F + \Delta C_F)\cos(\varphi + \Delta\varphi - \Delta\alpha_{dx}) - C_F \cos\varphi \cong \Delta C_F \cos\varphi$$

dove abbiamo posto $\Delta\varphi \approx \Delta\alpha_{dx}$ poiché ad incidenze molto elevate il vettore di forza aerodinamica ruota molto poco. Vediamo adesso ciò che accade sull'altra semiala.



Sezione della semiala sinistra a distanza y dall'osservatore - Figura 13

Questa volta, a causa della rotazione, la semiala provoca una diminuzione dell'angolo di incidenza, quindi nel caso più generale il coefficiente di forza è diventato $C_F - \Delta C_F$ e l'orientamento del coefficiente di forza perturbato rispetto alla direzione ortogonale alla corrente è individuato dall'angolo $\varphi - \Delta\varphi$. La variazione del coefficiente di forza secondo z' è dunque data da

$$\Delta C_{z_{sx}} = (C_F - \Delta C_F)\cos(\varphi - \Delta\varphi + \Delta\alpha_{sx}) - C_F \cos\varphi \cong -\Delta C_F \cos\varphi$$

avendo anche qui posto $\Delta\varphi \approx \Delta\alpha_{sx}$. Il momento cercato è allora dato da

$$L_\omega = \frac{1}{2}\varrho V^2 \int_0^{b/2} \left[-\Delta C_{N_{dx}} + \Delta C_{N_{sx}}\right] y c dy = -\varrho V^2 \int_0^{b/2} (\Delta C_F \cos\varphi)\, y c dy .$$

Possiamo esprimere il ΔC_F in funzione dell'angolo d'attacco come

$$\Delta C_F = \frac{\partial C_F}{\partial \alpha}\Delta\alpha = \frac{\partial C_F}{\partial \alpha}\frac{y\omega}{V}$$

dove la derivata $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha}$ è costante lungo l'apertura alare; sostituendo nella espressione di L_ω abbiamo dunque

$$L_\omega = -\varrho V\omega\cos\varphi\frac{\partial C_F}{\partial \alpha}\int_0^{b/2} y^2 c\,dy \qquad \begin{cases}\frac{\partial C_F}{\partial \alpha} > 0 \;\Rightarrow\; L_\omega < 0\\ \frac{\partial C_F}{\partial \alpha} < 0 \;\Rightarrow\; L_\omega > 0\end{cases}$$

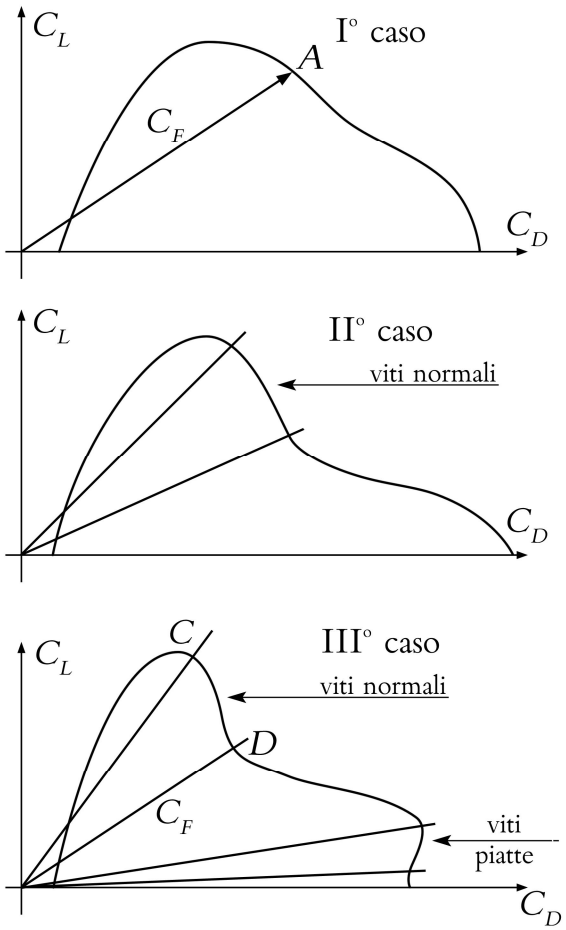


Figura 14

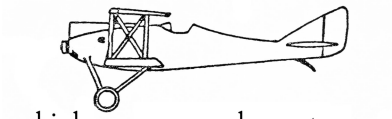
e questa è l'espressione che ci fornisce il *criterio di Knight*.

L'informazione importante risiede nel fatto che il segno del momento L_ω dipenda dal segno della derivata del coefficiente di forza rispetto all'angolo d'attacco; se $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha} > 0 \;\Rightarrow\; L_\omega < 0$ e quindi il momento è smorzante e non c'è autorotazione; se invece $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha} < 0 \;\Rightarrow\; L_\omega > 0$ e quindi il momento diventa un momento motore.

Questo criterio, sia pure per elaborazioni moto semplici, è utile dato che basterà avere a disposizione la polare del velivolo completo per capire immediatamente se potranno sussistere o meno condizioni di autorotazione: dobbiamo solo verificare, eventualmente per via grafica, se all'aumentare dell'angolo d'attacco il coefficiente di forza aumenti o diminuisca. Chiariamo con un esempio; osserviamo in figura 12 tre polari complete, (cioè per α che va da 0° a 90°); per sapere se possano insorgere condizioni di autorotazione riportiamo il coefficiente di forza[6] al variare

[6] Ricordiamo che il modulo del coefficiente di forza, corrispondente ad un determinato angolo d'attacco, si ottiene semplicemente misurando il segmento che unisce l'origine al punto sulla polare che corrisponde all'incidenza data.

dei diversi angoli d'attacco e verifichiamo se all'aumentare dell'incidenza il modulo di tale coefficiente aumenti o diminuisca. Notiamo come nel I° caso le condizioni di autorotazione non si verificano mai, poiché la derivata $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha}$ è sempre maggiore di zero. Il II° caso[7] è quello più frequente essendo presente una certa regione di angoli d'attacco in cui si verifica che la derivata $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha}$ è negativa; in questo intervallo di variazione di angoli d'attacco (in genere parliamo di angoli d'attacco compresi fra 25° e 35°) potremo avere il moto di avvitamento. L'ultima situazione è quella peggiore di tutte: alcuni aeroplani avevano in passato polari di quel tipo, in cui sussistono due zone nelle quali può verificarsi l'autorotazione; una prima zona è analoga a quella che abbiamo trovato nel II° caso, ed una seconda zona, ad incidenze molto prossime a 90° (o comunque tra 70° e 90°): in questa regione la derivata $\frac{\partial C_F}{\partial \alpha}$ è negativa e quindi sussistono condizioni di autorotazione.


biplano senza scalamento
(S.V.A.)

biplano con scalamento negativo
(Beechcraft D-17)

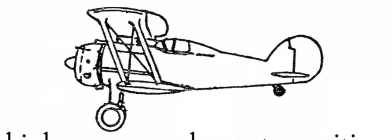

biplano con scalamento positivo
(Gloster Gladiator)

Figura 15

Questo secondo tipo di situazioni è tipica dei velivoli biplani (si veda figura 15) nei quali, a valori dell'angolo d'attacco intorno a 90°, accade che una parte della superficie alare, in particolare l'ala superiore, resta in ombra rispetto a quella inferiore determinando globalmente una diminuzione del coefficiente di resistenza della configurazione. Questa situazione rendeva frequente per questi aeroplani l'entrata in *vite piatta*: vite ad alti valori degli angoli d'attacco; il rimedio che fu proposto era quello di sfalsare l'ala superiore rispetto a quella inferiore, in modo tale che l'ala superiore non fosse in ombra rispetto all'altra, per valori di incidenza in cui poteva verificarsi l'autorotazione. Quando abbiamo a che fare con situazioni di questo tipo il diagramma di autorotazione presenterà due zone separate: una zona a valori di angoli d'attacco intorno a 35° - 45° e una seconda zona intorno ai 70° - 80°

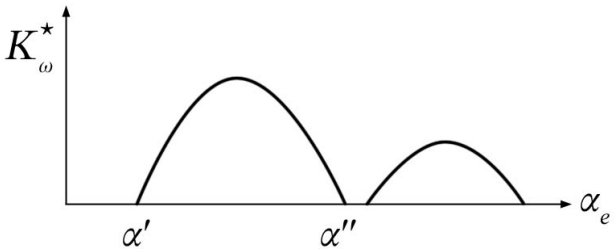


Figura 16

[7] Questo caso, ed il successivo, mettono in evidenza la relazione esistente tra il fenomeno dell'autorotazione ed il volo in vite parlando di viti normali e viti piatte.

21.4 - EFFETTO DELL'ANGOLO DI DERAPATA SUL CAMPO DI AUTOROTAZIONE

Parlando di autorotazione un'ultima osservazione da fare è quella relativa a ciò che possa accadere in condizione di volo non simmetrico, cioè quando l'angolo di derapata sia diverso da zero. Quando è presente un angolo di derapata, il criterio di Knight non ha più alcun valore ed il diagramma di autorotazione risulta completamente modificato: si verifica sperimentalmente che, per velocità di rotazione positiva, valori positivi di β riducono la regione di autorotazione, quindi si crea una asimmetria delle azioni aerodinamiche sulle sue semiali tale da ridurre la regione di autorotazione; l'opposto avviene invece per valori negativi di β: se è presente vento laterale dalla parte della semiala che si alza l'effetto, che non dimostriamo, è quello di ampliare la regione di autorotazione

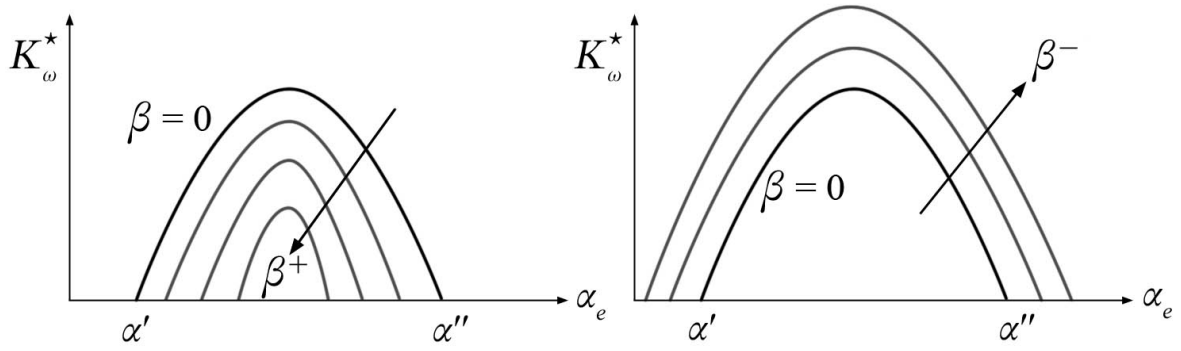


Figura 17

un aeroplano che proceda con angolo di derapata nulla non potrebbe mai avere una vite piatta con una velocità di rollio positiva, al contrario di un aereo che voli ad angoli di derapata negativi; quindi l'angolo di derapata cambia completamente il risultato ottenibile col criterio di Knight.

21.5 - LA VITE: DESCRIZIONE E GENESI DEL FENOMENO

Abbiamo visto nei §§ precedenti gli effetti inerziali, fondamentali nella determinazione dell'equilibrio in vite, e il fenomeno della autorotazione che rappresenta il meccanismo attraverso il quale, durante un avvitamento, viene trasferita energia dalla corrente al velivolo per mantenerlo in un moto di rotazione; l'autorotazione è perciò un fenomeno puramente aerodinamico che costituisce l'elemento motore in avvitamento. Cominciamo l'analisi del volo in vite, dando anzitutto una descrizione qualitativa di ciò che avviene (si veda figura

18): il fenomeno inizia con uno stallo che si può realizzare ad angolo di derapata nullo o diverso da zero, a seguito del quale il velivolo entra in autorotazione; c'è poi una fase, detta di *vite incipiente*, in cui le grandezze del moto non sono costanti; si instaura una situazione in cui il baricentro del velivolo descrive una traiettoria elicoidale con un raggio piuttosto piccolo, pari ad una frazione dell'apertura alare (dal 6% al 20%), e con un passo molto grande; è possibile che passi[8] poi ad una fase in cui le grandezze del moto si mantengono costanti: questa fase è detta *vite stazionaria* e, se il pilota non effettua qualche manovra per interrompere il moto di avvitamento stazionario, tale situazione si protrae fino a terra; se invece il pilota compie la manovra prevista, questo moto si interrompe ed il velivolo torna ad una situazione di volo su traiettoria rettilinea ad incidenza bassa.

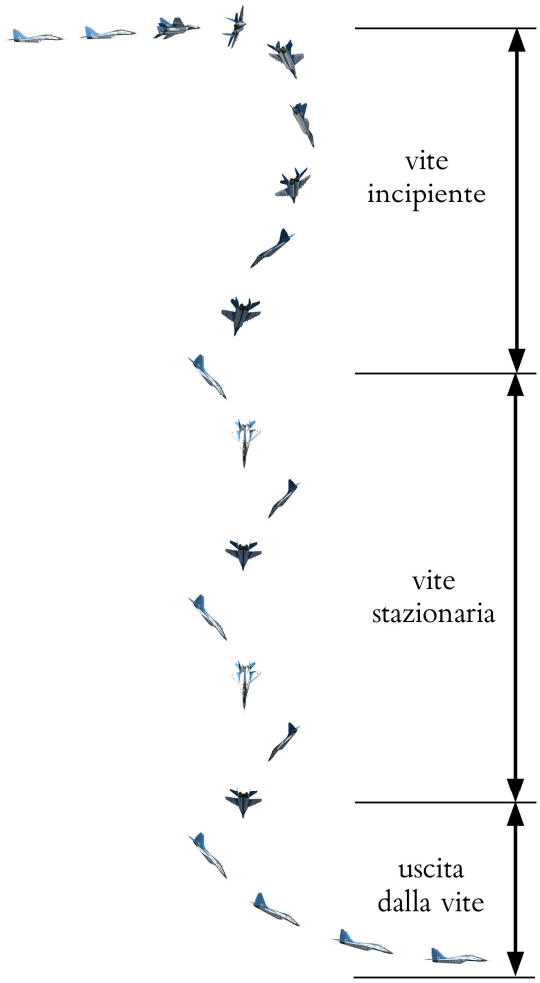


Figura 18

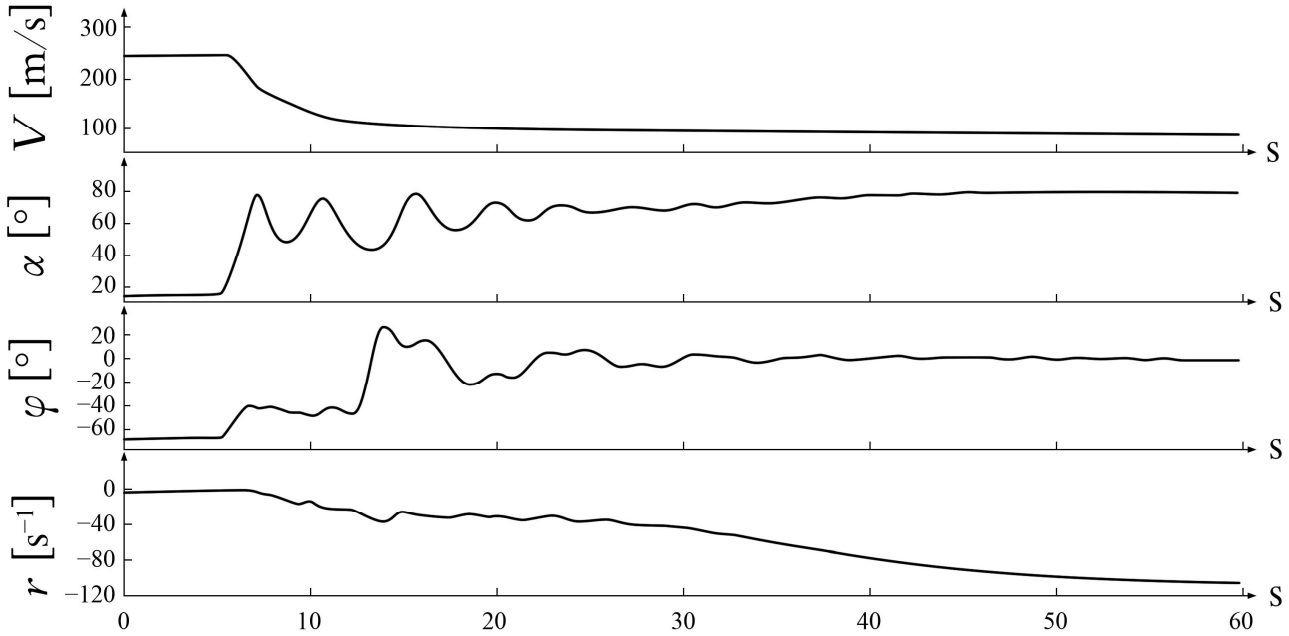
Durante la vite la velocità angolare è relativamente elevata (2 - 9 s^{-1}) ed è soprattutto una velocità di imbardata; gli angoli d'attacco vanno invece da 25° ad 85°. Per quanto riguarda la traiettoria, abbiamo già detto che il raggio è piccolo ed il passo è grande; le velocità verticali possono variare moltissimo durante l'avvitamento (da 20 m/s a 300 m/s) a seconda delle caratteristiche del velivolo e del tipo di vite. Osserviamo come il velivolo ruoti attorno al suo baricentro mantenendo l'asse longitudinale in una direzione molto prossima a quella dell'asse della vite; l'angolo di derapata rimane molto elevato (−50° - +50°). Concludiamo questa analisi qualitativa con un esempio: in figura 19 sono riportati dei grafici ottenuti effettuando simulazioni del moto di un F-16 opportunamente modificato per permettergli di volare in condizioni di alta incidenza[9]. Per ottenere questi risultati il modello dinamico che si utilizza deve tener conto di tutti gli effetti inerziali non lineari; in particolare il modello aerodinamico che si usa in questi casi è un modello che deve essere valido per variazioni molto ampie dell'angolo di derapata e dell'angolo d'attacco[10], per le

[8] Molto più spesso le variabili del moto subiscono una variazione periodica.

[9] L'F-16 ha un sistema di aumento del controllo che impedisce il raggiungimento di incidenze superiori 29°; il modello col quale è stata effettuata la simulazione è detto MATV (*Multi Axis Thrust Vectoring*) perché prevede la possibilità di orientare la spinta.

[10] Abbiamo già detto che per l'F-16, per angoli d'attacco che vanno da −30° a 90° e per angoli di derapata da −30° a 40° la banca dati aerodinamica è molto dettagliata.

quali l'aerodinamica non è lineare; quindi per studiare la vite abbiamo bisogno di un modello dinamico completo, nel quale sono contenuti tutti i termini delle equazioni del moto. La situazione di partenza vede il velivolo con velocità relativamente elevata, angolo d'attacco certamente inferiore a quello critico, angolo di sbandamento relativamente elevato e velocità angolare di imbardata bassa: il velivolo cioè sta effettuando una virata elicoidale ad angolo di rampa negativo abbastanza grande; la manovra che viene fatta per entrare in vite consiste in un comando alla vettorizzazione della spinta tale da generare un momento cabrante, per effetto del quale aumenta l'angolo d'attacco. V'è poi una certa fase transitoria con oscillazione delle diverse variabili; si riporta infine l'asse di spinta nella condizione iniziale e la traiettoria elicoidale evolve in una traiettoria di avvitamento a grande passo e piccolissimo raggio. Possiamo osservare in figura 20 e 21 l'assetto assunto dal velivolo durante gli istanti successivi all'azione sul comando di vettorizzazione della spinta ed in particolare notiamo come sia piccolo il raggio della traiettoria; osserviamo inoltre come tale situazione sia diversa da quella che si aveva nelle fasi iniziali della simulazione, nelle quali abbiamo un volo in virata su traiettoria elicoidale (che vista nella proiezione riportata in figura 20 si traduce in una traiettoria circolare) ad angolo di rampa abbastanza elevato e negativo.



F-16D programma MATV - VISTA - Figura 19

Foto dello F-16 programma MATV, e particolare dello speciale paracadute antivite.

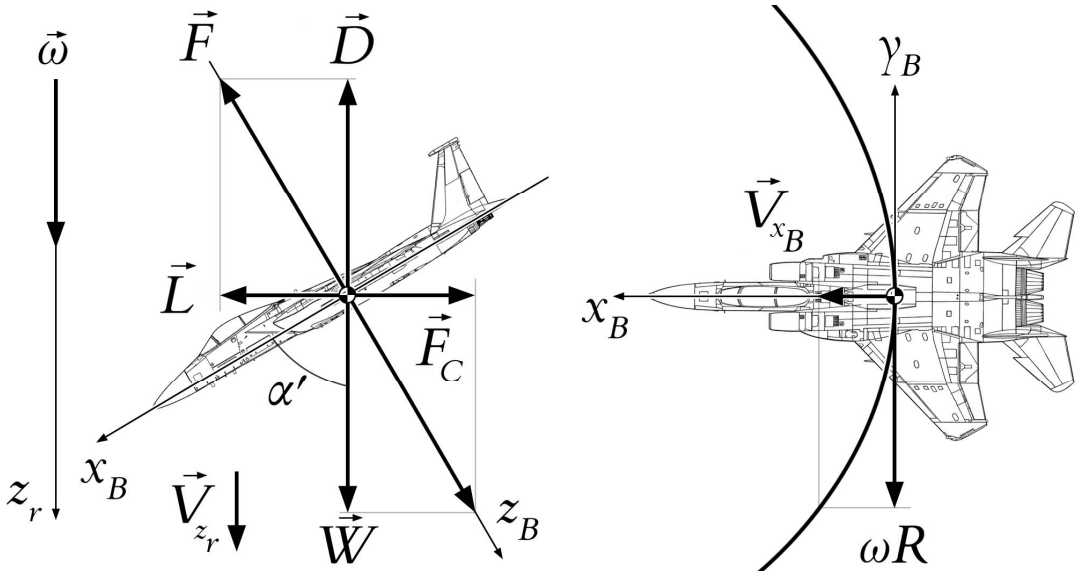
Figura 20

21.6 - EQULIBRIO ALLA TRASLAZIONE ED ALLA ROTAZIONE NEL MOTO DI AVVITAMENTO STABILIZZATO

Figura 21

Affronteremo lo studio del moto in avvitamento esclusivamente da un punto di vista qualitativo, parlando prima di equilibrio delle forze durante questa fase di volo, e poi di equilibrio dei momenti: parliamo di vite stazionaria ammesso che questa ipotesi sia plausibile; parlare di vite stazionaria significa ammettere che possa stabilirsi una condizione di volo nella quale le grandezze del moto si mantengano costanti. Questa situazione non si verifica frequentemente nel caso reale perché molto spesso le grandezze del moto durante il volo in avvitamento presentano una variazione periodica; tuttavia se il problema è quello di iniziare a comprendere, almeno in parte, quello che accade durante questa condizione, l'ipotesi di volo stazionario risulta del tutto accettabile. In genere nello studio della vite vengono trascurati gli effetti propulsivi, cioè si considerano situazioni nelle quali il valore della spinta o della potenza erogata è nullo; questo permette di semplificare il problema, anche perché in generale l'effetto della spinta ha molta più importanza durante la manovra di uscita dalla vite.

Parliamo prima di tutto di equilibrio delle forze; come sempre partiamo da uno schema abbastanza semplificato, ma che ci permette di acquisire delle informazioni importanti sul tipo di configurazione e sull'assetto che il velivolo assume in vite stabilizzata ed inoltre permette di ricavare (ma noi non lo faremo) tutte le informazioni relative alla traiettoria del baricentro in questa condizione, come per esempio passo e raggio della traiettoria, velocità (o componenti della velocità) durante il moto di avvitamento. Consideriamo dunque il seguente schema nel quale è riportato il sistema di forze agenti sull'apparecchio.



$V_{x_B} = V_{z_r} \cos\alpha'$ - Figura 22

Indichiamo con z_r l'asse della vite che, se ammettiamo che esista una condizione stazionaria, sarà sicuramente verticale; osserviamo inoltre come la situazione più semplice che possiamo considerare sia quella in cui l'asse longitudinale del velivolo vada ad intersecare l'asse della vite; siamo in una situazione in cui il velivolo scende con una traiettoria elicoidale attorno all'asse z_r mantenendo sempre l'asse longitudinale in modo tale che questo intersechi l'asse della vite. Per quanto riguarda le forze di massa, abbiamo la forza peso diretta verticalmente come l'asse della vite e la forza centrifuga, la cui retta di azione è incidente sull'asse della vite. In conclusione *la risultante delle forze di massa è complanare con l'asse della vite*. Tale risultante è equilibrata dalle azioni aerodinamiche la cui risultante, all'incidenza alla quale avviene il volo in vite, *sarà in prima approssimazione diretta perpendicolarmente al piano alare* (anche ciò si può verificare sperimentalmente) con un *punto di applicazione molto prossimo al baricentro*. La conclusione di questo discorso è la seguente: poiché le forze aerodinamiche fanno equilibrio alle forze di massa, anche la risultante delle forze aerodinamiche dovrà essere complanare con l'asse della vite, e, sempre in base a quanto detto, essendo tale forza perpendicolare al piano alare ed applicata al baricentro, possiamo concludere dicendo che, per mantenere l'apparecchio in equilibrio, l'asse z_B dovrà sempre intersecare l'asse della vite. Osserviamo che in questa condizione di equilibrio *le ali sono livellate*. Nel bilancio delle forze non abbiamo considerato la forza aerodinamica laterale, la quale viene in questo tipo di studi trascurata; quindi, sempre riferendoci allo schema di figura 22, la resistenza fa equilibrio al peso e la portanza fa equilibrio alla forza centrifuga. Dato che siamo in condizioni stazionarie, l'angolo fra l'asse della vite e l'asse z_B si mantiene costante, quindi se facciamo ruotare il velivolo attorno all'asse della vite mantenendo z_B tale che intersechi z_r sempre con lo stesso angolo, abbiamo una prima condizione di equilibrio che ci dice come si disporrà il velivolo durante il moto. In figura 22 è anche evidenziato l'angolo α' che non è propriamente l'angolo d'attacco, ma un angolo abbastanza prossimo ad esso: possiamo infatti definirlo come l'angolo tra la componente verticale V_{z_r} della velocità del velivolo durante il moto in avvitament0 e l'intersezione tra il piano $x_B y_B$ ed il piano $z_r z_B$. Un'altro aspetto degno di attenzione riguarda il valore (negativo in questo caso) dell'angolo di derapata (si veda figura 22b) il quale si mantiene sempre diverso da zero ed è anche piuttosto grande; notiamo infatti come la componente della velocità del velivolo nel piano alare sia data dalla somma tra la velocità ωR del baricentro (il quale descrive una traiettoria circolare) e la componente lungo x_B della velocità verticale V_{z_r}. Ricordiamo (si veda figura 17) come le condizioni di autorotazione risultino fortemente influenzate dalla presenza di assetti derapati; in particolare, per velocità di rollio positive[11] (come nel nostro caso), un angolo di derapata negativo produce un ampliamento del campo di autorotazione.

[11] Per mantenere la posizione di equilibrio, cioè l'asse z_B incidente con l'asse della vite, bisogna ruotare il velivolo abbassando la semiala destra ed alzando la semiala sinistra; il velivolo cioè deve possedere una velocità di rollio positiva.

Nella pratica nulla impone all'asse x_B d'intersecare l'asse della vite; cioè il fatto di avere immaginato che durante il moto di avvitamento l'asse longitudinale sia incidente all'asse della vite rappresenta ancora una schematizzazione che permette di esprimere le forze in termini di equilibrio in modo molto semplice. Nel caso più generale l'asse x_B forma rispetto al piano $z_r z_B$ un angolo che indichiamo con β' e che prende il nome di *angolo di deviazione*.

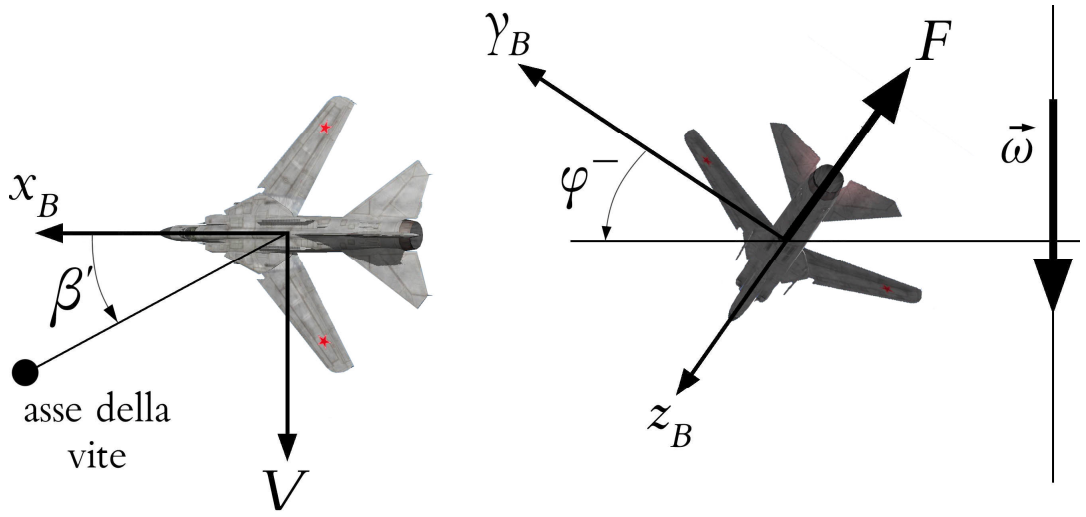


Figura 23

Anche in questo caso, affinché si abbia equilibrio, la risultante delle forze aerodinamiche agenti sull'aeroplano deve intersecare l'asse della vite. Quando però l'angolo di deviazione è diverso da zero e per esempio positivo, l'asse longitudinale del velivolo non andrebbe più ad intersecare l'asse della vite. Affinché F intersechi l'asse occorre che l'apparecchio si trovi in una condizione di sbandamento.

Avendo definito gli angoli α' e β' risulta conveniente esprimere le componenti della velocità angolare del velivolo nel riferimento di assi corpo proprio in termini di questi due angoli

$$p = \omega \cos\alpha' \cos\beta'$$
$$q = -\omega \cos\alpha' \operatorname{sen}\beta'$$
$$r = \omega \operatorname{sen}\alpha'$$

$$\beta' = \tan^{-1}\frac{\omega R}{V}$$

quindi la velocità di rollio è positiva, la velocità di beccheggio è negativa, per un angolo di deviazione positivo, e la velocità di imbardata è positiva. Concludendo, possiamo affermare che esprimendoci in termini di equilibrio delle forze, oltre ad ottenere tutte le infor-

mazioni sulla traiettoria e sulle velocità dell'aereo, riusciamo a definire l'assetto che l'apparecchio mantiene durante questa manovra.

Affrontiamo adesso, sempre da un punto di vista qualitativo, l'equilibrio dei momenti; parlando di equilibrio dei momenti avremo a che fare con coppie inerziali (viste nel § 1), le quali risultano importanti in quanto le velocità angolari risultano piuttosto elevate, e poi con coppie di tipo aerodinamico.

Occupiamoci prima di tutto dei momenti di beccheggio (che costituiscono la parte più importante del discorso): in figura 24 è riportato di nuovo lo schema che stiamo considerando e mette in evidenza che, anche a valori dell'angolo d'attacco maggiori di quello critico, la coppia aerodinamica di beccheggio risulta picchiante e quindi tende a ridurre l'angolo d'attacco: esiste cioè quella che abbiamo chiamato stabilizzazione aerodinamica; dal punto di vista delle azioni aerodinamiche, dunque, il velivolo tenderebbe ad abbassare il muso riducendo l'angolo d'attacco.

Figura 24

Questo è certamente un effetto antivite in quanto se riduciamo l'angolo d'attacco riduciamo o addirittura usciamo dal campo di autorotazione. Se riusciamo a ridurre l'incidenza al di sotto del valore critico non saremo più in regime di autorotazione e quindi verrebbe meno quel fenomeno di trasferimento di energia dal fluido al velivolo che produce l'effetto di mantenere l'aereo in rotazione.

Per quanto riguarda la coppia inerziale (figura 5b), questa è indicata con M_i ed è data da

$$M_i = pr(I_z - I_x) > 0$$

non spendiamo troppe parole sull'espressione di questa coppia inerziale dato che abbiamo già trattato questa situazione parlando degli effetti di *roll coupling* (§ 1 ed in particolare figura 5): osserviamo come lo schema in figura 5c sia del tutto analogo a quello del volo in avvitamento, non appena ruotiamo il grafico di 90° e riportiamo l'asse della vite. La con-

clusione è che I_z è sempre il momento di inerzia maggiore, perciò gli effetti inerziali, in termini di momenti di beccheggio, producono delle coppie positive, cioè cabranti, le quali tendono ad aumentare l'angolo d'attacco.

Dunque tirando le somme otteniamo il contributo della coppia aerodinamica, la quale tende a ridurre l'angolo d'attacco, ed il contributo della coppia inerziale, la quale tende invece ad aumentare l'incidenza mantenendola ad un valore maggiore di quello critico e quindi mantenendo le condizioni di autorotazione. Quanto detto è riassunto nella seguente figura

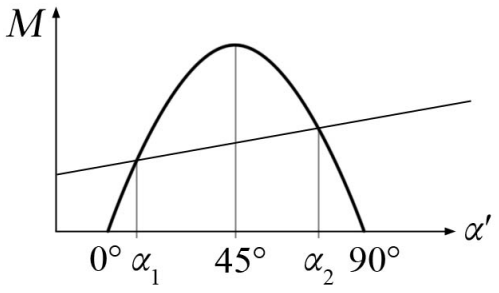


Figura 25

In questo grafico analizziamo un altro risultato interessante: i punti di intersezione delle due curve identificano due diverse condizioni di equilibrio α_1 (che in genere è minore di 45°) ed α_2. Ciò che differenzia le due condizioni è la stabilità: la condizione di equilibrio ad α_1 è una condizione instabile, osserviamo infatti come nel caso in cui vi sia una variazione $\Delta\alpha > 0$ il momento inerziale è maggiore del momento aerodinamico e quindi prevale l'effetto che tende a far aumentare ulteriormente l'angolo d'attacco, mentre la condizione di equilibrio ad α_2 è una condizione di equilibrio dalla quale si uscirà con maggiore difficoltà.

Lo stesso tipo di discorso può essere fatto parlando di coppie di rollio: il termine che ci interessa in questo caso per quanto riguarda gli effetti inerziali è

$$L_i = qr\left(I_y - I_z\right)$$

Per quanto riguarda il segno di L_i teniamo presente che il termine fra parentesi è sempre negativo; inoltre, scomponendo la velocità angolare ω nella componente r (positiva) secondo z e nella componente q (negativa) secondo y, si ha che L_i, per angoli di deviazione positivi, rappresenta una quantità positiva che tende dunque sempre a livellare le ali del velivolo, ossia a ridurre l'angolo di deviazione.

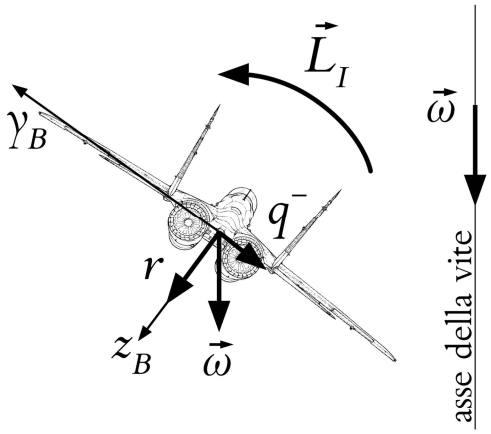


Figura 26

Questo effetto è antivite, perchè ogni fenomeno che riduce l'angolo β' produce di fatto anche una riduzione dell'angolo di derapata, e riducendo l'angolo di derapata riduciamo la regione di autorotazione. L'azione aerodinamica è certamente opposta a quella inerziale, altrimenti non si può parlare di equilibrio, e dunque è negativa; se vogliamo dare una spiegazione di tipo qualitativo al perché la coppia aerodinamica di rollio sia negativa pensiamo al fatto che la semiala esterna è quella che si muove a maggiore velocità e quindi sarà soggetta a maggiore forza aerodinamica.

L'ultimo caso da considerare è quello degli equilibri di imbardata; in questo caso la coppia aerodinamica (facendo sempre riferimento alla situazione $\beta' > 0$) è negativa poiché risente della stabilità direzionale del velivolo e quindi tende a ridurre l'angolo di derapata; l'effetto è perciò antivite. La coppia inerziale di imbardata ha invece espressione

$$N_i = -pq\left(I_x - I_y\right)$$

ed il segno di tale coppia dipende dal segno del termine in parentesi; nel caso più sfavorevole, cioè nel caso in cui $I_x < I_y$ ricordando che q è negativo e p positivo, N_i è positiva. Ciò significa che la coppia inerziale tende ad aumentare l'angolo di deviazione, quindi tende ad aumentare l'angolo di derapata e ha perciò un effetto favorevole al mantenimento delle condizioni di autorotazione. In una situazione di vite stabilizzata la coppia inerziale e quella aerodinamica si fanno equilibrio.

21.7 - MANOVRA DI USCITA DALLA VITE

Concludiamo il discorso parlando delle manovre che permettono l'uscita dal volo in avvitamento. Un aereo verrà posto in una condizione di avvitamento in modo volontario

nel caso di un velivolo acrobatico, ma l'entrata in vite spesso è una manovra non desiderata; in ogni caso quanto più difficilmente un velivolo entra in vite, tanto più difficilmente ne esce. Il discorso sulle manovre più efficaci di uscita da questa condizione di volo è abbastanza lungo poiché dipende dal tipo di velivolo; il caso di maggior interesse generale è quello relativo ad una situazione tipica nella quale, a causa dell'alto valore dell'angolo d'attacco, l'equilibratore di fatto è inefficace e anche gli alettoni hanno una potenza di controllo estremamente ridotta; l'unica superficie di controllo efficace è dunque il timone di direzione. La manovra di uscita dalla vite prevede quindi un'azione del pilota sui pedali in modo che venga contrastata la rotazione di imbardata del velivolo: tale azione produce una diminuzione della velocità di imbardata e quindi della coppia inerziale di beccheggio ($M_i = pr(I_z - I_x) > 0$); si produce così uno squilibrio dei momenti di beccheggio che rende prevalente l'azione del momento aerodinamico (si veda la figura 25) il quale tende a ridurre l'angolo d'attacco e perciò ad abbassare il muso del velivolo. Una volta ridotto l'angolo d'attacco dobbiamo aspettarci che l'equilibratore torni ad essere efficace, sia pure parzialmente, e quindi l'azione successiva sarà quella di un comando a picchiare sull'equilibratore il quale ridurrà ulteriormente l'angolo d'attacco ed aumenterà la velocità di volo. A questo punto le superfici di controllo diventeranno tutte efficaci e quindi il velivolo si troverà in una condizione di volo in picchiata e la manovra successiva sarà quella di richiamare e portare l'aereo in una condizione di volo orizzontale.

Alcuni velivoli per i quali l'entrata in vite è particolarmente critica o con i quali vengono effettuate, ai fini di prove di volo, manovre di avvitamento installano un paracadute nella regione posteriore[12] che viene estratto nel caso in cui si voglia effettuare una manovra di uscita dalla vite.

[12] Molti aeroplani militari ad alte prestazioni adottano un paracadute (*parafreno*), ma questo è usato unicamente per rallentare, una volta atterrati su piste corte.

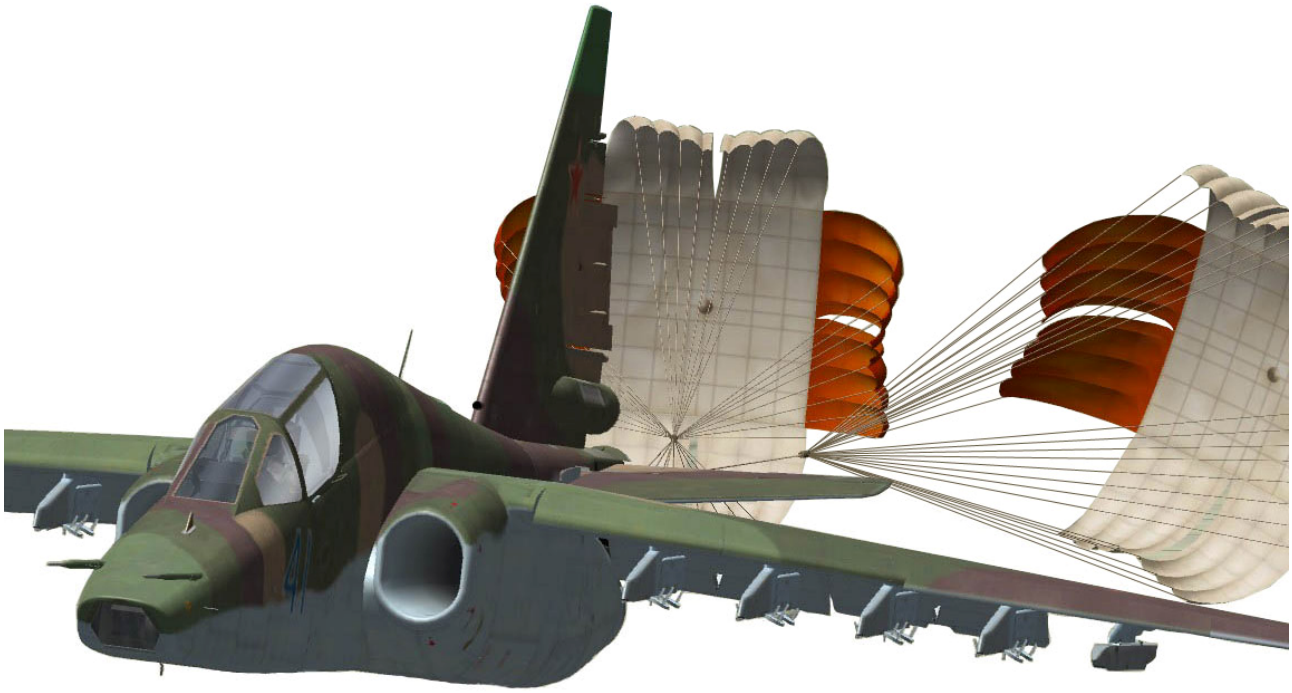


Figura 27

Nel momento in cui si apre il paracadute, espulso dalla parte posteriore dell'aeroplano, l'effetto è quello di produrre un momento picchiante sul velivolo stesso (abbiamo una forza applicata nella parte posteriore del velivolo) e il risultato è quello di ottenere, sfruttando questa volta azioni aerodinamiche, un momento picchiante che riduce l'incidenza e riporta l'aereo al di fuori delle condizioni di autorotazione.

UNITÀ DI MISURA

Unità di misura	Abbreviazione	Equivalente	Definizione
Fondamentali			
metro	**m**		Tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un tempo di 1/299'792'458 di secondo.
chilogrammo	**kg**		Massa di un campione di platino e iridio conservato a Sèvres.
secondo	**s**		Durata di 9'192'631'770 oscillazioni della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli iperfini dell'atomo di cesio 133 nello stato fondamentale.
kelvin	**K**		Temperatura corrispondente ad 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua (0 °C)
ampere	**A**		Corrente che, percorrendo due conduttori paralleli, di lunghezza infinita e diametro infinitesimo, posti alla distanza di un metro nel vuoto, produce tra i due conduttori una forza di 2×10^{-7} N/m.
candela	**cd**		Una candela è pari all'intensità luminosa, in una certa direzione, di una sorgente emettente una radiazione monocromatica di frequenza pari a 540×10^{12} Hz e di intensità radiante in quella direzione di 1/683 W per steradiante.
mole	**mol**		La mole è definita come la quantità di sostanza di un sistema che contiene un numero di unità interagenti pari al numero degli atomi presenti in 12 grammi di carbonio-12.
Derivate			
radiante		1 m/m	Angolo piano che su una circonferenza avente centro nel vertice dell'angolo, intercetta un arco di lunghezza uguale al raggio della circonferenza stessa.
newton	**N**	$1\ m\times kg/s^2$	
pascal	**Pa**	$1\ kg/m^2$	
joule	**J**	$1\ m^2\times kg/s^2$	
watt	**W**	$1\ m^2\times kg/s^3$	
ora	**h**	3'600 s	
litro	**l**	$10^{-3}\ m^2$	
hertz	**Hz**	$1\ s^{-1}$	
Abolite, ma ancora di uso comune			
horse power (anglosassone)	**hp**	745,7 W	
cavallo vapore (italiana)	**Cv**	735,4 W	
Libbra	**lb**	0,45359237 kg	

pound avoirdupois			
Oncia *ounce avoirdupois*	**oz**	0,0283495 kg	
minuto	**min**	60 s	
pollice, *inch*	**in**	0,0254 m	
piede, *foot*	**ft**	0,3048 m	Equivale a 12 in
iarda, *yard*	**yd**	0,9144 m	Equivale a 36 in
grado sessagesimale	**°**	0,017453278	Trecentosessantesima parte dell'angolo giro.
miglio terrestre	**mi**	1'609,344 m	Equivale a 1'760 yd
miglio marino (internazionale)	**mn** **nm**	1'852 m	Spazio percorso in un'ora alla velocità di un nodo.
nodi, *knots*	**kt**	1,852 km/h	Ognuno dei tratti in cui è suddivisa la sagola del solcometro a barchetta. Un miglio marino orario.
atmosfera	**atm**	101'325 Pa	
bar	**bar**	100'000 Pa	
libbre per pollice quadrato	**psi**	6'894 Pa	
ara	**a**	100 m^2	
ettaro	**ha**	10'000 m^2	

I simboli delle unità di misura non si scrivono mai puntati. Per esteso le unità di misura si scrivono minuscole (per esempio: newton, misura; Newton, scienziato).
L'abbreviazione di chilo si scrive minuscola, anche perché altrimenti si confonde con il kelvin (per esempio: km, chilometro; Km, kelvin per metro).
Le unità di misura imperiali non fanno parte del sistema internazionale e perciò sono state abolite. Il separatore decimale è la virgola.